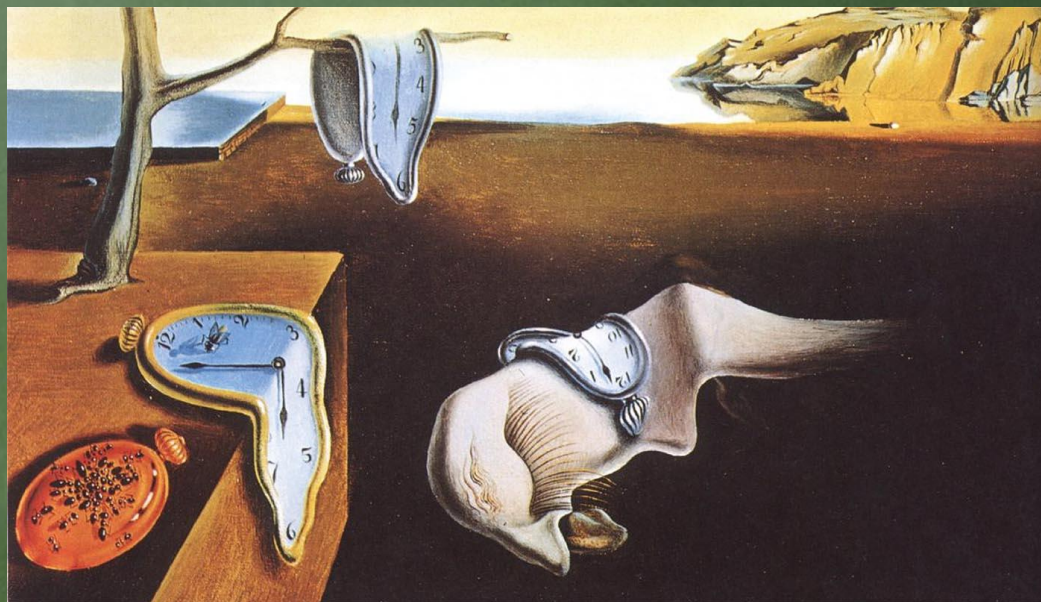
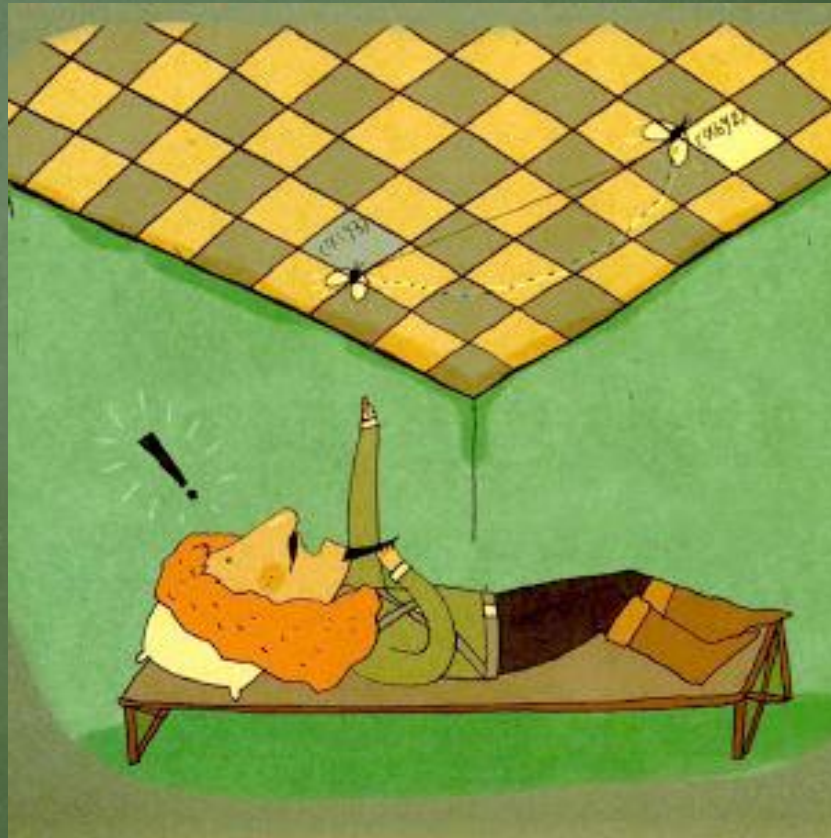


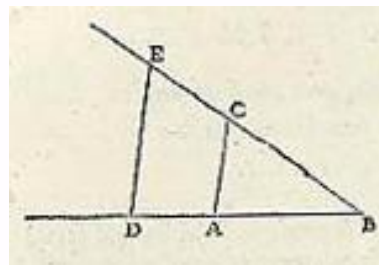
1/2장 상대론



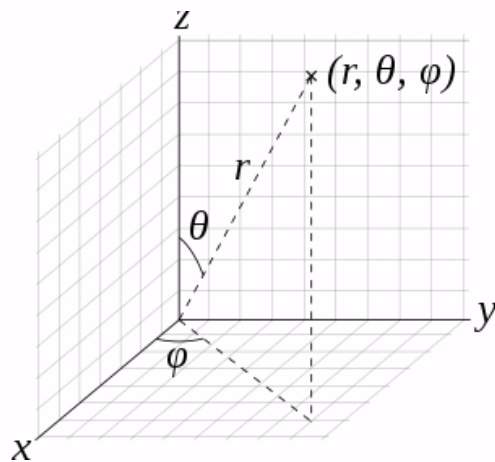
운동을 수로 표현하다



운동을 수로 표현하기 위해 필요한 것

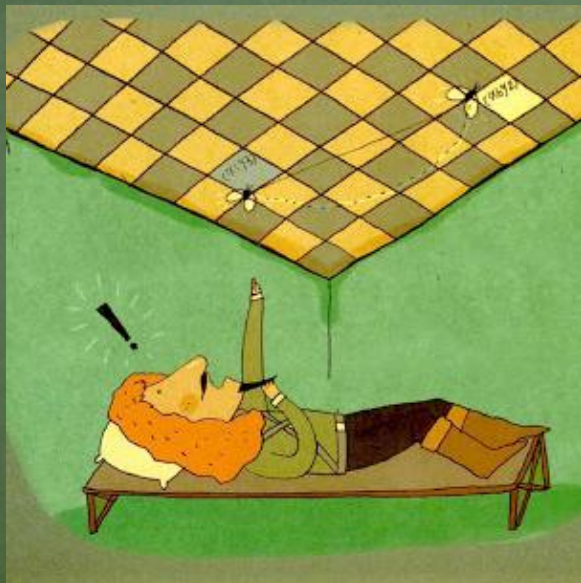


단위의 선택



좌표계의 선택

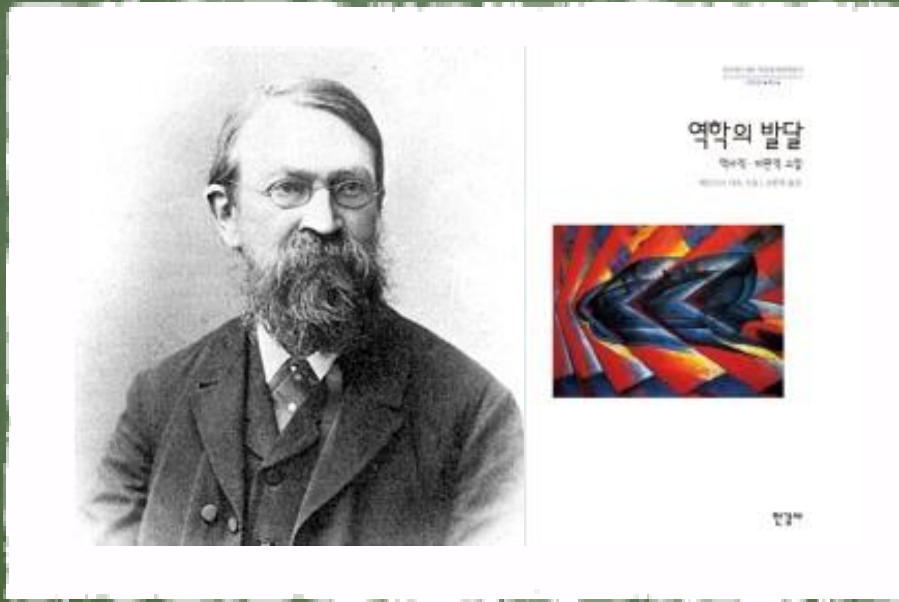
공변성 covariance



좌표의 선택에 따라 운동에 대응되는 수 자체는 변할 수 있다.
그러나 운동을 기술하는 방정식의 수학적 형태는
좌표계의 선택에 의존하지 않아야 한다.

이것을 **공변성**이라고 한다.

마흐의 “역학의 발달” (1883)



에른스트 마흐는 “역학의 발달”이라는 책에서, 19세기까지 발달한 역학의 역사를 요약하였고, 이 때까지 남아있었던 몇 가지 미심쩍은 개념들을 논의하였다.

그 중에는 뉴턴의 ‘절대시간/절대공간’의 개념, 그리고 뉴턴의 ‘관성’에 대한 개념이 있었다. 이러한 철학적 논의는 아인슈타인이 상대성 이론을 정립하는데 결정적인 역할을 하였다.

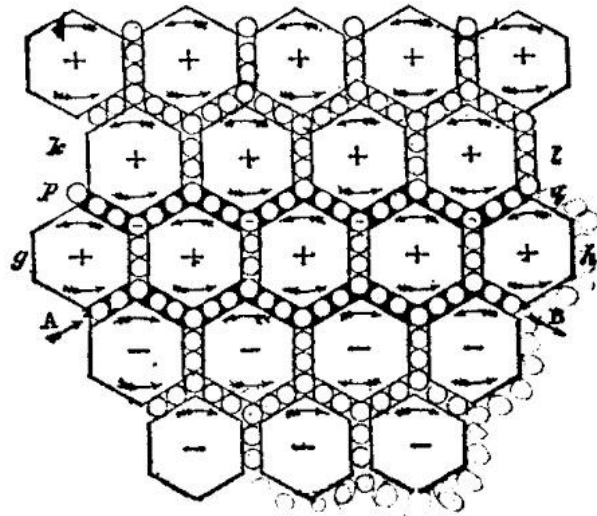
뉴턴 역학의 문제점

뉴턴의 운동 방정식은 갈릴레이 변환에 대해서 불변이다.

그러나 **맥스웰** 방정식은 그렇지 않다.

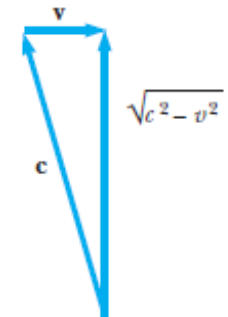
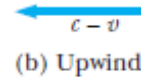
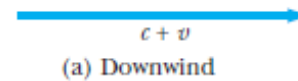
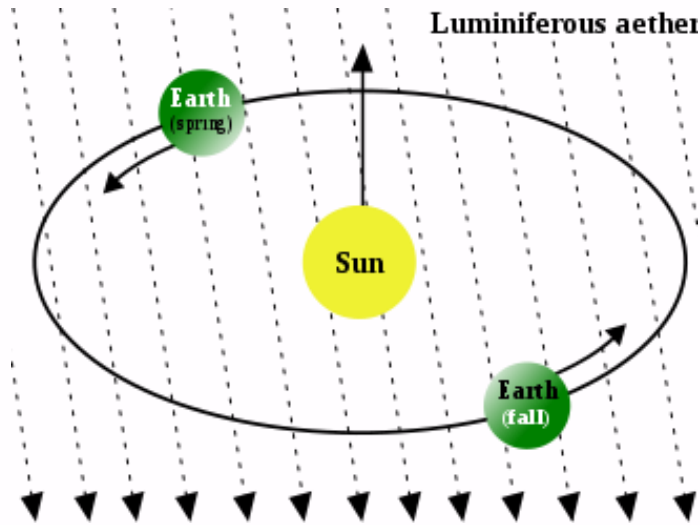
맥스웰 방정식을 불변으로 만드는 '**맞춤형**' 변환이 있을까?

