

5장 물질과



보어 모델

$$L = mvr = n\hbar$$

보어의 양자화 가설: 각운동량의 양자화

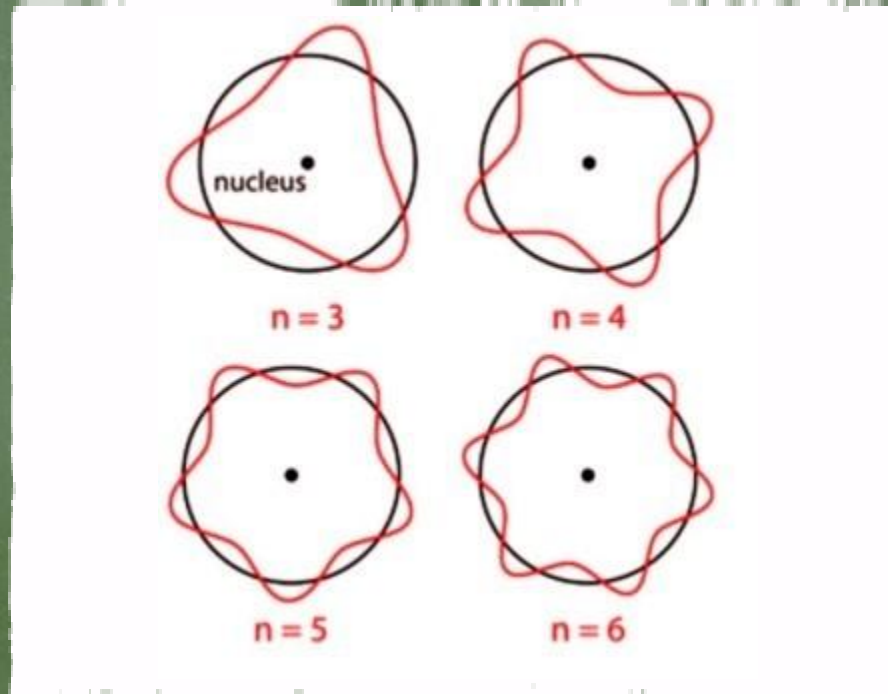
보어 모델

$$L = mvr = n\hbar$$

빛의 경우 운동량은 $p = E/c = hf/c = h/\lambda$ 와 같은 관계를 가지고 있다.

이 관계를 보어 모델에 적용해볼 수 있을까?

보어 모델

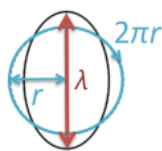


$p = h/\lambda$ 라는 관계식을 적용해보면,
파장은 궤도 주파원에서 정성상파를 이룬다.

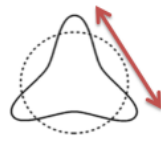
물질파



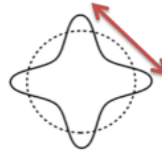
$$mv = \frac{nh}{2\pi r} = \frac{h}{\lambda}$$



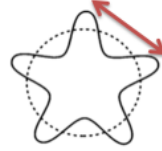
$n=2$



$n=3$



$n=4$



$n=5$

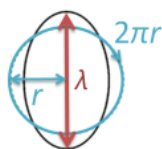
드브로이는 이 파장에 물리적 의미를 부여하였다.

$\lambda = h/p$: 드브로이 파장 de Broglie wavelength

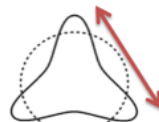
물질파



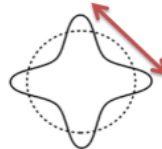
$$mv = \frac{nh}{2\pi r} = \frac{h}{\lambda}$$



