

3장 빛의 양자론



맥스웰 방정식

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = q/\epsilon_0$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

장의 면적분

장의 선적분

장(field)

원천(source)

맥스웰 방정식 (미분형식)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}$$

장의 div

장의 curl

장(field)

원천(source)

파동방정식 (원천이 없을 때)

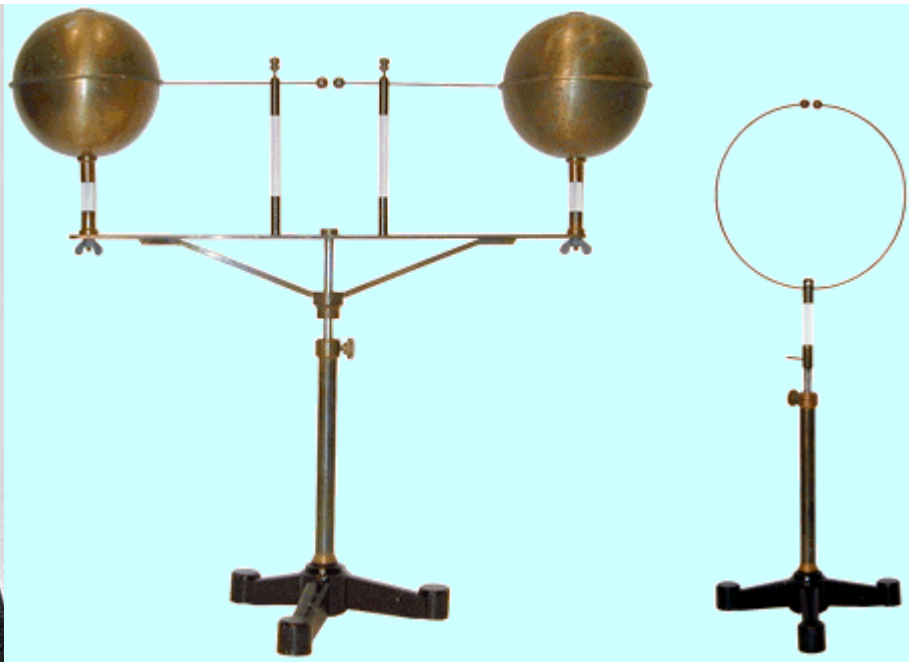
$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} = 0$$

$$\nabla^2 \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{B} = 0$$

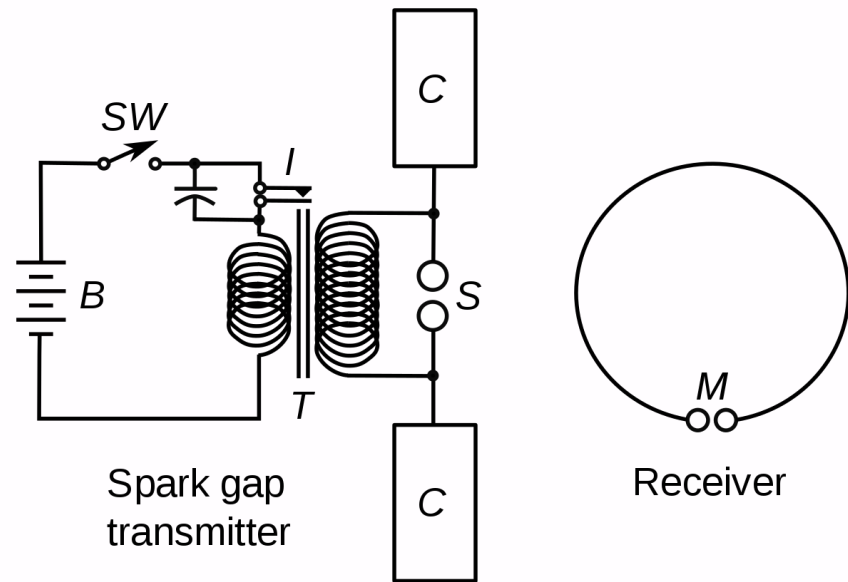
전자기파의 속도는

$v = (\mu_0 \epsilon_0)^{-1/2}$ 으로 주어진다. 이것은 **빛의 속도**와 같다.

헤르츠의 실험

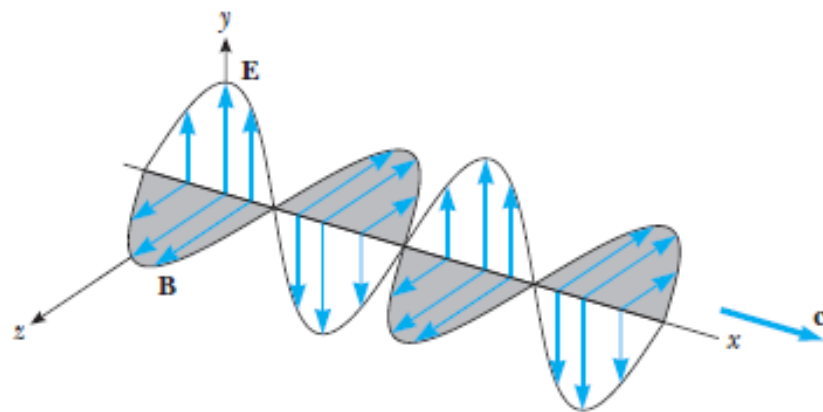


헤르츠의 실험



헤르츠의 **발진기**는 스파크 갭에 의해 전기 진동을 발생시킨다.
이것이 전자기파의 형태로 전달되어 수신기에서 감지되었다.