맥스웰을 향한정식과 에테르 가설



맥스웰은 전기장과 자기장이 파동 방정식을 만족한다는 것을 보였다.
그런데 모든 파동은 매질을 통해 전달된다.
따라서 전자기파를 매개하는 매질도 존재한다고 생각되며,
이것을 **에테르**라고 불렀다.

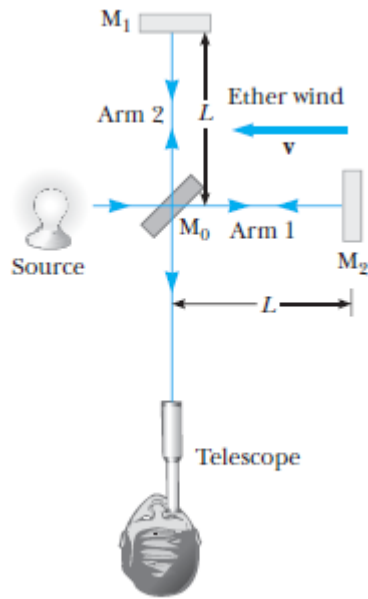
에테르의 존재를 확인하는 방법



(c) Across

지구는 태양 주위를 회전운동하기 때문에 빛의 속도는 매질의 속도에 의존하게 된다.
에테르와 같은 방향으로 지구가 움직이는 경우와
에테르를 거슬러 지구가 움직이는 경우
빛의 속도는 서로 달라지게 된다.

마이컬슨-몰리 실험



수평경로를 이동하는데 걸린 시간

$$t_1 = \frac{L}{c+v} + \frac{L}{c-v} = \frac{2Lc}{c^2 - v^2} = \frac{2L}{c} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1}$$

수직경로를 이동하는데 걸린 시간

$$t_2 = \frac{2L}{(c^2 - v^2)^{1/2}} = \frac{2L}{c} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

시간 차

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{2L}{c} \left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1} - \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \right] \approx \frac{Lv^2}{c^3}$$

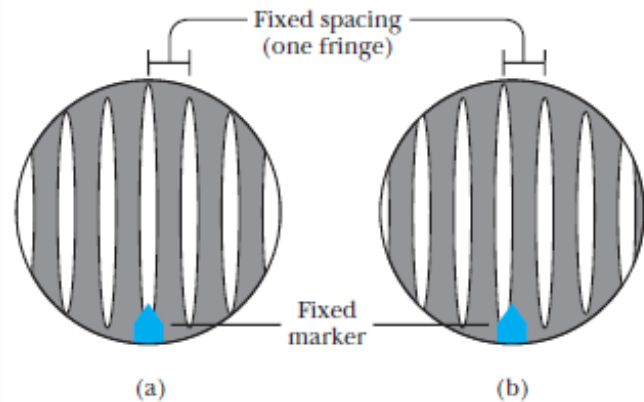
마이컬슨과 몰리는 1887년 에테르에 대해 서로 다른 방향으로 움직이는 두 빛의 경로에 따른 **속도 차이**를 실험으로 조사하였다.

에테르가 존재한다면 두 경로의 **속도차에 의한 간섭무늬**가 나타나야 한다.

마이컬슨-몰리 실험

$$\Delta d = c(2\Delta t) = \frac{2Lv^2}{c^2}$$

$$\text{Shift} = \frac{\Delta d}{\lambda}$$



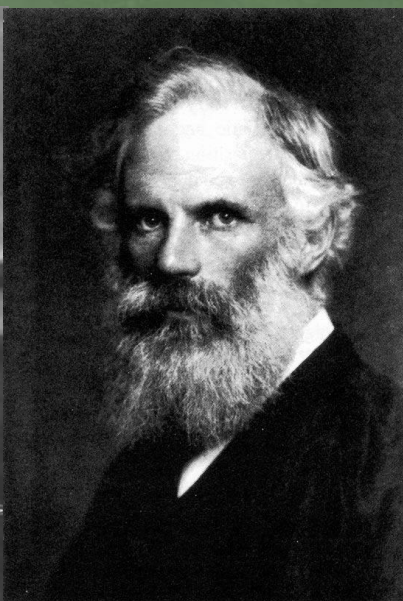
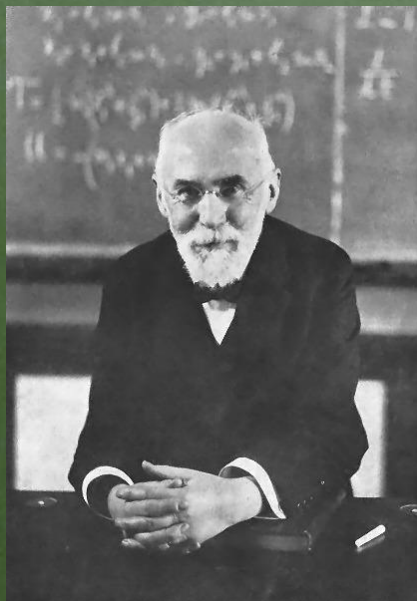
이제 간섭계를 90도 돌리면 돌리기 전과 비교해서 다음과 같은 **경로차**가 생긴다.
이 경로차에 의한 간섭 무늬의 변화는 당시의 실험으로 식별할 수 있는 수준이었다.
그러나 어떠한 효과도 실제로는 관측되지 않았다.

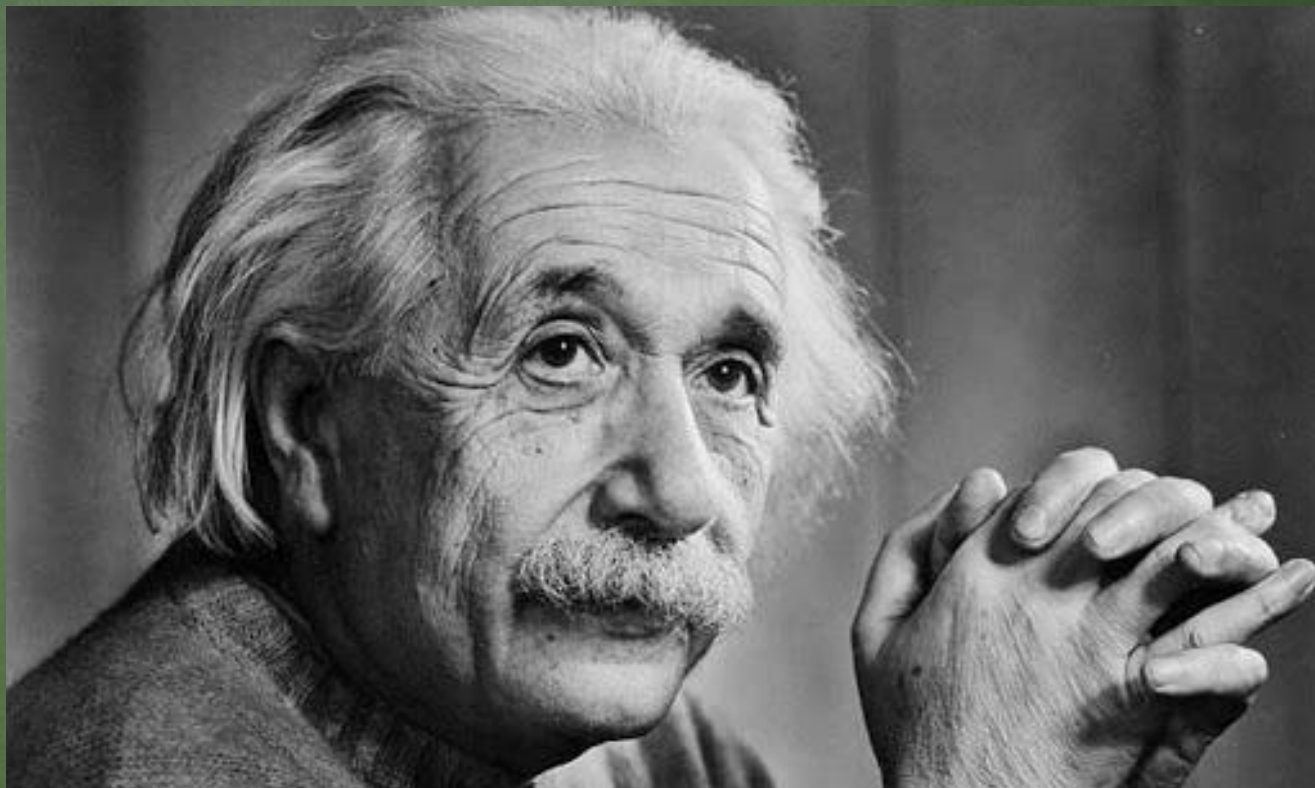
로런츠-피츠제럴드 수축

로런츠와 피츠제럴드는 이 문제를 임시변동으로 설명하기 위해

속력 v 로 움직이는 물체는 길이가 $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ 만큼 줄어든다고 생각했다.

이것을 로런츠-피츠제럴드 수축이라고 부른다.





알베르트 아인슈타인



아인슈타인의 두 가정

1. **상대성:** 물리법칙은 모든 관찰자에게 동일하다.

즉, 모든 물리법칙(뉴턴 방정식, 맥스웰 방정식 등)은 관성좌표계를 바꾸는 것에 대해서 바뀌지 않아야 한다.

2. **광속도 불변:** 진공에서 빛의 속도는 모든 관성좌표계에 대해 상수 c 이다.

광속도 불변의 결과

먼저 좌표계가 x 방향으로 움직일 때, 다른 방향의 성분은 좌표변환에 기여하지 않는다고 하자.

광속도 불변의 결과

먼저 좌표계가 x 방향으로 움직일 때, 다른 방향의 성분은 좌표변환에 기여하지 않는다고 하자.

그렇다면 등속 운동하는 방향을 x 축으로 잡을 수 있다.

이 때, 광속도 불변이 되기 위해서는 임의의 좌표계에서 $x^2 - c^2 t^2$ 이 상수가 되어야 한다.

따라서 이 변환은 (x, ict) 이라는 벡터의 길이를 보존한다.

광속도 불변의 결과

먼저 좌표계가 x 방향으로 움직일 때, 다른 방향의 성분은 좌표변환에 기여하지 않는다고 하자.

그렇다면 등속 운동하는 방향을 x 축으로 잡을 수 있다.

이 때, 광속도 불변이 되기 위해서는 임의의 좌표계에서 $x^2 - c^2 t^2$ 이 상수가 되어야 한다.

따라서 이 변환은 (x, ict) 이라는 벡터의 길이를 보존한다.

길이를 보존하는 연속적인 변환이라고 하면, 이것은 다음과 같은 수학적인 형태를 가진다.

$$\begin{pmatrix} x' \\ ict' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \eta & i \sinh \eta \\ -i \sinh \eta & \cosh \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ict \end{pmatrix}$$

광속도 불변의 결과

또는 $\cosh \eta \propto 1$ 이고 $\sinh \eta \propto \beta$ 라고 하면, 일반성을 잃지 않고 다음과 같이 적을 수 있다.

$$\begin{pmatrix} x' \\ ict' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & i \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ -i \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ict \end{pmatrix}$$

광속도 불변의 결과

또는 $\cosh \eta \propto 1$ 이고 $\sinh \eta \propto \beta$ 라고 하면, 일반성을 잃지 않고 다음과 같이 적을 수 있다.

$$\begin{pmatrix} x' \\ ict' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & i \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ -i \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ict \end{pmatrix}$$

이 좌표 변환에서 속도가 작을 때 갈릴레이 변환이 된다는 조건을 만족하기 위해서는 다음 조건을 만족해야 한다.