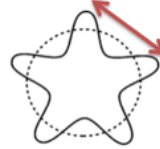
$n=2$



$n=3$



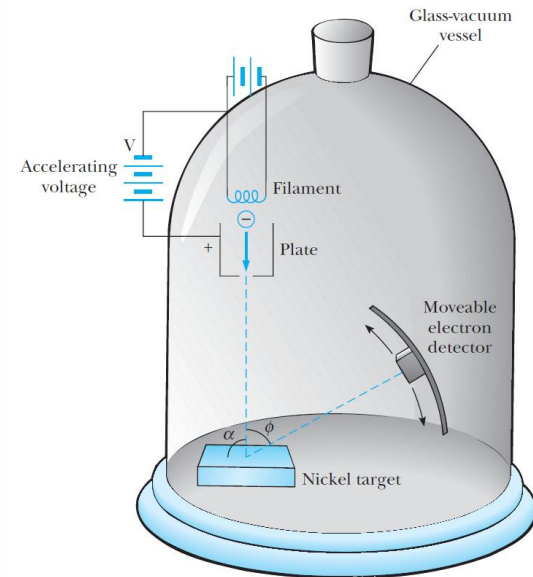
$n=4$



$n=5$

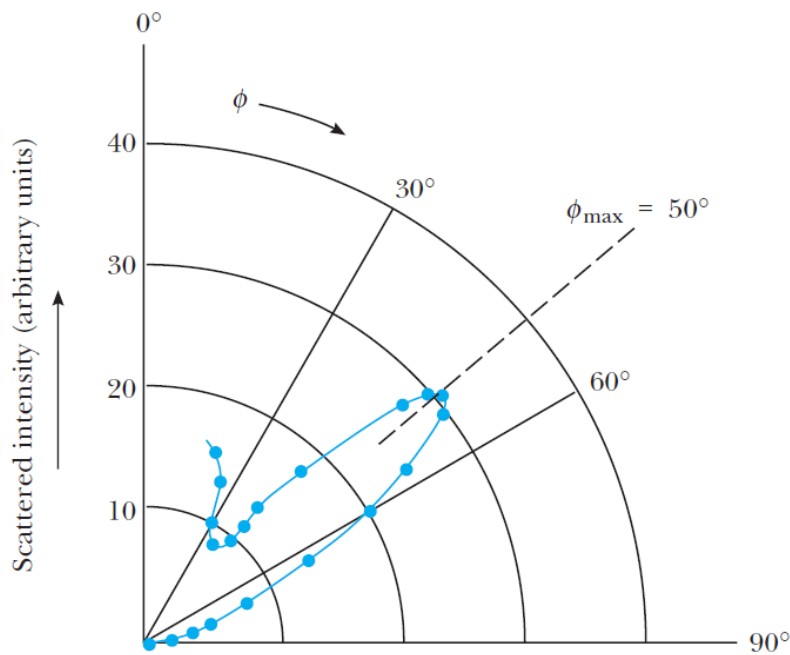
그런 이러한 이론적 추측이 실제로도 맞을까?

데이비슨-게머 실험



데이비슨과 게머는 전자를 니켈 표적에 충돌시키는 실험을 하였다.

데이비스-거너 실험



산란된 전자는 **특정 각도**에서
최대값을 가진다는 것을
확인할 수 있었다.

데이비슨-거머 실험

$$\frac{1}{2} m_e v^2 = eV$$

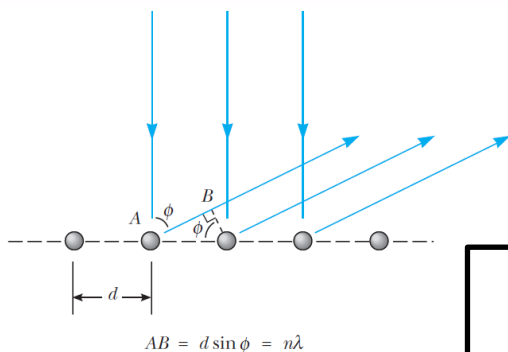
$$\lambda = \frac{h}{m_e v} = \frac{h}{\sqrt{2Vem_e}}$$

이에 대한 의미를 살펴보기 위해
물질파의 파장을 계산해보자.

데이비슨-거머 실험

$$\frac{1}{2} m_e v^2 = eV$$

$$\lambda = \frac{h}{m_e v} = \frac{h}{\sqrt{2Vem_e}}$$



$$d \sin \phi = n\lambda$$

한편, X-선 회절로부터
니켈 격자의 크기 d 를 알 수 있다.