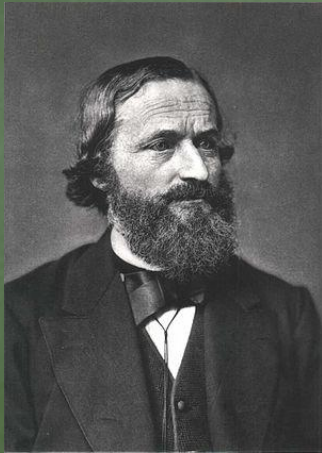
전자기파



따라서 빛은 파동이다.

그러나 ... ?

흑체 복사



$$e_f = J(f, T) A_f$$

키르히호프는 주어진 진동수 f 에 대해 복사와 열적 평형인 상태에서 물체의 **방출률**과 **흡수률**은 위와 같은 관계를 가진다는 것을 보였다.

흑체 복사

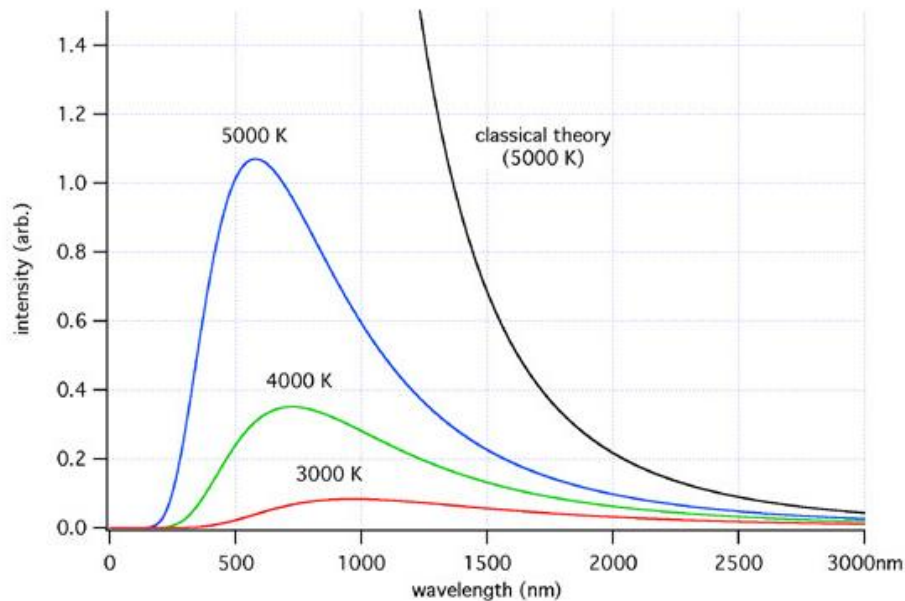
$$e_f = J(f, T)$$

특히 모든 복사 에너지를 흡수할 경우,
동시에 이 물체는 가장 이상적인 방출체가 된다.
이러한 경우 이 물체를 **흑체 black body** 라고 한다.

흑체 복사

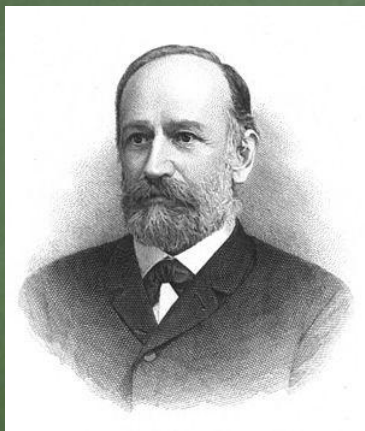


흑체 복사



흑체가 복사하는 에너지 밀도의 분포

슈테판-볼츠만 법칙



$$e_{\text{total}} = \int_0^{\infty} e_f df = \sigma T^4$$

슈테판은 흑체의 경우 방출되는 단위 면적당 전체 열량은 온도의 네 제곱에 비례함을 실험적으로 보았다. 이 식은 후에 볼츠만에 의해서 이론적으로 유도되었다.

이 때의 비례상수를 슈테판-볼츠만 상수라고 한다.

빈의 법칙



$$\lambda_{\max} T = 2.898 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$$

빈은 주어진 온도에서 **최대 일률을 나타내는 파장**의 관계가 다음과 같음을 발견하였다. 이것을 빈의 **변위 법칙** 이라고 한다.