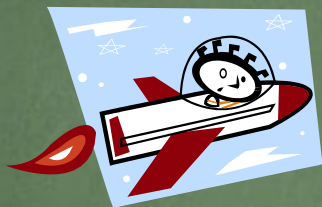
$$\beta = \frac{v}{c}$$

로런츠 변환

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ict' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ict \end{pmatrix}$$

로런츠 변환

속도 $v \rightarrow$



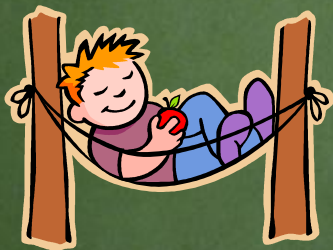
(x'_1, t'_1)



(x'_2, t'_2)



(x_1, t_1)



(x_2, t_2)



상대성 이론의 결과들

1. 시간지연
2. 길이수축
3. 동시성
4. 속도합성
5. 상대론적 운동량
6. 상대론적 에너지
7. 상대론적 도플러 효과

1. 시간지연 time dilation

운동하는 관찰자의 시간 간격: $\Delta t' = t_2' - t_1'$
운동하는 관찰자의 고유시간

운동하는 관찰자의 위치: $x_2' = x_1'$
시간 측정의 조건

1. 시간지연 time dilation

운동하는 관찰자의 시간 간격: $\Delta t' = t_2' - t_1'$
운동하는 관찰자의 고유시간

운동하는 관찰자의 위치: $x_2' = x_1'$
시간 측정의 조건

정지한 관찰자의 시간 간격: $\Delta t = t_2 - t_1$

1. 시간지연 time dilation

운동하는 관찰자의 시간 간격: $\Delta t' = t_2' - t_1'$
운동하는 관찰자의 고유시간

운동하는 관찰자의 위치: $x_2' = x_1'$
시간 측정의 조건

정지한 관찰자의 시간 간격: $\Delta t = t_2 - t_1$

로런츠 변환으로부터 $x_2 - x_1 = v(t_2 - t_1)$

1. 시간지연 time dilation

운동하는 관찰자의 시간 간격: $\Delta t' = t_2' - t_1'$
운동하는 관찰자의 고유시간

운동하는 관찰자의 위치: $x_2' = x_1'$
시간 측정의 조건

정지한 관찰자의 시간 간격: $\Delta t = t_2 - t_1$

로런츠 변환으로부터 $x_2 - x_1 = v(t_2 - t_1)$

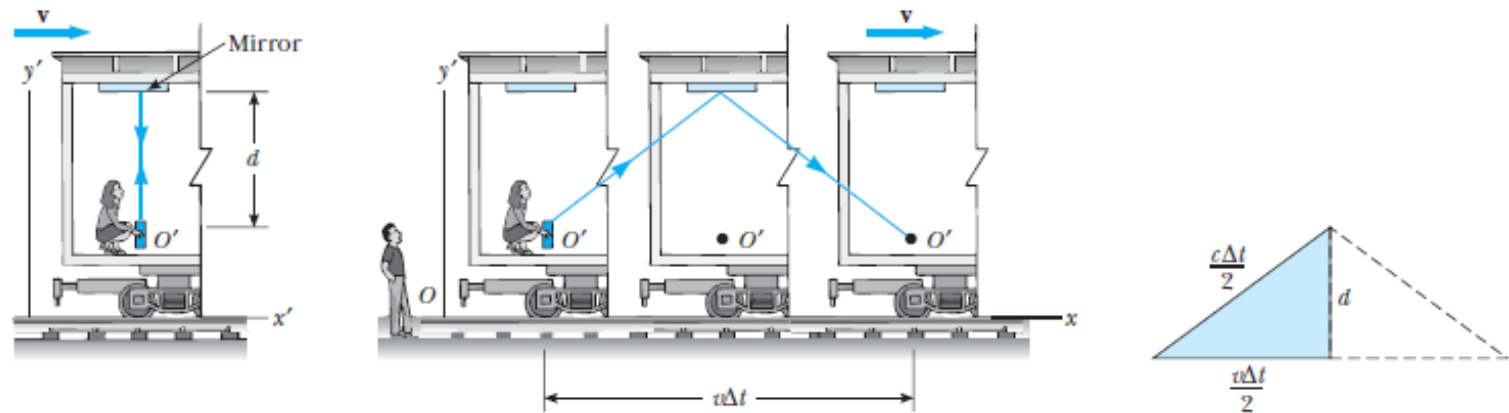
$$\begin{aligned} t_2' - t_1' &= - (v\gamma/c^2) (x_2 - x_1) + \gamma (t_2 - t_1) \\ &= - (v^2\gamma/c^2) (t_2 - t_1) + \gamma (t_2 - t_1) \\ &= (t_2 - t_1) / \gamma \end{aligned}$$

1. 시간지연 time dilation

$$\Delta t' = \Delta t / \gamma$$

따라서 정지해 있는 관찰자는
운동하는 관찰자의 시계가 느리게 간다고 측정한다.

1. 시간지연 time dilation



$$\Delta t' = \frac{\text{distance traveled}}{\text{speed of light}} = \frac{2d}{c}$$

$$\left(\frac{c\Delta t}{2}\right)^2 = \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2 + d^2$$

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} = \gamma \Delta t'$$

위와 같은 간단한 사고실험을 통해 시간 지연을 다시 확인해볼 수 있다.

2. 길이수축 length contraction

운동하는 관찰자의 시간: t_2' 및 t_1'

운동하는 관찰자의 위치 간격: $\Delta x' = x_2' - x_1'$
운동하는 관찰자의 고유길이

2. 길이수축 length contraction

운동하는 관찰자의 시간: t_2' 및 t_1'

운동하는 관찰자의 위치 간격: $\Delta x' = x_2' - x_1'$
운동하는 관찰자의 고유길이

정지한 관찰자의 시간: $t_2 = t_1$
길이 측정의 조건

정지한 관찰자의 길이 간격: $\Delta x = x_2 - x_1$

2. 길이수축 length contraction

운동하는 관찰자의 시간: t_2' 및 t_1'

운동하는 관찰자의 위치 간격: $\Delta x' = x_2' - x_1'$
운동하는 관찰자의 고유길이

정지한 관찰자의 시간: $t_2 = t_1$
길이 측정의 조건

정지한 관찰자의 길이 간격: $\Delta x = x_2 - x_1$

로런츠 변환으로부터 $x_2' - x_1' = \gamma (x_2 - x_1)$

2. 길이 수축 length contraction

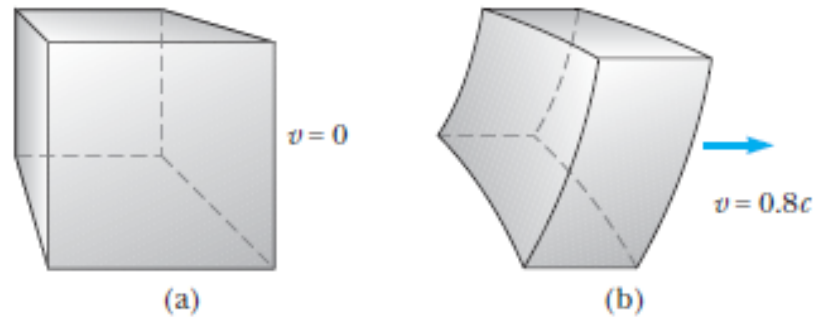
$$\Delta x' = \gamma \Delta x$$

따라서 정지해 있는 관찰자는

운동하는 관찰자의 길이가 짧아진다고 측정한다.

이것을 로런츠-피츠제럴드 수축이라고 한다.

2. 길이 수축 length contraction



실제로 운동하는 관찰자가 측정하는 효과

3. 동시성 simultaneity

운동하는 관찰자의 시간: $t_2' = t_1'$ 운동하는 관찰자의 '동시' 조건

운동하는 관찰자의 위치 간격: $\Delta x' = x_2' - x_1'$

3. 동시성 simultaneity

운동하는 관찰자의 시간: $t_2' = t_1'$ 운동하는 관찰자의 '동시' 조건

운동하는 관찰자의 위치 간격: $\Delta x' = x_2' - x_1'$

정지한 관찰자의 시간 간격: $\Delta t = t_2 - t_1$

정지한 관찰자의 길이 간격: $\Delta x = x_2 - x_1$

3. 동시성 simultaneity

운동하는 관찰자의 시간: $t_2' = t_1'$ 운동하는 관찰자의 '동시' 조건

운동하는 관찰자의 위치 간격: $\Delta x' = x_2' - x_1'$

정지한 관찰자의 시간 간격: $\Delta t = t_2 - t_1$

정지한 관찰자의 길이 간격: $\Delta x = x_2 - x_1$

로런츠 변환으로부터 $x_2 - x_1 = c^2/v (t_2 - t_1)$

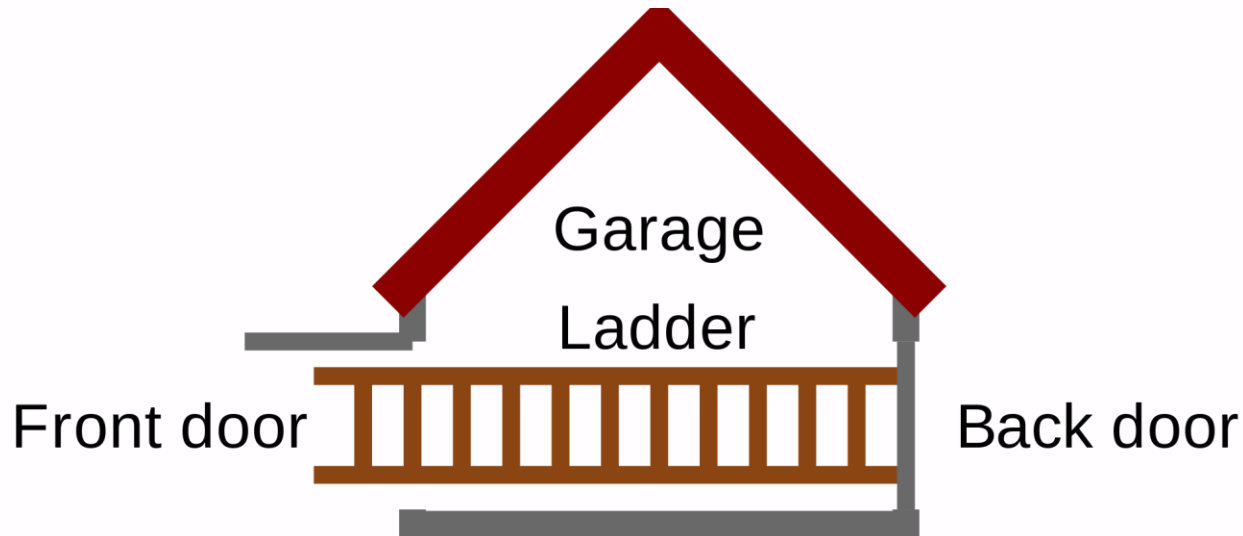
$$\begin{aligned} x_2' - x_1' &= \gamma (x_2 - x_1) - v\gamma (t_2 - t_1) \\ &= (t_2 - t_1) c^2 / v\gamma \end{aligned}$$

3. 동시성 simultaneity

$$\Delta t = (v\gamma/c^2) \Delta x'$$

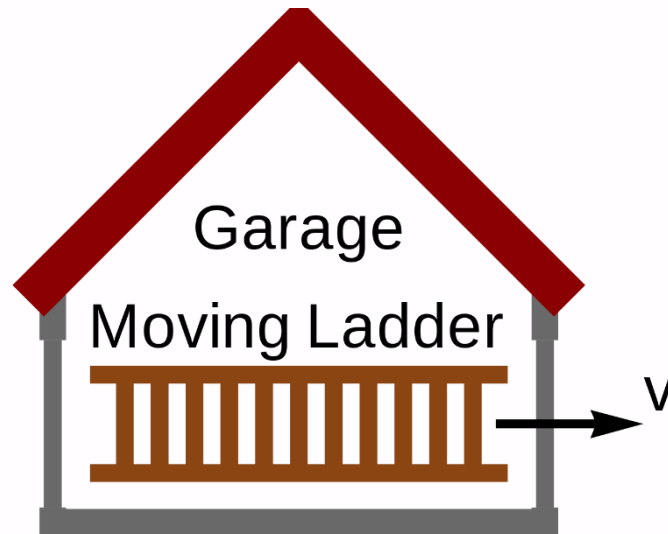
따라서 운동하는 관찰자의 동시성이
정지해 있는 관찰자의 동시성과 같지 않다.