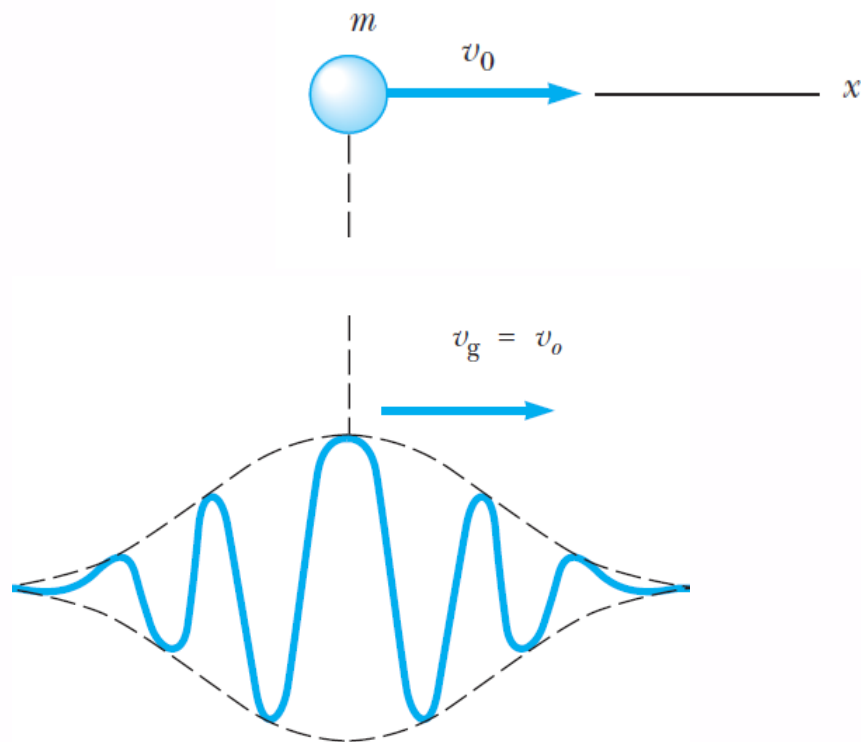
이 값을 대입해보면,
물질파 가설과 X-선 회절이
서로 잘 일치함을 확인할 수 있다.

이렇게 실제로 입자가 파장을 갖는다면

이제 우리는 이러한 파동을

어떻게 물리적으로 해석할 것인가?

입자와 파동

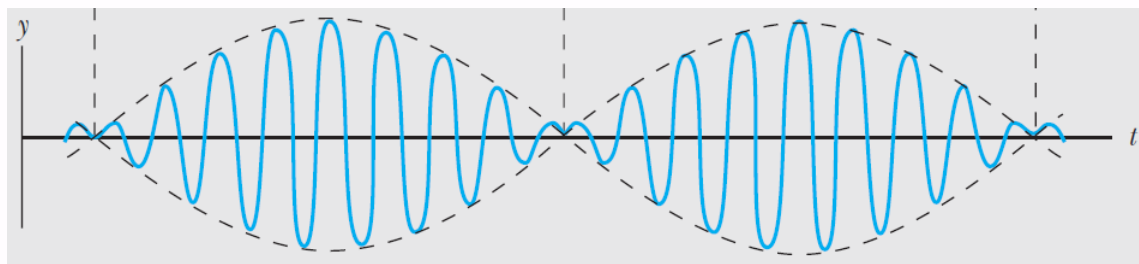


파동의 위상 속도 phase velocity

$$\begin{aligned} y &= A \cos \left(\frac{2\pi x}{\lambda} - 2\pi ft \right) \\ &= A \cos(kx - \omega t) \end{aligned}$$

$$v_p = \frac{\omega}{k}$$

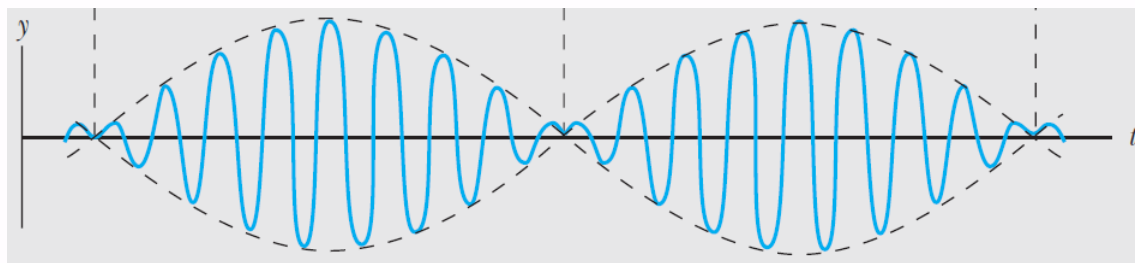
파동의 중첩에 의해



$$y = y_1 + y_2 = A \cos(k_1 x - \omega_1 t) + A \cos(k_2 x - \omega_2 t)$$

$$= 2A \cos \frac{1}{2} \{(k_2 - k_1)x - (\omega_2 - \omega_1)t\} \cdot \cos \frac{1}{2} \{(k_1 + k_2)x - (\omega_1 + \omega_2)t\}$$