빈의 법칙

$$J(f, T) = u(f, T) c/4$$

빈은 더 나아가서 흑체의 복사를 결정하는

단위 진동수 및 단위 면적당 방출 일률이

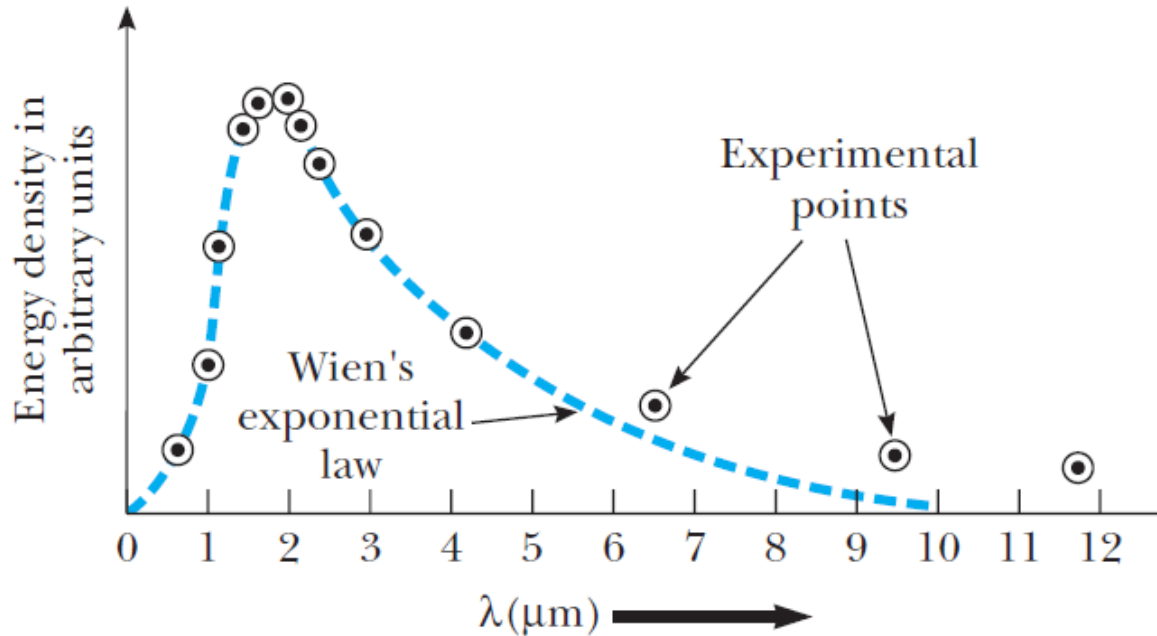
흑체 공동 내의 복사 스펙트럼 에너지 밀도와 위와 같은 관계식을
가진다는 것을 보였다.

빈의 법칙

$$u(f, T) = Af^3 e^{-\beta f/T}$$

여기에서 그는 에너지 밀도가 위와 같은 형태를 가질 것이라고 추측하였다.
이것을 빈의 **지수 법칙**이라고 한다.

빈의 법칙



빈의 지수 법칙은 파장이 긴 영역에서는 실험결과와 잘 맞지 않았다.
따라서 여기에 대한 보완적인 기술이 필요하다. (적외선 파탄)

레이일리-진스의 법칙

$$u(f, T) df = \bar{E} N(f) df$$

다른 한 편, 레이일리와 진스는 고전 물리학의 범위에서 흑체복사를 설명하기 위해 고전적인 진동자를 사용해서 에너지 밀도를 계산하였다.

레이일리-진스의 법칙

$$\bar{E} = \frac{\sum E \cdot P(E)}{\sum P(E)} \quad N(f) df = \frac{8\pi f^2}{c^3} df$$

여기에서 진동자의 평균 에너지와 단위 부피당 진동자의 수는
위와 같이 계산된다.

레이일리-진스의 법칙

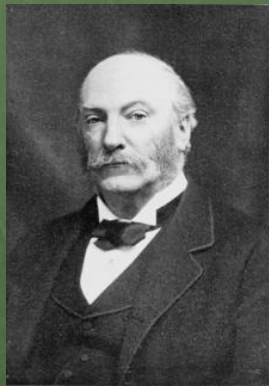
$$\bar{E} = \frac{\int_0^{\infty} E e^{-E/k_B T} dE}{\int_0^{\infty} e^{-E/k_B T} dE} = k_B T$$

레이일리와 진스는 진동자가 **볼츠만 분포**를 따른다는 가정으로부터 위와 같은 에너지의 기대값을 얻었다.