사다리 역설?



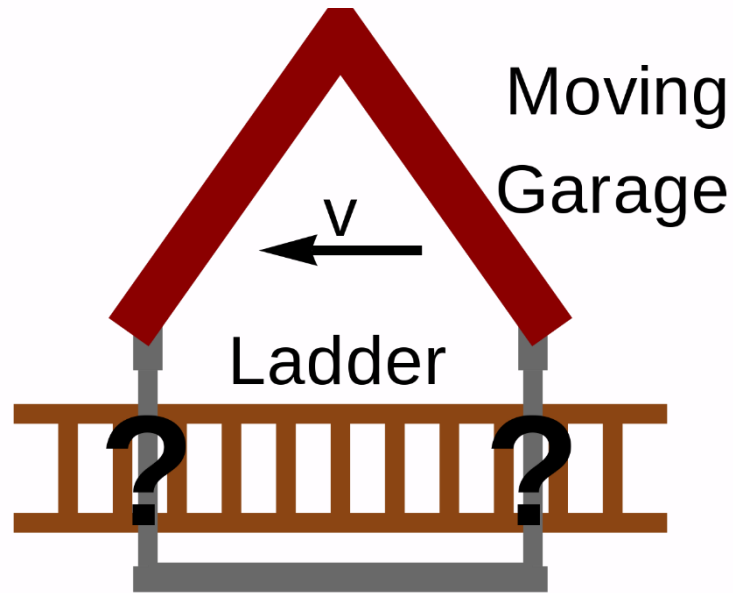
길이 L 인 창고에 L 보다 조금 긴 사다리가 빛의 속도에 가깝게 접근하고 있다.
사다리가 창고의 중심에 왔을 때 창고의 앞문과 뒷문을 잠깐 동안
동시에 닫을 수 있을까?

사다리 역설?



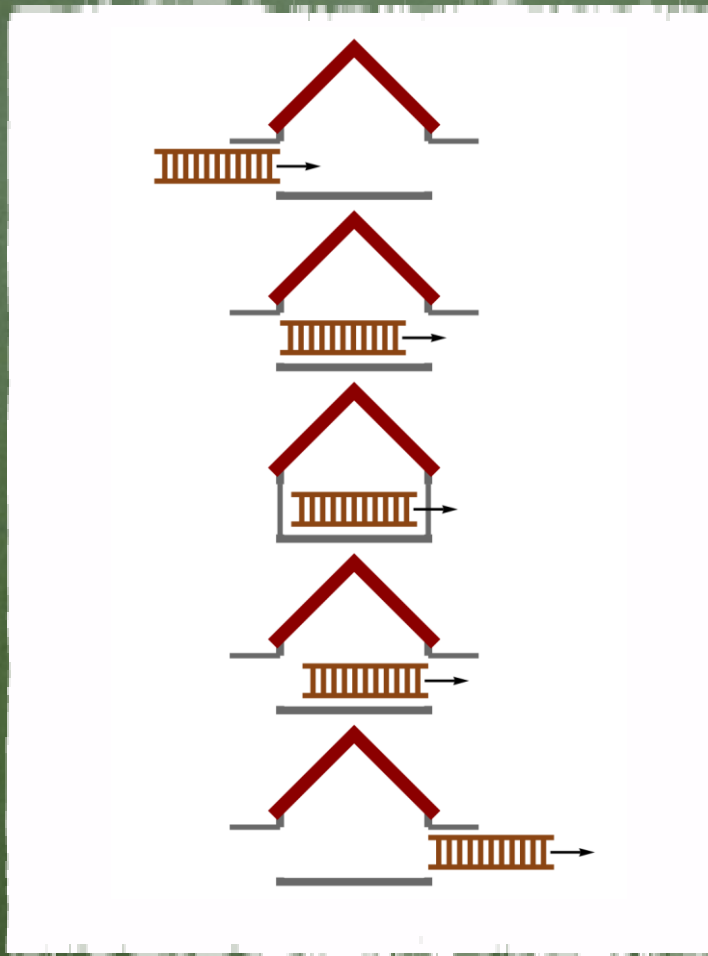
창고의 관점에서는, 로런츠 수축에 의해 사다리의 길이가 짧아지므로
다들 수 있는 것 같다.

사다리 역설?



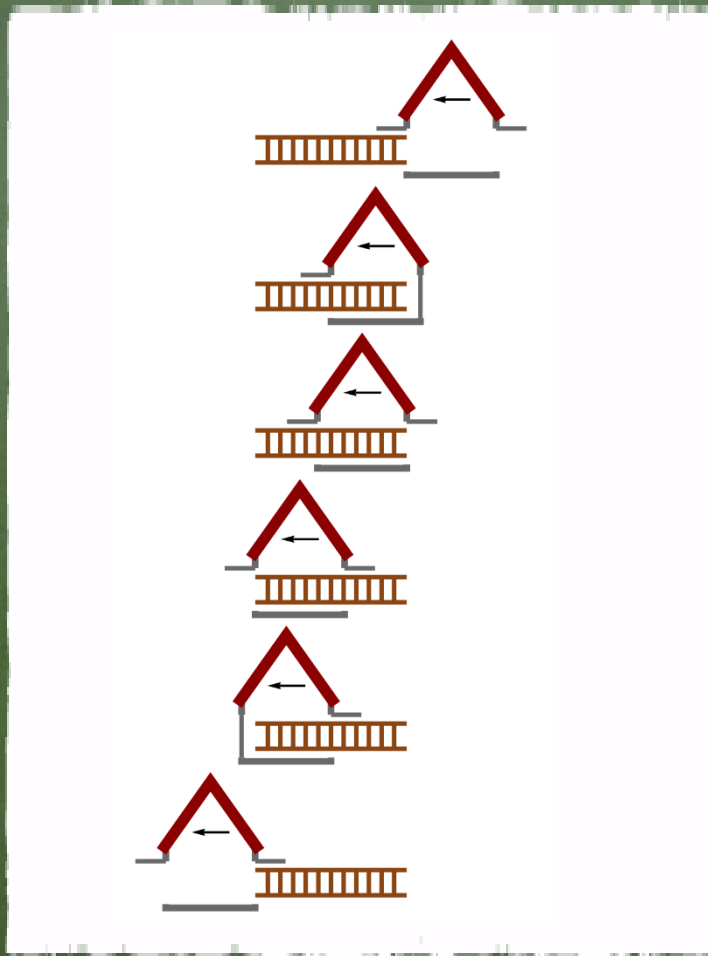
그러나 사다리의 관점에서는, 창고의 길이가 수축하므로 담을 수 없어야 한다?

사다리 역설?



정지해 있는 관찰자의 관점에서는
로렌츠 수축에 의해 길이가 짧아지므로
통과할 수 있다.

사다리 역식열?



움직이는 관찰자의 관점에서는
앞문을 닫는 사건과 뒷문을 닫는 사건이
동시에 일어나지 않기 때문에
충돌하지 않고 통과할 수 있다.

4. 속도합성

로런츠 변환의 행렬을 $L(v)$ 및 $L(u)$ 라 하면,

$L(v)L(u) = L(w)$ 와 같이 하나의 행렬로 다시 쓸 수 있고,

이 때 합성된 속도 w 는 다음과 같다.

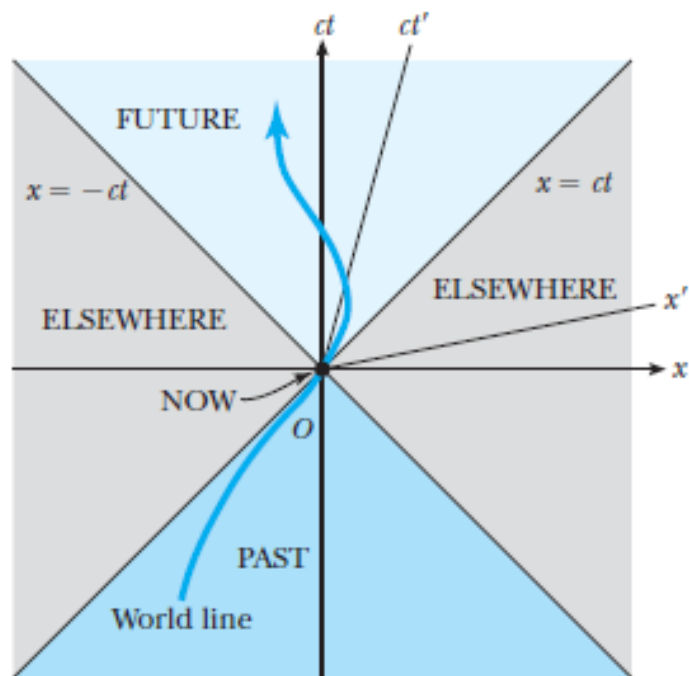
$$w = \frac{v + u}{1 + uv/c^2}$$

4. 속도합성

따라서 속도가 느린 경우에는 $w = v + u$ 가 되고,
합성된 속도는 어떤 경우에도 c 보다 작게 된다.

$$w = \frac{v + u}{1 + uv/c^2}$$

시공간과 인과구조

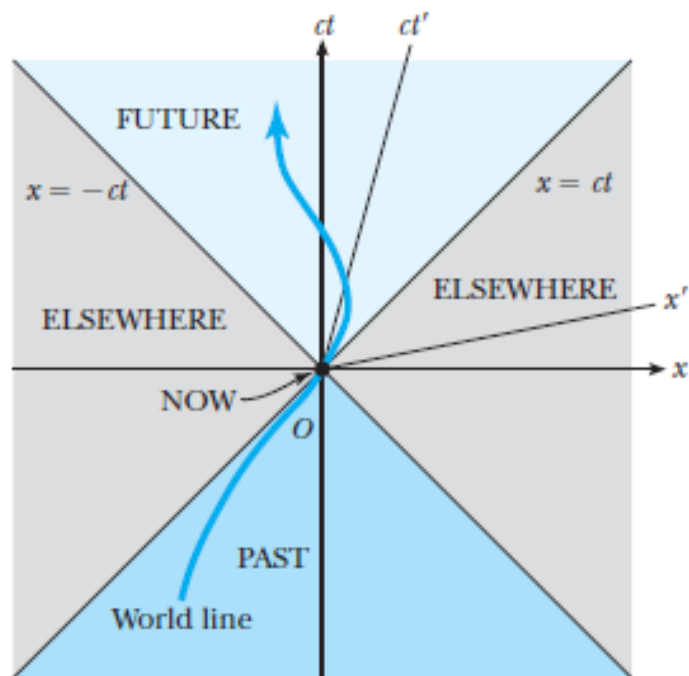


상대성 이론에서는 시간과 공간이
함께 변한다.