파동의 중첩에 의해



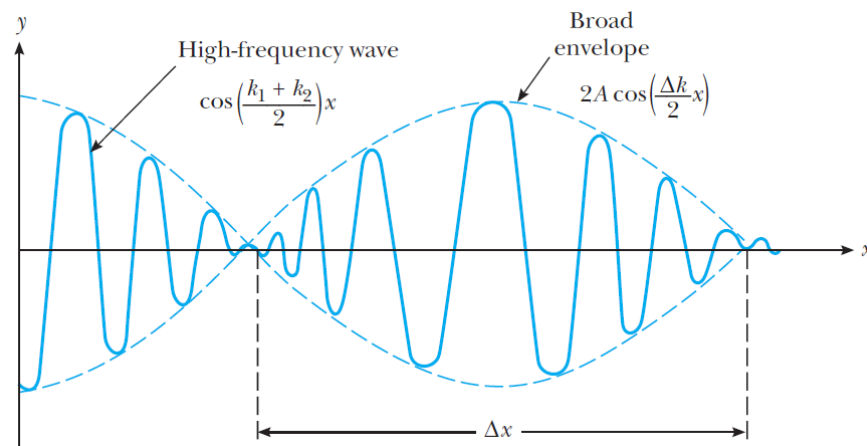
$$y = y_1 + y_2 = A \cos(k_1 x - \omega_1 t) + A \cos(k_2 x - \omega_2 t)$$

$$= 2A \cos \frac{1}{2} \{(k_2 - k_1)x - (\omega_2 - \omega_1)t\} \cdot \cos \frac{1}{2} \{(k_1 + k_2)x - (\omega_1 + \omega_2)t\}$$

포락선 envelope

고주파 진동

파동의 중첩에 의해



$$y = y_1 + y_2 = A \cos(k_1 x - \omega_1 t) + A \cos(k_2 x - \omega_2 t)$$

$$= \underbrace{2A \cos \frac{1}{2} \{(k_2 - k_1)x - (\omega_2 - \omega_1)t\}}_{\text{포락선 envelope}} \cdot \underbrace{\cos \frac{1}{2} \{(k_1 + k_2)x - (\omega_1 + \omega_2)t\}}_{\text{고주파 진동}}$$

포락선 envelope

고주파 진동

파동의 군 속도 group velocity

$$v_g = \frac{(\omega_2 - \omega_1)/2}{(k_2 - k_1)/2} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$$

군속도: 포락선의 이동속도

$$v_g = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0}$$

파동의 군 속도 group velocity

$$v_g = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} = v_p \Big|_{k_0} + k \left. \frac{dv_p}{dk} \right|_{k_0}$$

군 속도는 중심 파수에서의 위상 속도와 파수에 의존하는 보정으로 구성된다.

위상 속도가 파장에 의존한다면 분산 dispersion 현상을 보인다.

파동의 군 속도 group velocity

$$f = \frac{E}{h} \qquad \lambda = \frac{h}{p}$$
$$v_p = f\lambda = \frac{E}{p} = \frac{\gamma mc^2}{\gamma mv} = \frac{c^2}{v}$$

전자의 경우 적용해보면 위의 결과를 얻는다.

파동의 군 속도 group velocity

$$f = \frac{E}{h}$$

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

$$v_p = f\lambda = \frac{E}{p} = \frac{\gamma mc^2}{\gamma mv} = \frac{c^2}{v}$$

$$v_p = c \sqrt{1 + \left(\frac{mc}{\hbar k} \right)^2}$$

따라서 전자의 위상 속도는 위와 같다.