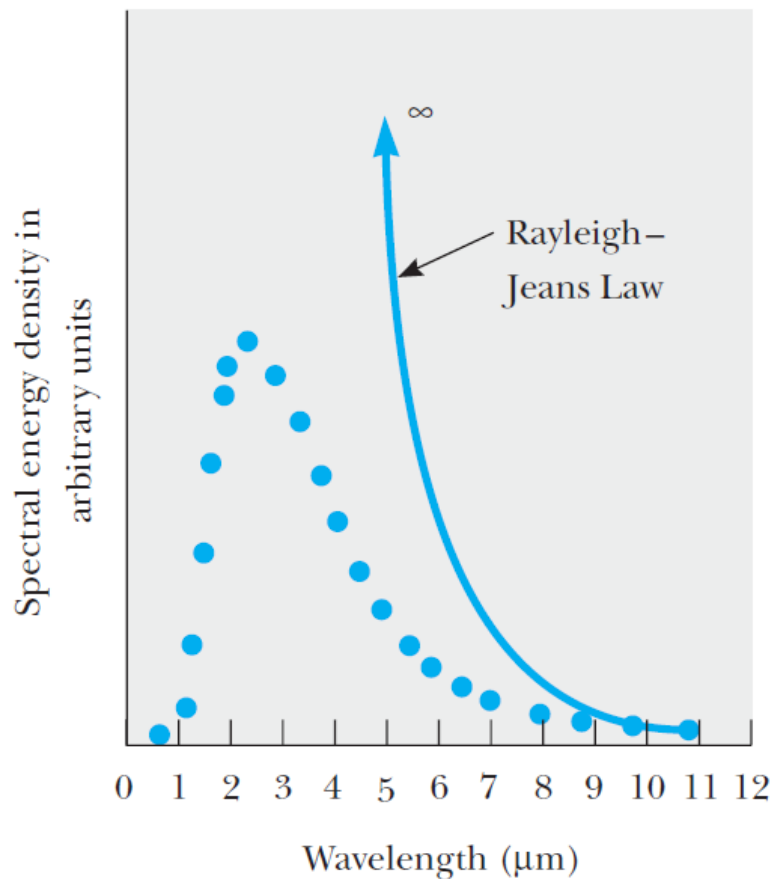
레이일리-진스의 법칙

$$u(\lambda, T) d\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4} k_B T d\lambda$$

그러면 위의 관계식을 얻는다 (레이일리-진스 법칙).



레이일리-진스의 법칙



그러나 이 법칙은
짧은 파장의 영역에서
잘 맞지 않게 된다.
(자외선 파탄)

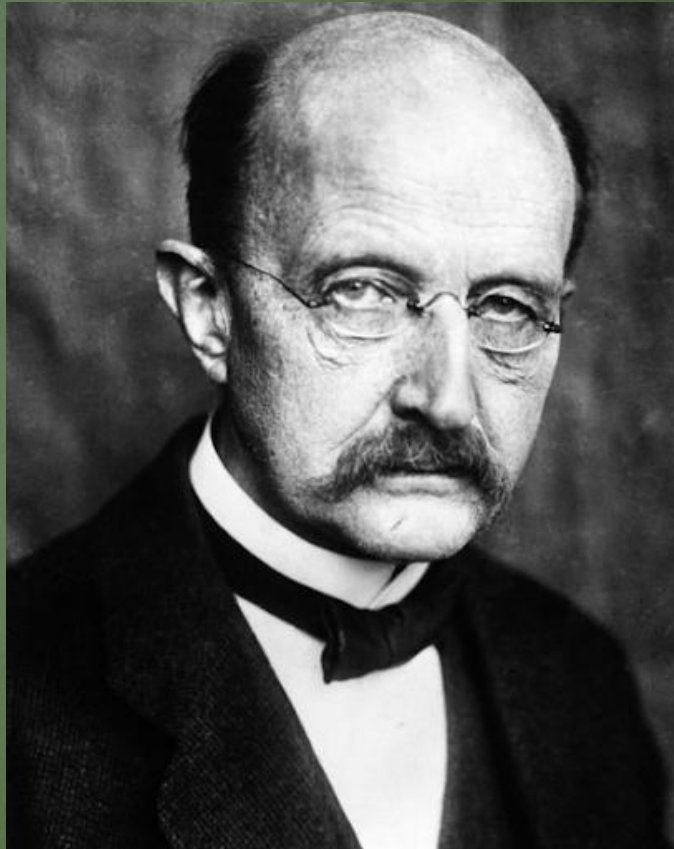
플랑크의 흑체 복사 법칙

$$u(f, T) = \frac{8\pi hf^3}{c^3} \left(\frac{1}{e^{hf/k_B T} - 1} \right)$$

플랑크는 1900년 10월 어느 일요일 초저녁에,

우연히 적외선 파탄과 자외선 파탄을 모두 해결할 수 있는

올바른 흑체 복사의 공식을 발견하였다.



막스 플랑크



플랑크의 흑체 복사 법칙

$$u(f, T) = \frac{8\pi f^2}{c^3} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n h f e^{-n h f / k T}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n h f / k T}}$$