따라서 시간과 공간을 함께 다루는
세계선 world line 을 통해

인과 구조를 좀 더 정확히 이해할 수 있다.

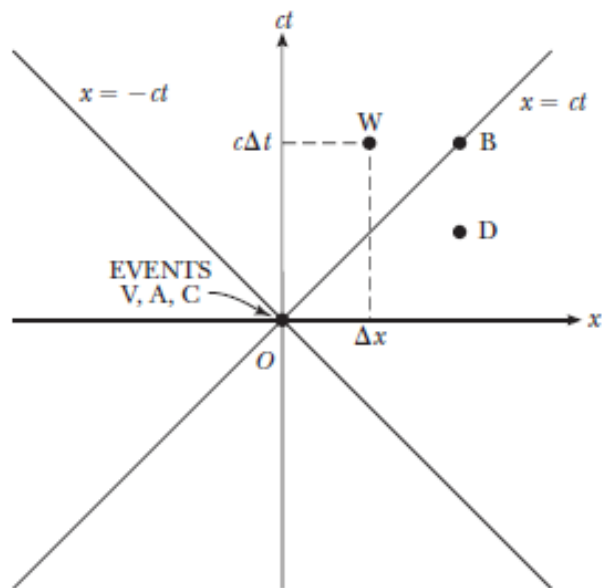
시공간과 인과구조



빛은 언제나 **45도 선**을 따라 진행하고,
이 빛의 속도는 관성좌표계의 선택에
의존하지 않는다.

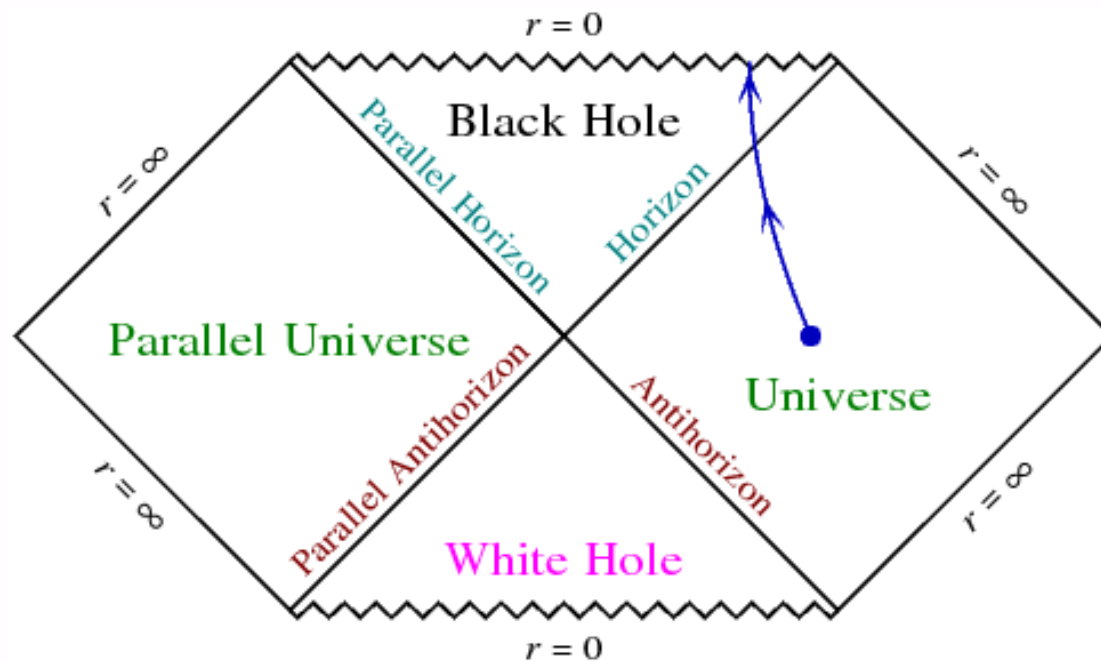
모든 세계선의 접선(속도)은 45도인 **원뿔**
안쪽에 있어야 한다.

시공간과 인과구조



한 편, 이것으로부터
시공간의 어떤 두 사건이
인과적으로 연관될 수 있는지,
또는 연관될 수 없는지에 대한
이해가 가능하게 된다.

사건 지평선



5. 상대론적 운동량

상대론적으로 운동하는 입자의 경우

시간은 고유시간 $\Delta t'$ 로 측정을 하지만

공간은 정지된 좌표계를 기준으로 Δx 를 거슬러 간다.

따라서 상대론적 운동량은 다음과 같다.

$$p = m \frac{\Delta x}{\Delta t'} = \gamma m v$$

6. 상대론적 에너지

$F = dp/dt$ 로 잡을 수 있다.

양 변에 v^2 를 곱하고 dt 로 적분하면 운동에너지 T 를 얻는데,
이 값은 다음과 같다.

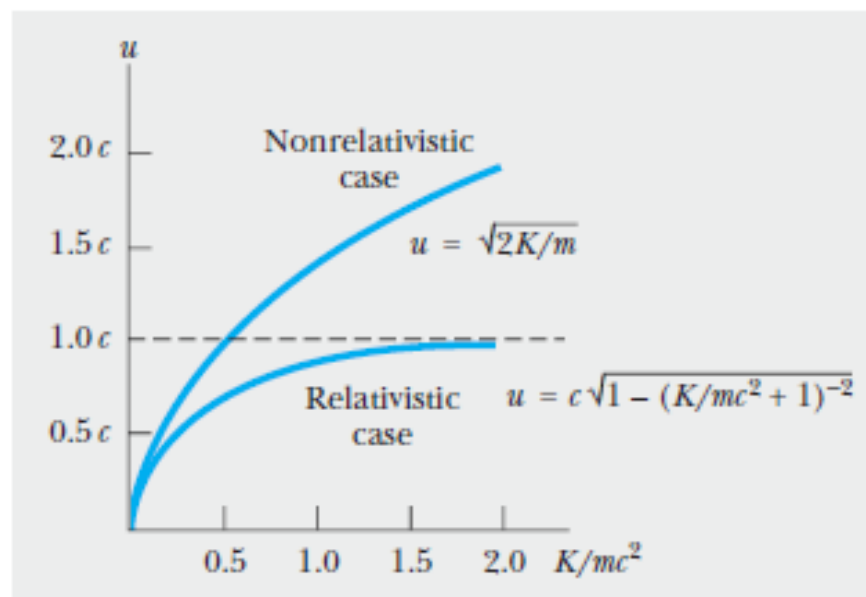
$$T = (\gamma - 1) mc^2$$

6. 상대론적 에너지

이 식을 테일러 전개해서 속도가 작은 경우를 고려하면
뉴턴 역학에서와 같이 $T = (1/2) mv^2$ 을 얻을 수 있다.

$$T = (\gamma - 1) mc^2$$

6. 상대론적 에너지



질량-에너지 등가



6. 상대론적 에너지

그리고 정지 에너지를 mc^2 이라고 정의하면
상대론적 역학적 에너지의 총량 E 는 다음과 같다.

$$E = \gamma mc^2$$

6. 상대론적 에너지

이와 관련해 다음과 같은 관계식을 얻을 수 있다.

$$E^2 = (mc^2)^2 + (pc)^2$$

6. 상대론적 에너지

또는 다음과 같이 정리된다.

$$E^2 - (pc)^2 = (mc^2)^2$$

6. 상대론적 에너지

이 식은 운동량과 에너지를 다음과 같은 **벡터**

$(p_x, p_y, p_z, iE/c)$

로 적을 때, 이 벡터도 로런츠 변환에 의해 **공변**한다는 것을 의미한다.

$$E^2 - (pc)^2 = (mc^2)^2$$

6. 상대론적 에너지

운동하는 관찰자가 운동량과 에너지를 측정하면 로런츠 변환에 의해

$$p_x' = \gamma p_x - \gamma v E / c^2$$

$$p_y' = p_y$$

$$E' = -v \gamma p_x + \gamma E$$

을 얻는다.

6. 상대론적 에너지

운동하는 관찰자가 운동량과 에너지를 측정하면 로런츠 변환에 의해

$$p_x' = \gamma p_x - \gamma v E / c^2$$

$$p_y' = p_y$$

$$E' = -v \gamma p_x + \gamma E$$

을 얻는다.

한편, 광자의 운동량과 에너지는 각각

$$p = hf/c$$

$$E = hf$$

와 같이 주어진다.

7. 상대론적 도플러 효과

따라서 식을 정리하면 속도 v 로 **멀어지는 관찰자**가
같은 방향으로 오는 빛을 측정한 진동수 f' 는
고유 진동수 f 에 대해 다음과 같이 변한다.

$$f' = f \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}$$

7. 상대론적 도플러 효과

이 효과는 속도가 느린 경우 고전적인 결과와 일치한다.

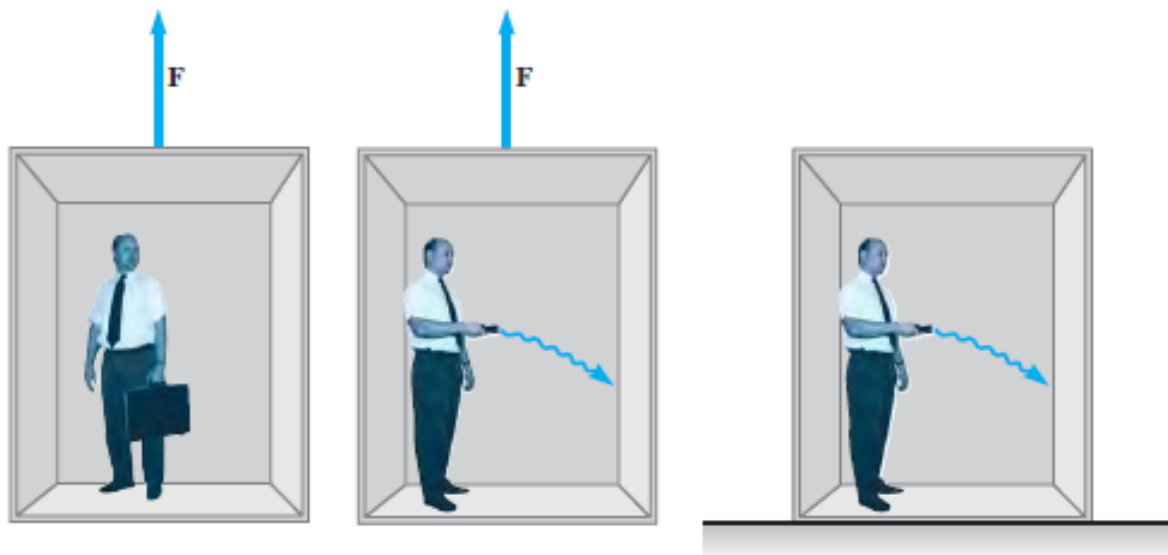
$$f' = f \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}$$

다시 한번 공의현성에 대한 질문으로



자연 법칙이 조판의 선택에 의존해서는 안된다면
이것은 관성조판기 뿐만 아니라
비관성 조판기에도 적용되어야 한다.