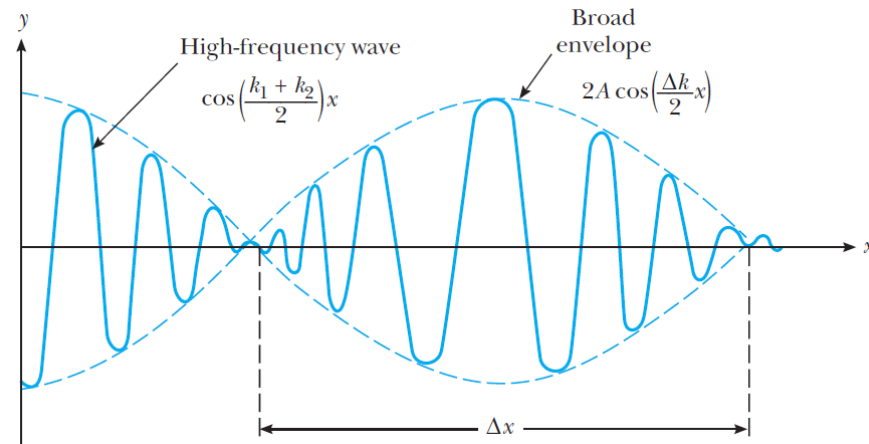
파동의 군 속도 group velocity

$$\begin{aligned} v_g &= \left[v_p + k \frac{dv_p}{dk} \right]_{k_0} \\ &= \frac{c}{\left[1 + \left(\frac{mc}{\hbar k_0} \right)^2 \right]^{1/2}} = \frac{c^2}{v_p} \Big|_{k_0} \end{aligned}$$

여기에 위상 속도를 대입하면,

파동의 군 속도가 고전적인 입자의 속도에 해당한다는 것을 알 수 있다.

불확정성 관계식



포락선의 Δk 가 점점 작아질수록 포락선의 폭 Δx 는 점점 넓어진다.

불확정성 관계식

$$\Delta x \Delta k \approx 1$$

$$\Delta t \Delta \omega \approx 1$$

포락선의 Δk 가 점점 작아질수록 포락선의 폭 Δx 는 점점 넓어진다.
또는 군속도의 정의로부터 Δt 및 $\Delta \omega$ 에 대한 관계로 다시 적을 수 있다.

하이젠베르크의 불확정성원리



$$\Delta p_x \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

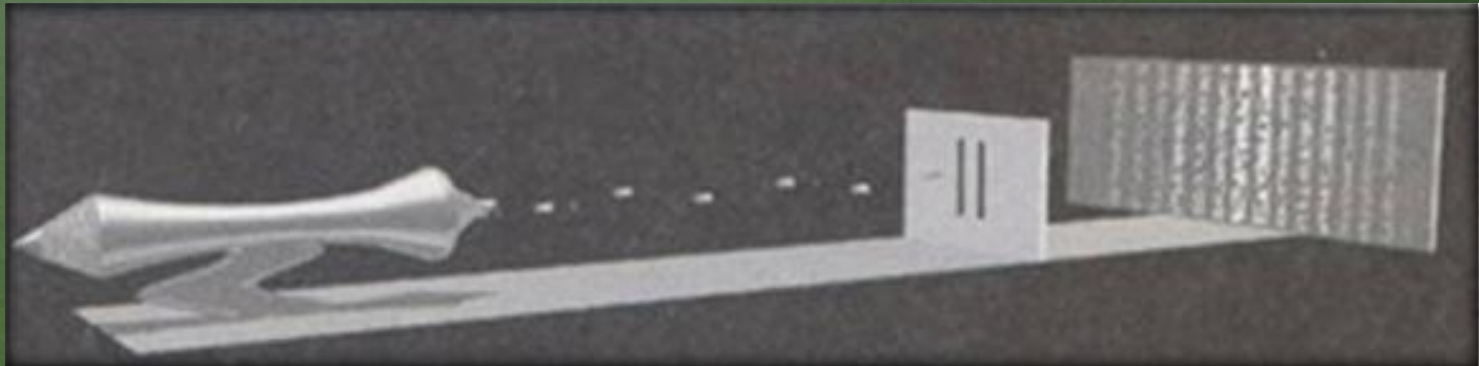
이 관계식을 정준 변수의 불확정성에 대해 표현하면

운동량-위치에 대한 불확정성 관계식을 얻는다.