같은 식을 위와 같이 바꾸면

이것은 $E_n = n h f$ 로 양자화된 광자들이

보스만 인자만큼의 확률을 가질 때

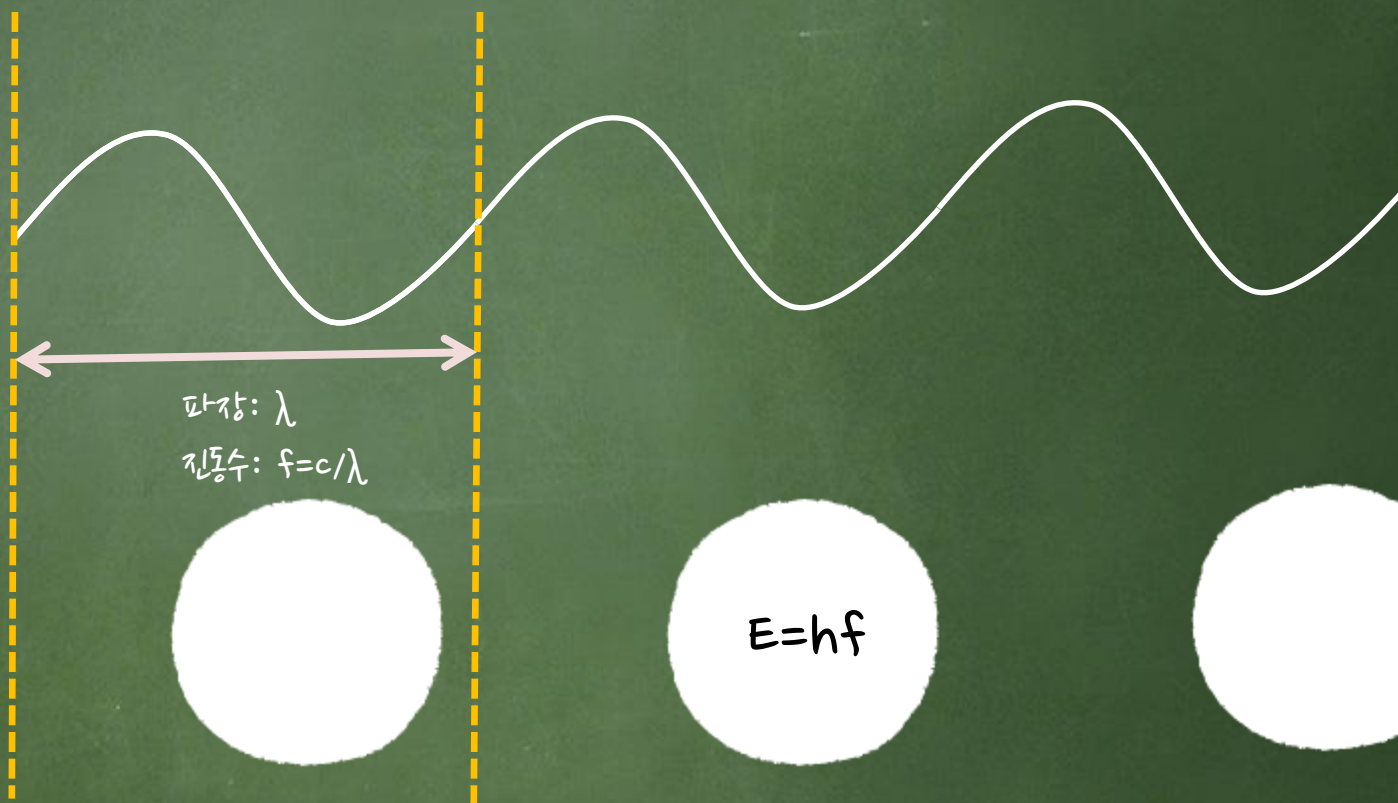
이에 대한 에너지의 기대값 $\langle E_n \rangle$ 으로 해석된다.

슈테판-볼츠만 법칙

$$P = \frac{c}{4} A \int_0^{\infty} df u(f, T) = aAT^4$$

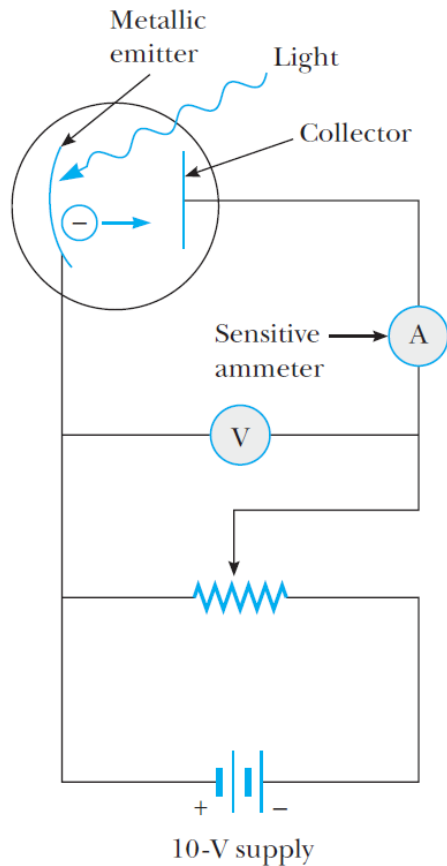
슈테판-볼츠만 법칙을 다시 유도할 수 있다.

광전효과



빛의 입자성은 **광전효과**에 의해 좀 더 확실하게 받아들여졌다.