아인슈타인의 행복한 생각



가속 운동과 중력은 서로 구분할 수 없다. (등가원리 equivalence principle)

다시 한번 공연성에 대한 질문으로



비관성 조판기

|| 일반적 공연성

가속도

다시 한번 공의현성에 대한 질문으로



비관성 조판기

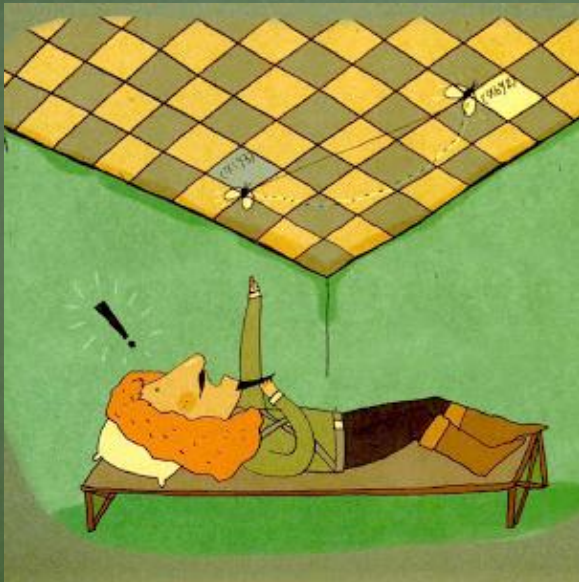
|| 일반적 공의현성

가속도

|| 등가원리

중력

다시 한번 공의현성에 대한 질문으로



비관성 조판기

|| 일반적 공의현성

가속도

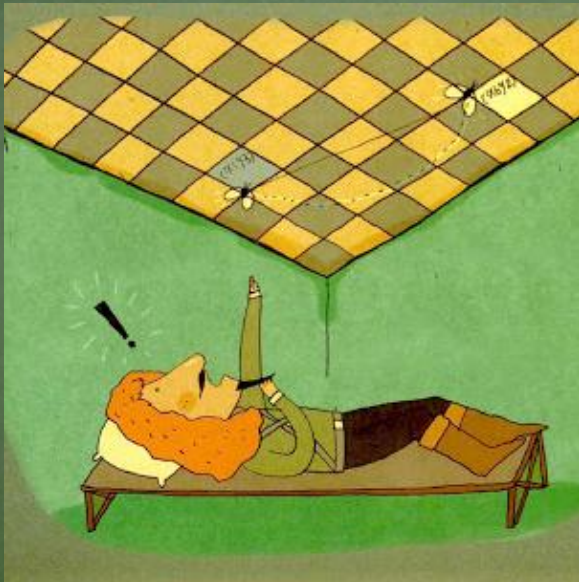
=

(곡선의) 곡률

|| 등가원리

중력

다시 한번 공연성에 대한 질문으로



비관성 조판기

|| 일반적 공연성

가속도

=

(곡선의) 곡률

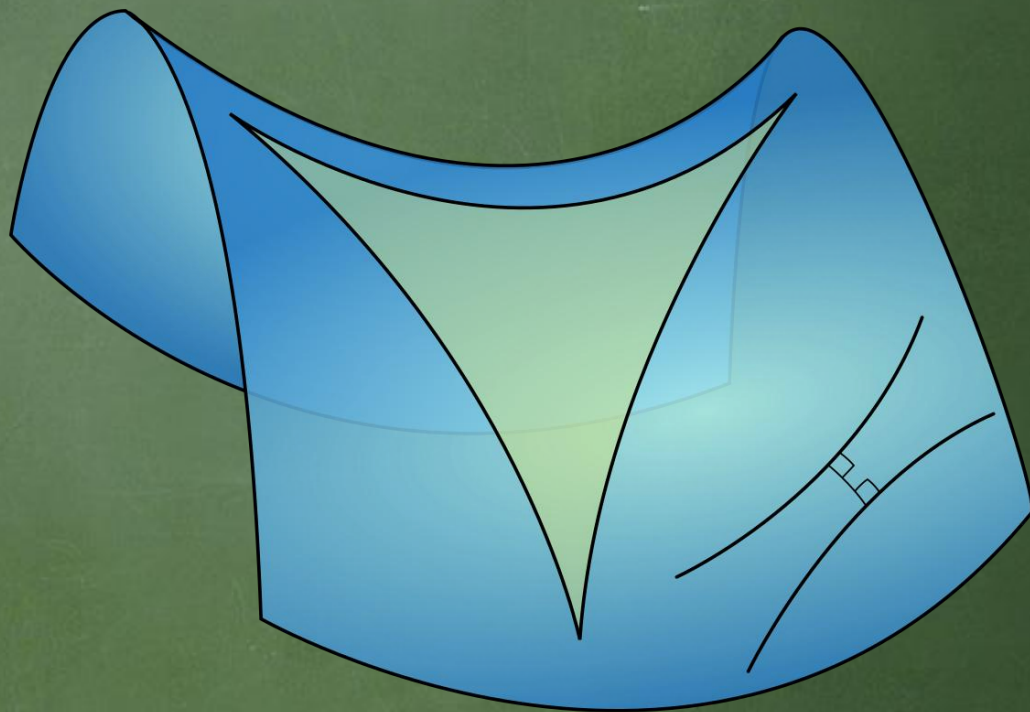
|| 등가원리

중력

==

따라서 중력은
시공간의 곡률로 표현된다?

일반 상대성 이론의 중심 교리



시공간은 리만 다양체 Riemannian manifold 이다.

여기에서 곡률을 구하는 방법을 빌려올 수 있다.

일반 상대성 이론의 두 가지 방정식

장 방정식 field equation

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$$

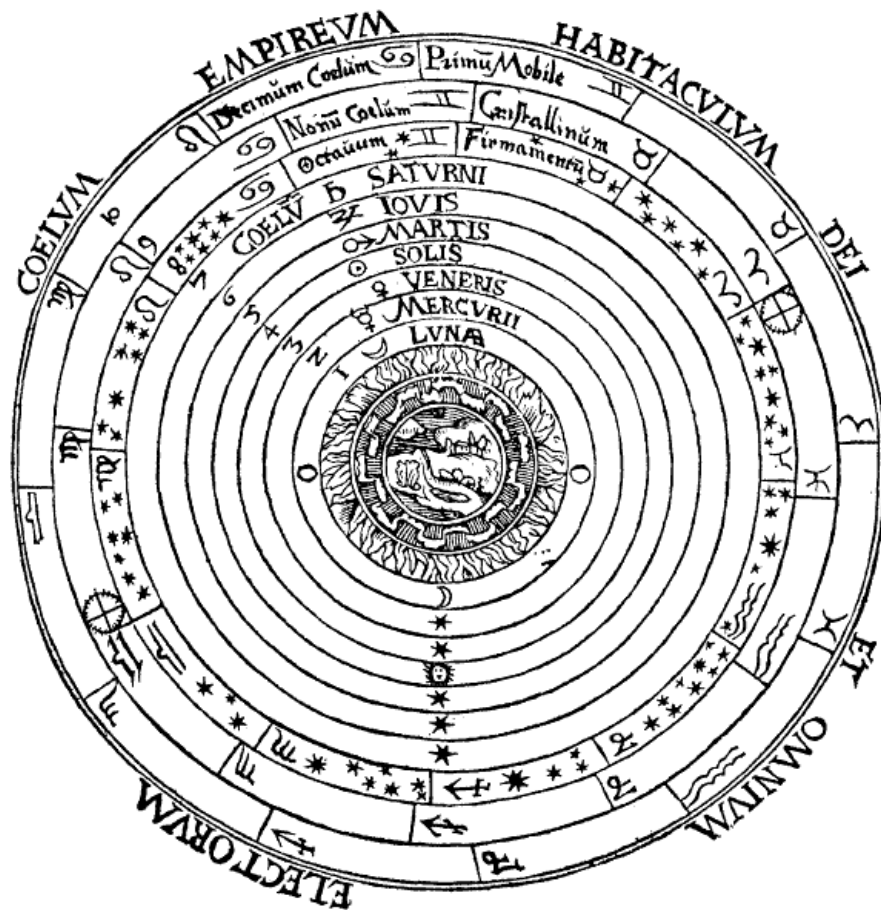
측지선 방정식 geodesic equation

$$\ddot{x}^{\mu} + \Gamma_{\nu\rho}^{\mu} \dot{x}^{\nu} \dot{x}^{\rho} = 0$$

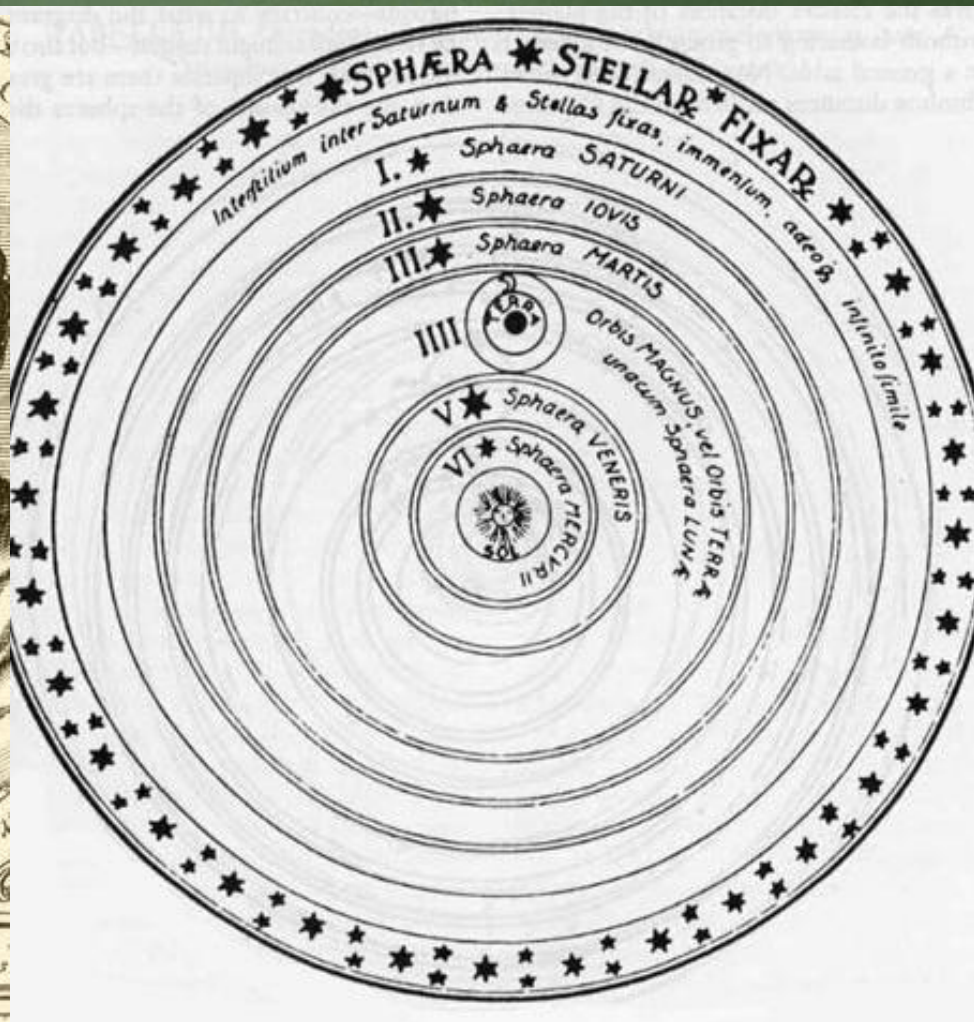
천체의 운동



Schema huius præmissæ diuisionis Sphærarum .