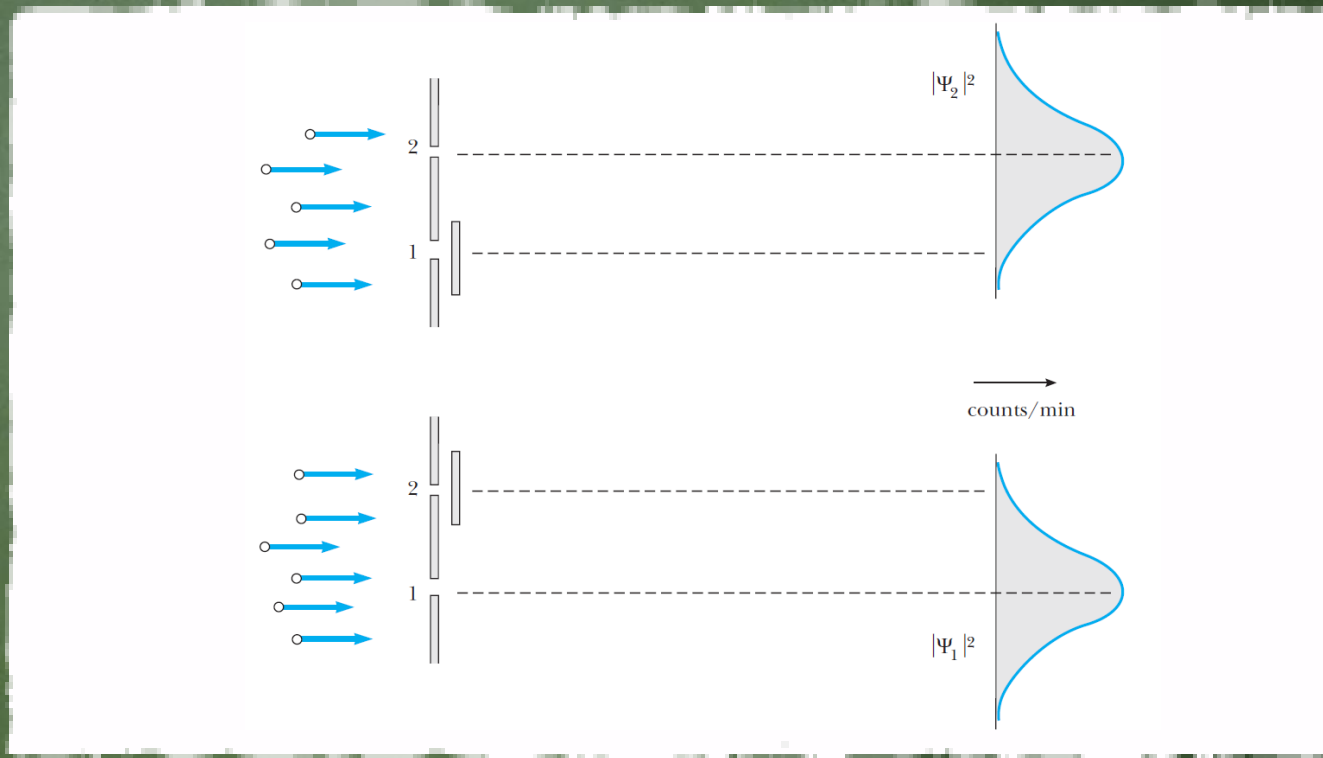
이것은 에너지-시간에 대한 불확정성 관계식으로 확장 시킬 수 있다.

입자의 간섭

전자가 알갱이라면, 한 알갱이는 둘 중에 어느 구멍을 지나갈까?