광전효과

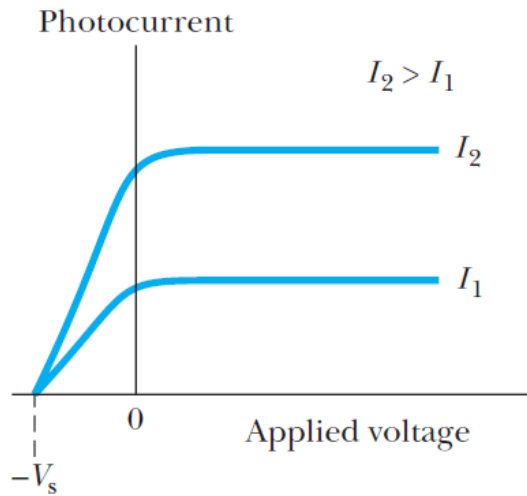


헤르츠는 금속에 빛을 쬔을 때
전자가 방출된다는 것을 발견하였다.

레나르트는 광전효과 실험장치를 사용해서
빛의 진동수 및 세기를 바꿔 가면서
광전류를 흐르지 않도록 하는
최대 전압이 어떠한지를 살펴볼 수 있었다.

광전효과

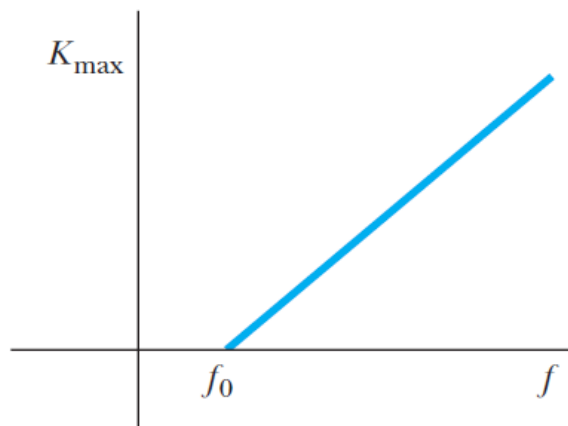
$$K_{\max} = \frac{1}{2}m_e v_{\max}^2 = eV_s$$



먼저 진동수가 일정한 경우
광전자의 최대 운동 에너지는
빛의 세기에 무관하다는 것을 발견했다.

광전효과

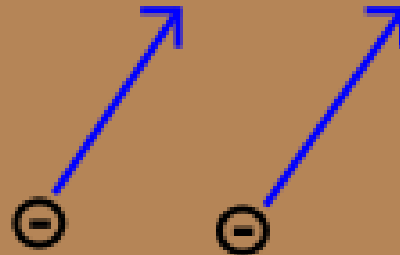
$$K_{\max} = \frac{1}{2}m_e v_{\max}^2 = eV_s$$



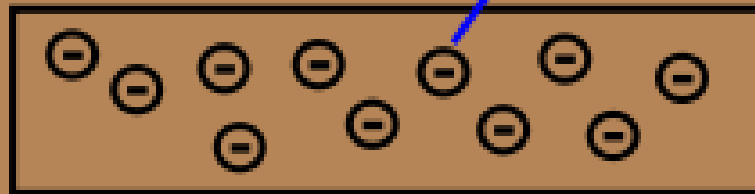
한편, 진동수를 바꿔가면서
최대 운동 에너지를 살펴보면
어떤 임계 진동수보다 커지면
비례 관계가 갖는 것을 발견할 수 있다.

광전효과

f보다 진동수가 작으면
전자를 방출하지 않는다.

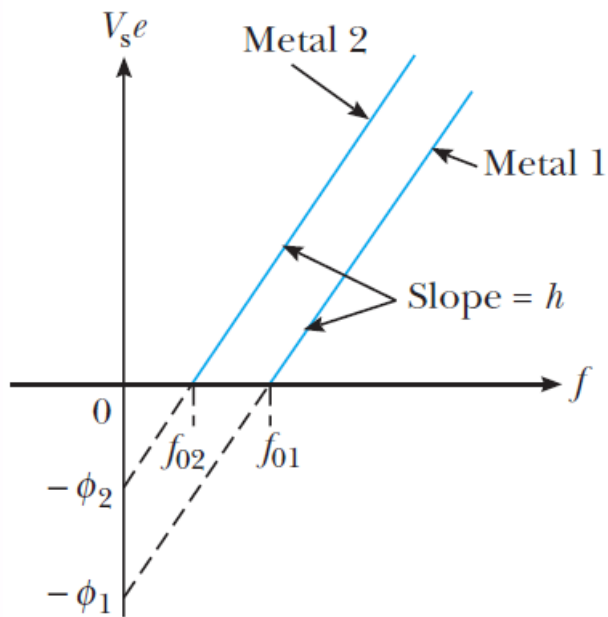


f보다 진동수가 크면,
전자를 방출시키는데 에너지를 소모하고
나머지는 운동에너지로 거슬러준다.