천체의 운동



티코 브라헤와 케플러



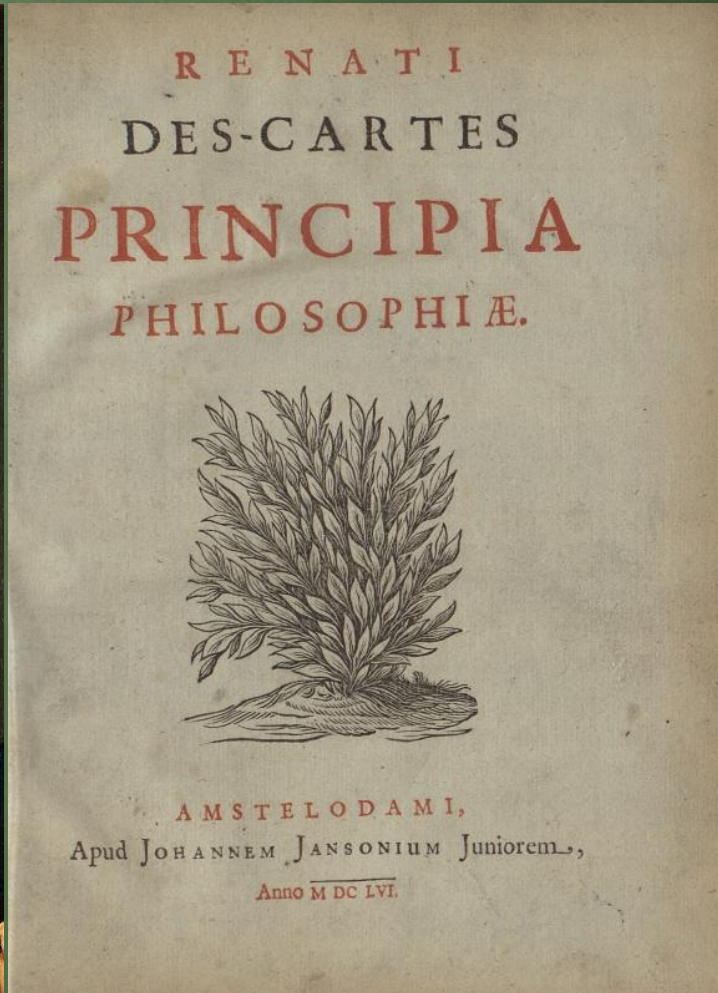
케플러의 세 가지 법칙

1. 모든 행성은 태양을 **초점**으로 하는 **타원궤도**로 움직인다.
2. 행성과 태양을 연결하는 선분이 쓸고 지나가는 **단위 시간당 면적**은 일정하다.
3. 행성 주기의 제곱은 행성 궤도 **장축**의 **세제곱**에 비례한다.

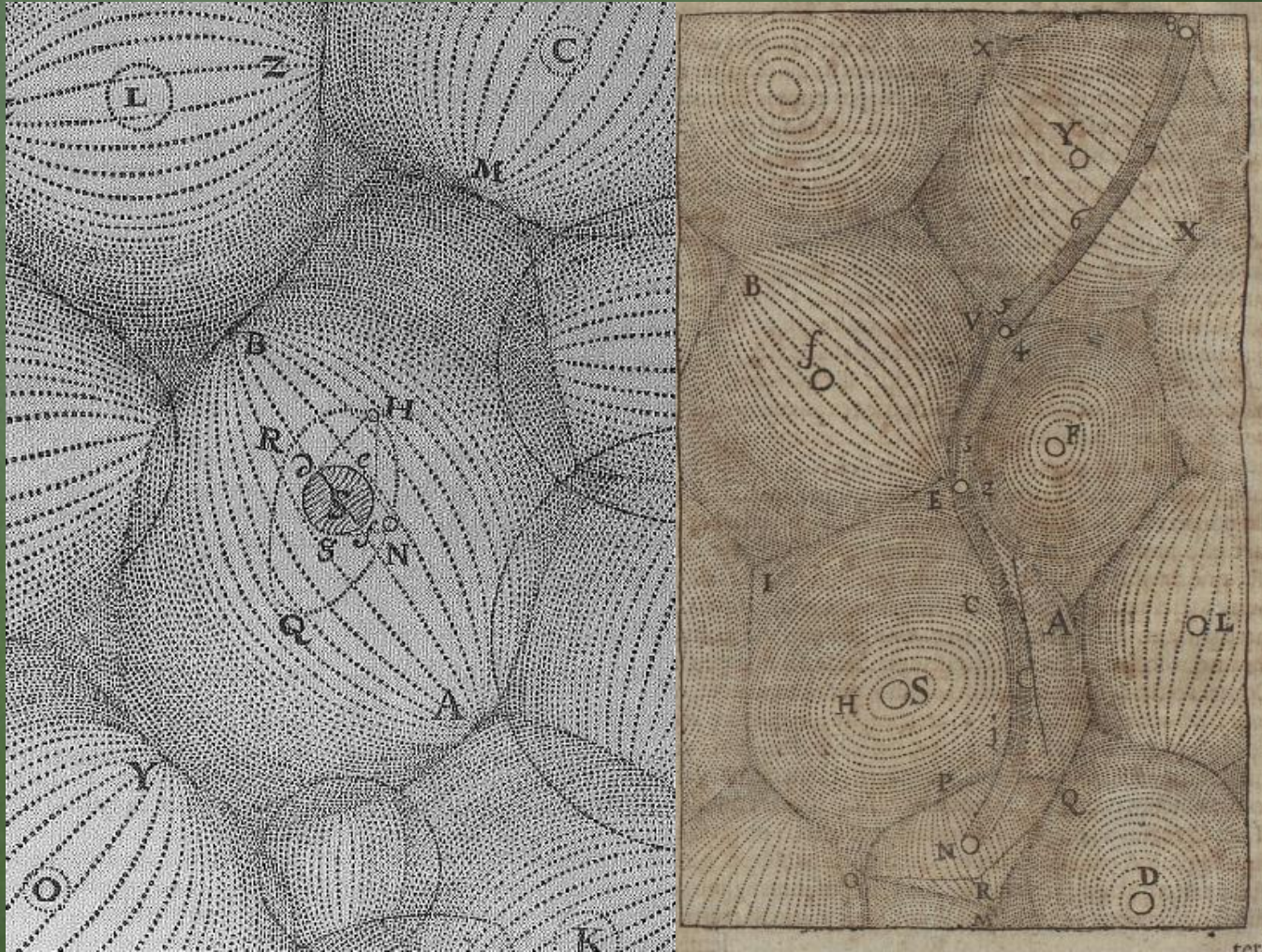
갈릴레이, 그래도 지구는 돈다?



천체가 회전하는 원인을 둘러싸고



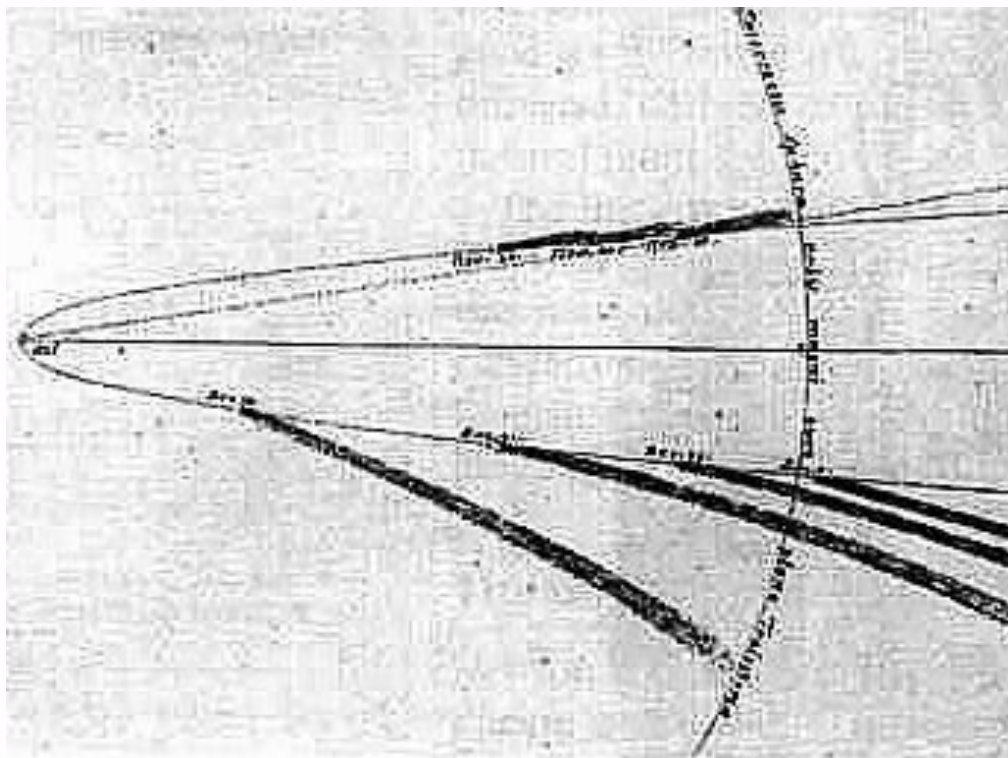
천체가 회전하는 원인을 둘러싸고



뉴턴의 중력법칙

$$F = \frac{\overset{\text{중력상수}}{G} \overset{\text{질량}}{M} m}{r^2}$$

혜성: 데카르트에 대한 반증?



데카르트 VS. 뉴턴

	데카르트	뉴턴
지동설 vs. 천동설	중립	지동설
공간/진공	공간/진공은 제3의 물질이 채우고 있음. 천체는 공간을 채우고 있는 물질들에 의해 운동함.	절대공간이 운동의 절대적 기준이 됨.
중력의 범위	물질들의 국소적 작용으로 설명할 수 있음.	원격작용을 필요로 함.

케플러의 법칙을 정량적으로 설명한 뉴턴이
역사적 승자로 평가됨.

데카르트와 아인슈타인

	데카르트	아인슈타인
지동설 vs. 천동설	중립	중립 (자연법칙은 좌표계의 설정에 무관함)
공간/진공	공간/진공은 제3의 물질이 채우고 있음. 천체는 공간을 채우고 있는 물질들에 의해 운동함.	공간/진공은 장이 채우고 있음. 장의 변화를 따라서 입자들이 운동함.
중력의 범위	물질들의 국소적 작용으로 설명할 수 있음.	물질들의 국소적 작용으로 설명할 수 있음.

중력을 국소적인 작용으로 설명하려고 한 데카르트의
관점이 오히려 아인슈타인에게 가깝다?