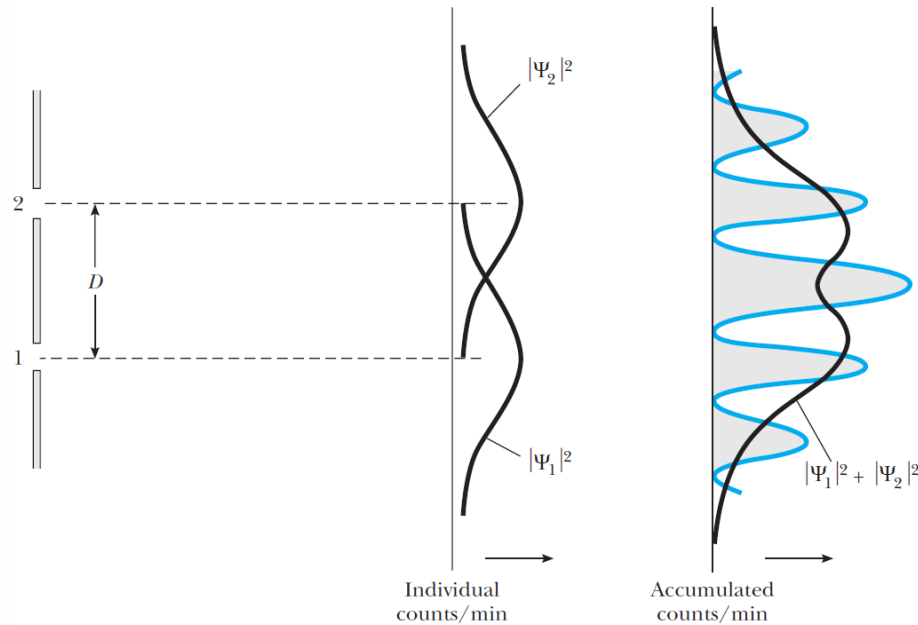


입자의 이중슬릿실험



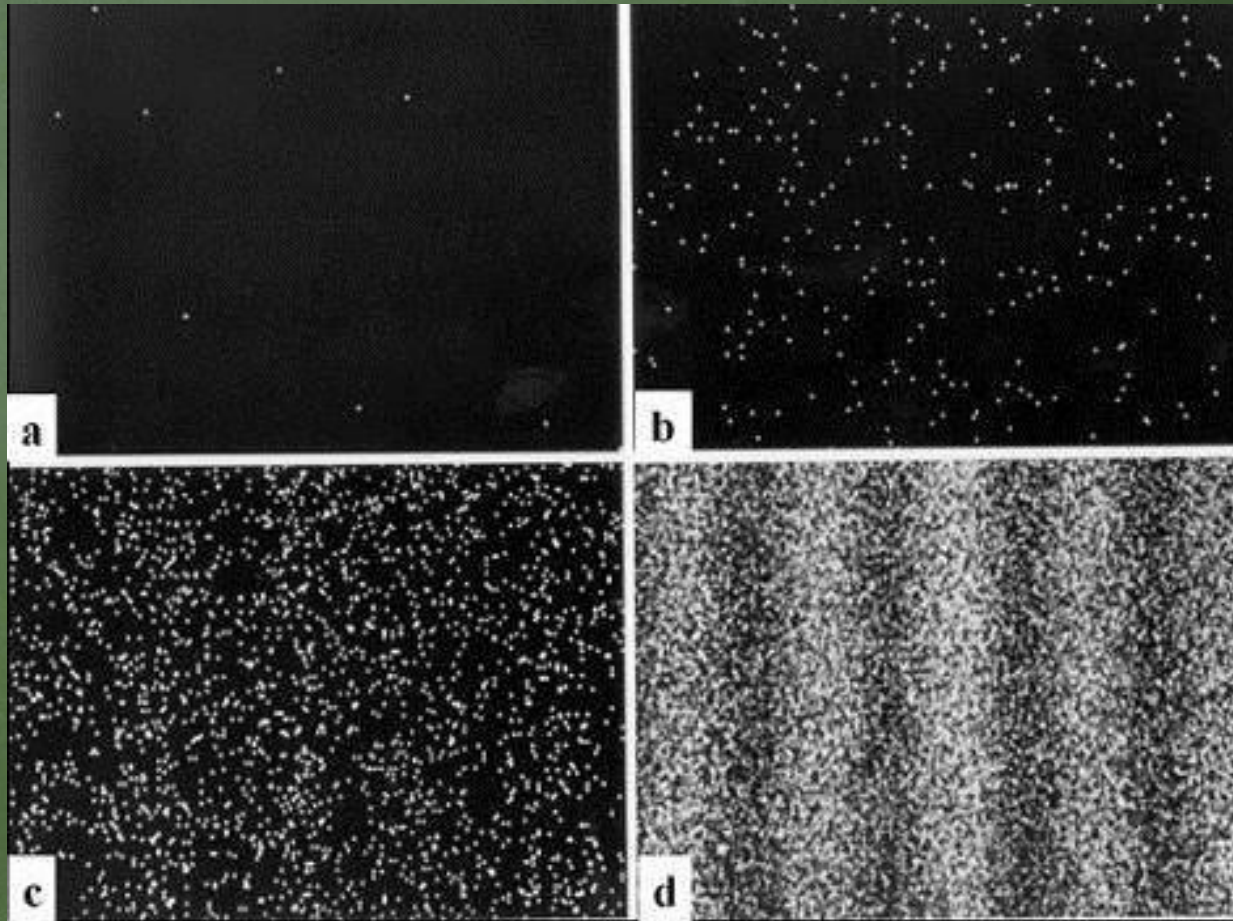
슬릿의 한 쪽을 막으면 $|\Psi|^2$ 에 비례하는 입자의 분포를 얻는다.