광전효과

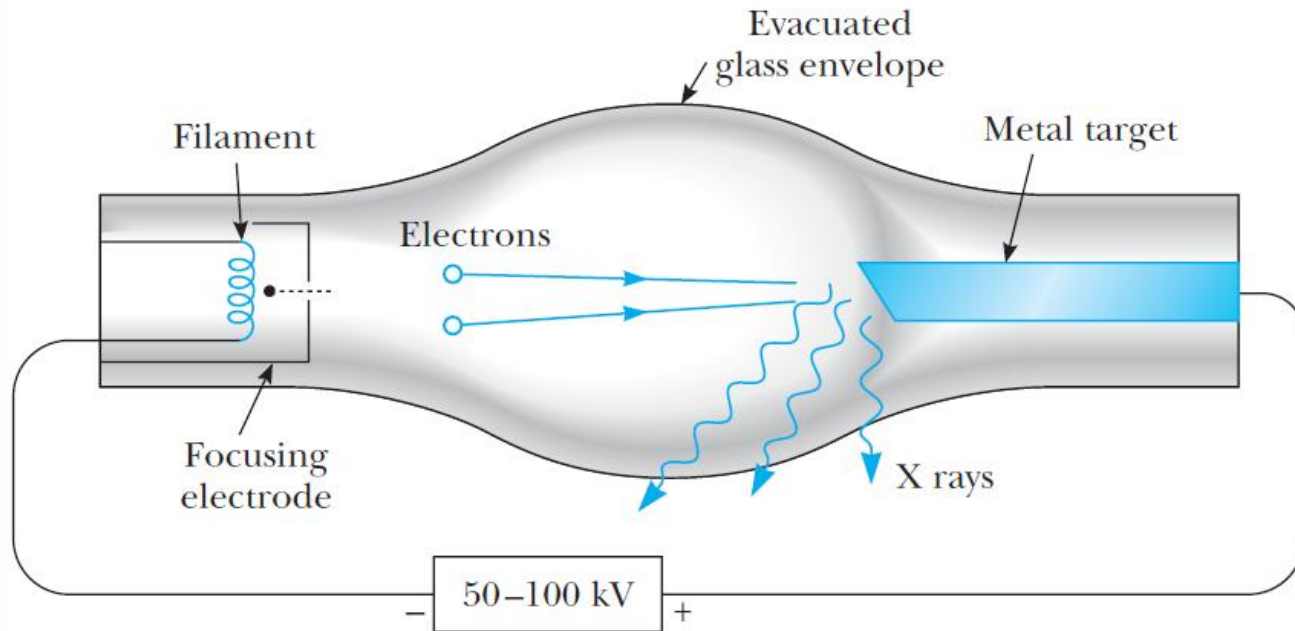
$$V_{se} = hf - \phi$$



아인슈타인은 빛의 양자화를 가정하고
방출되는 전자의 에너지를
광자의 에너지와 일함수의 차이로 설명하였다.

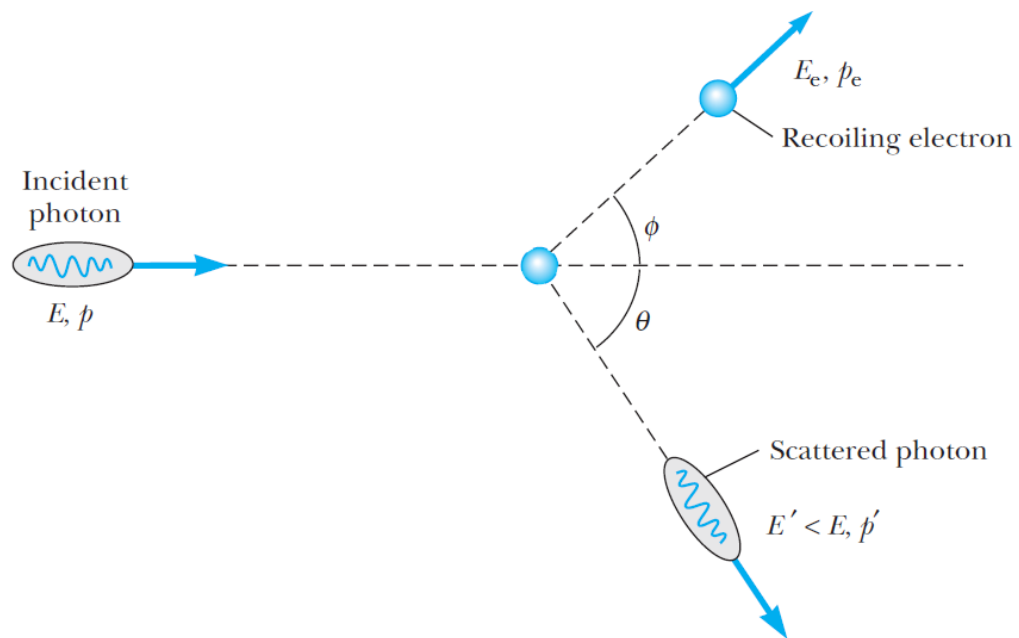
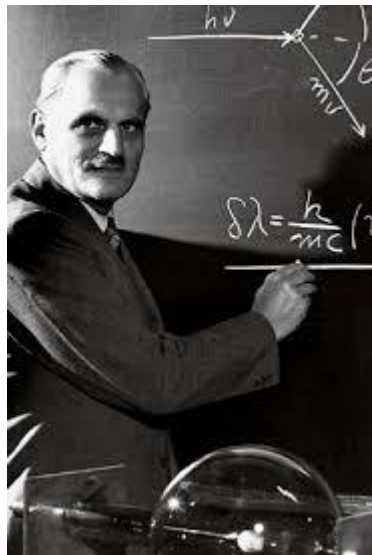
이 때, 진동수와 방출되는 에너지 사이의 기울기는
플랑크 상수가 된다.