일반상대성이론의 증거

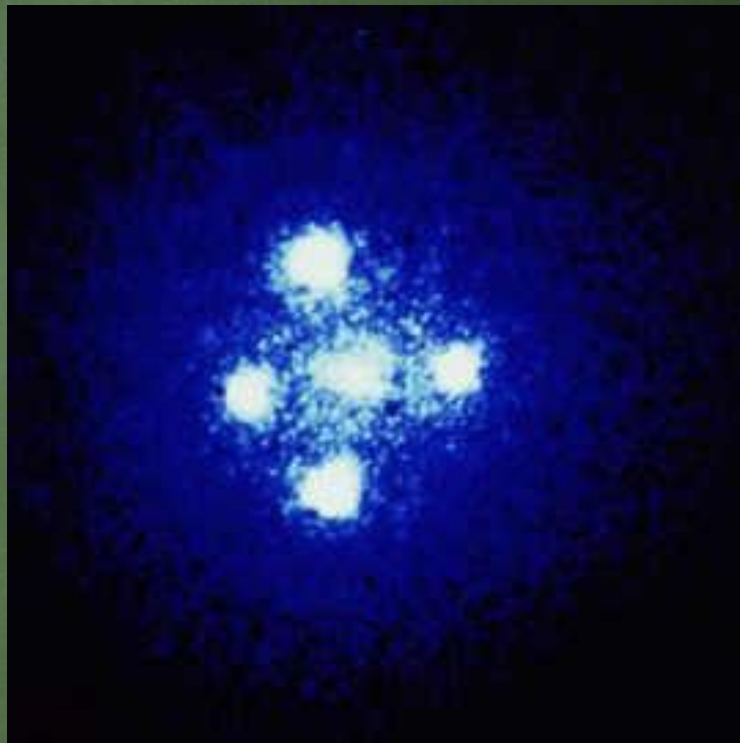
1. 수성의 근일점 이동

2. 중력 적색편이

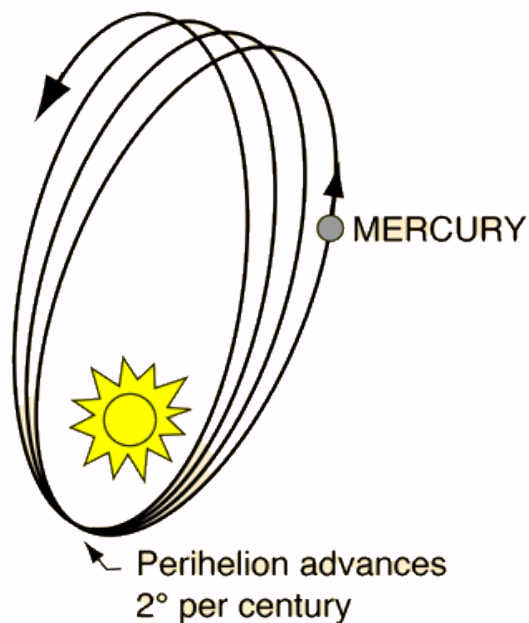
3. 빛의 굽어짐

4. 중력파

...

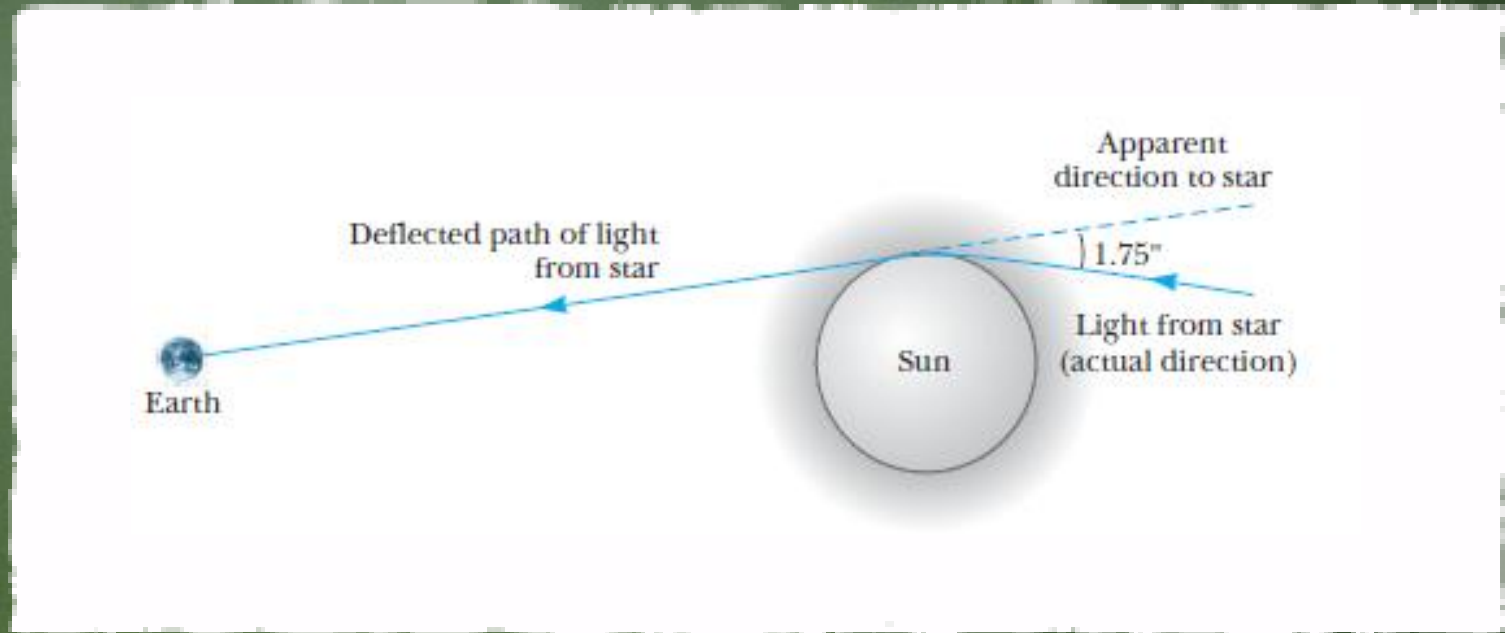


수성의 근일점 이동

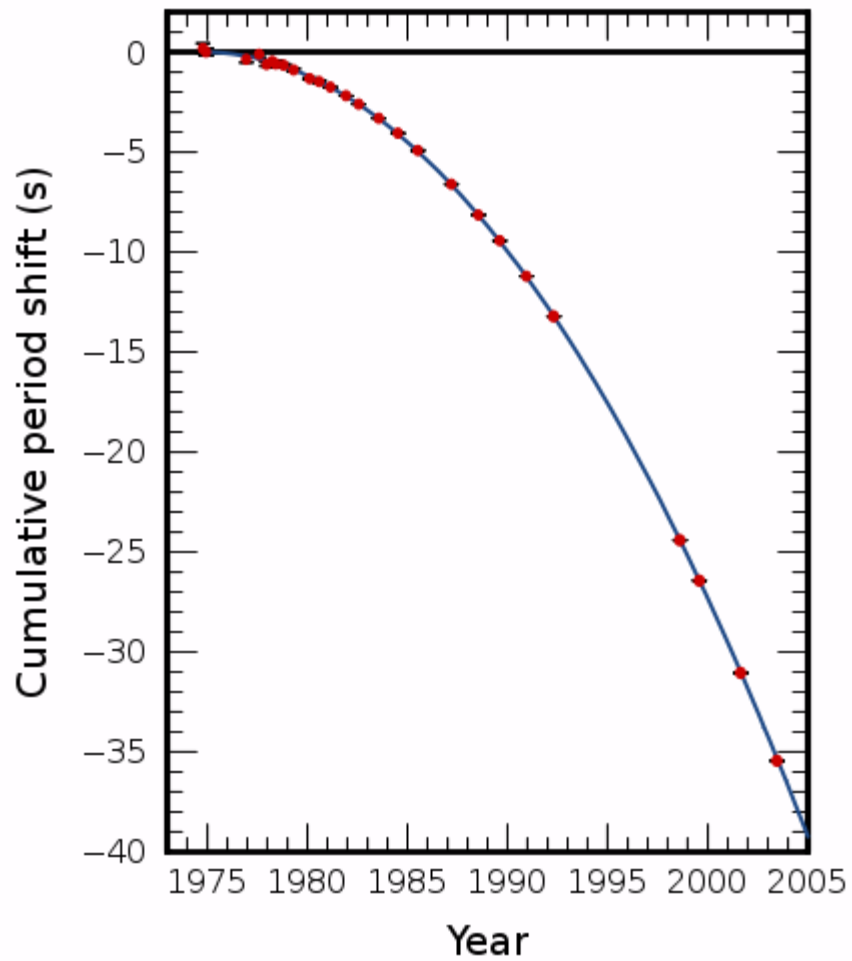


당시까지 뉴턴 역학으로 설명이 어려웠던
수성의 근일점 이동에 대해
일반상대성이론이 정량적인
설명을 제공해 주었다.

빛의 굴절



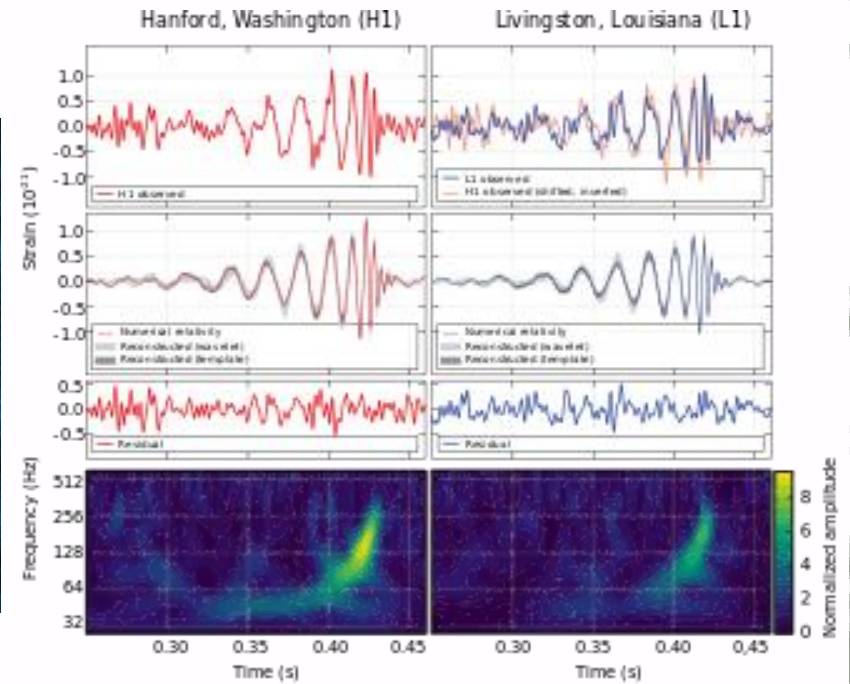
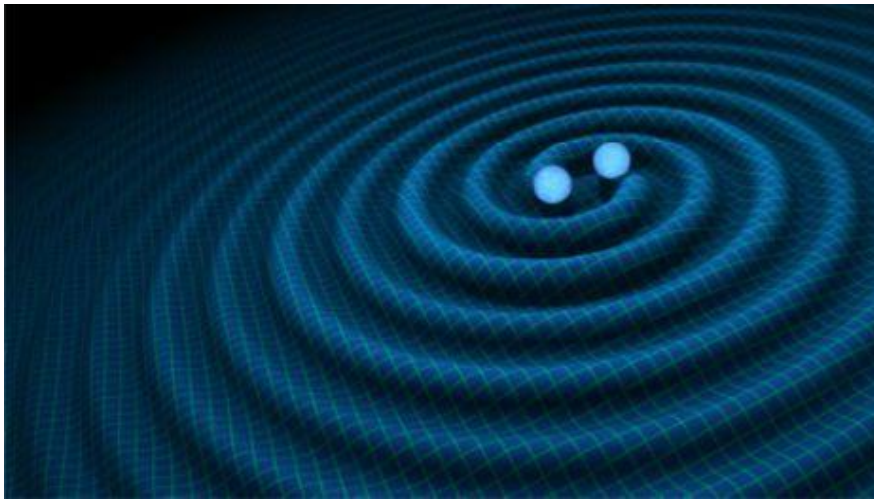
에딩턴은 빛의 굴절을 관측함으로써 아인슈타인의 예측을 검증해 주었다.



테일러-헐스 펄서



레이저 간섭계 중력파 관측소 (LIGO)



블랙홀 충돌에 의한 중력파의 방출이 검증됨 (2015년)