X-선과 콤프턴 산란 실험



로트겐은 금속 표적에 전자를 때릴 때
X-선이 방출되는 것을 발견하였다.

X-선과 콤프턴 산란 실험



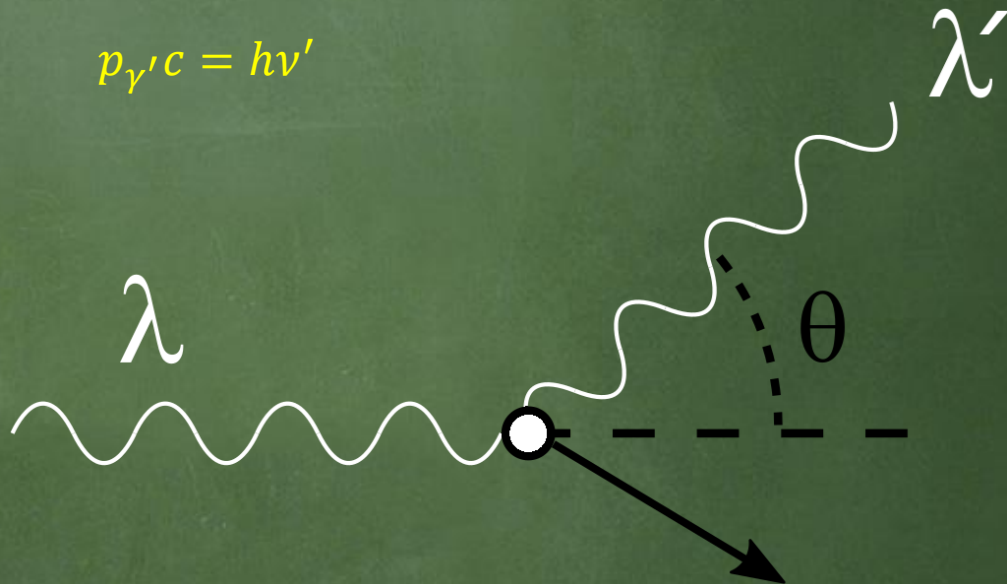
콤프턴은 X-선을 자유 전자에 산란시키는 실험을 수행하였다.

X-선과 콤프턴 산란 실험

$$h\nu + m_e c^2 = h\nu' + \sqrt{(p_{e'}c)^2 + (m_e c^2)^2}$$

$$p_\gamma = p_{\gamma'} + p_{e'}$$

$$p_\gamma c = h\nu, \quad p_{\gamma'} c = h\nu'$$

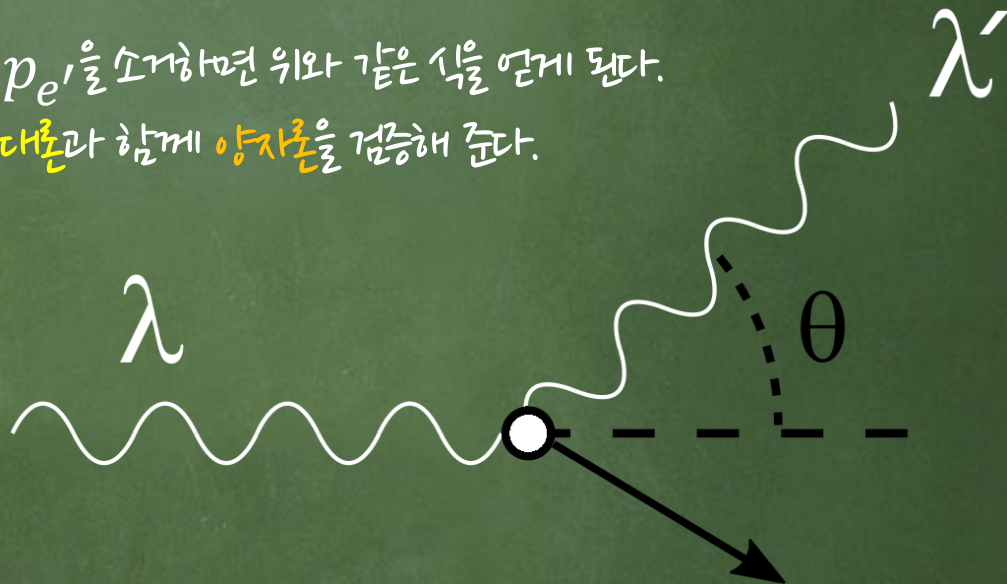


X-선과 콤프턴 산란 실험

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta)$$

앞의 두 방정식에서 p_e' 을 소거하면 위와 같은 식을 얻게 된다.

이것은 특수상대론과 함께 양자론을 검증해 준다.



흑체복사, 광전효과, 콤프턴 실험을 통해 우리는
빛은 파동이지만
입자성을 가진다는 것을 알게 되었다.

그러한다면 반대로 불연속적인 입자도
파동이 된다고 할 수 있을까?