입자의 이중슬릿실험

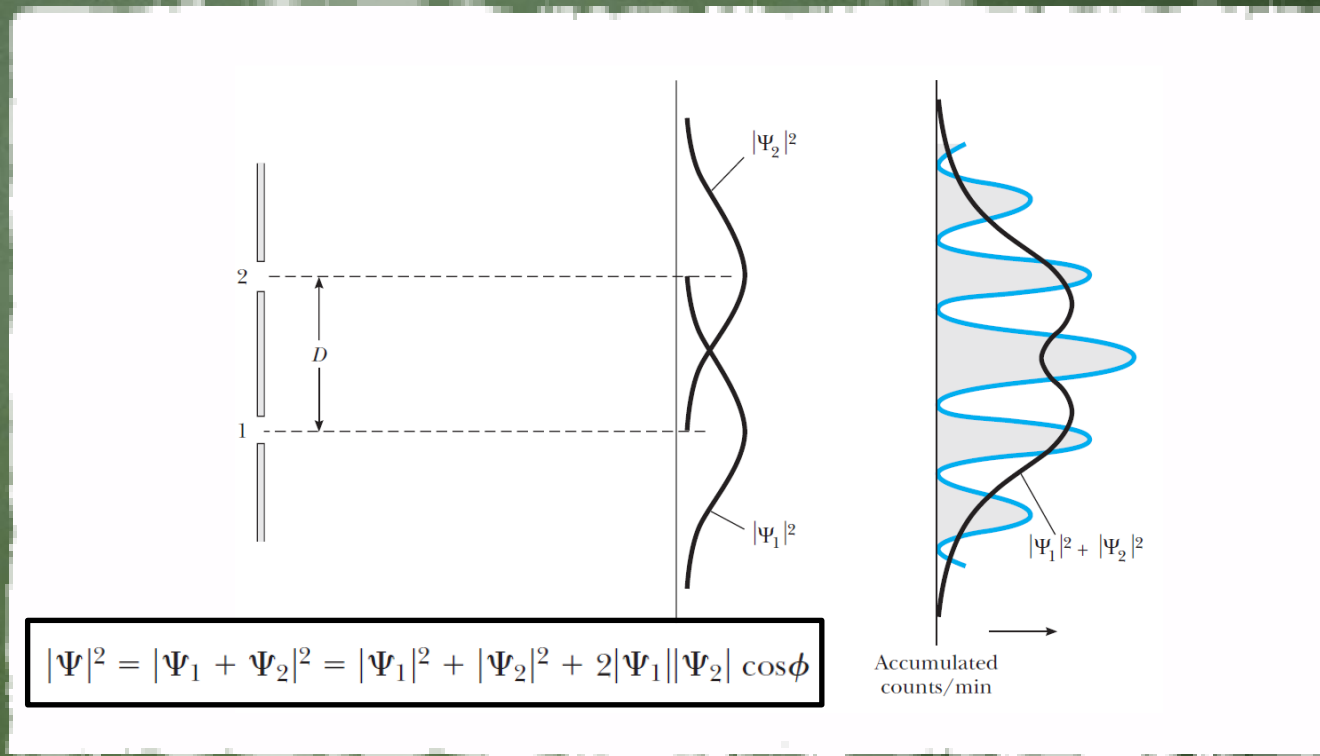


슬릿을 둘 다 열어 놓으면 $|\Psi_1 + \Psi_2|^2$ 에 비례할 것인가,
아니면 $|\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2$ 에 비례할 것인가?

입자의 간섭



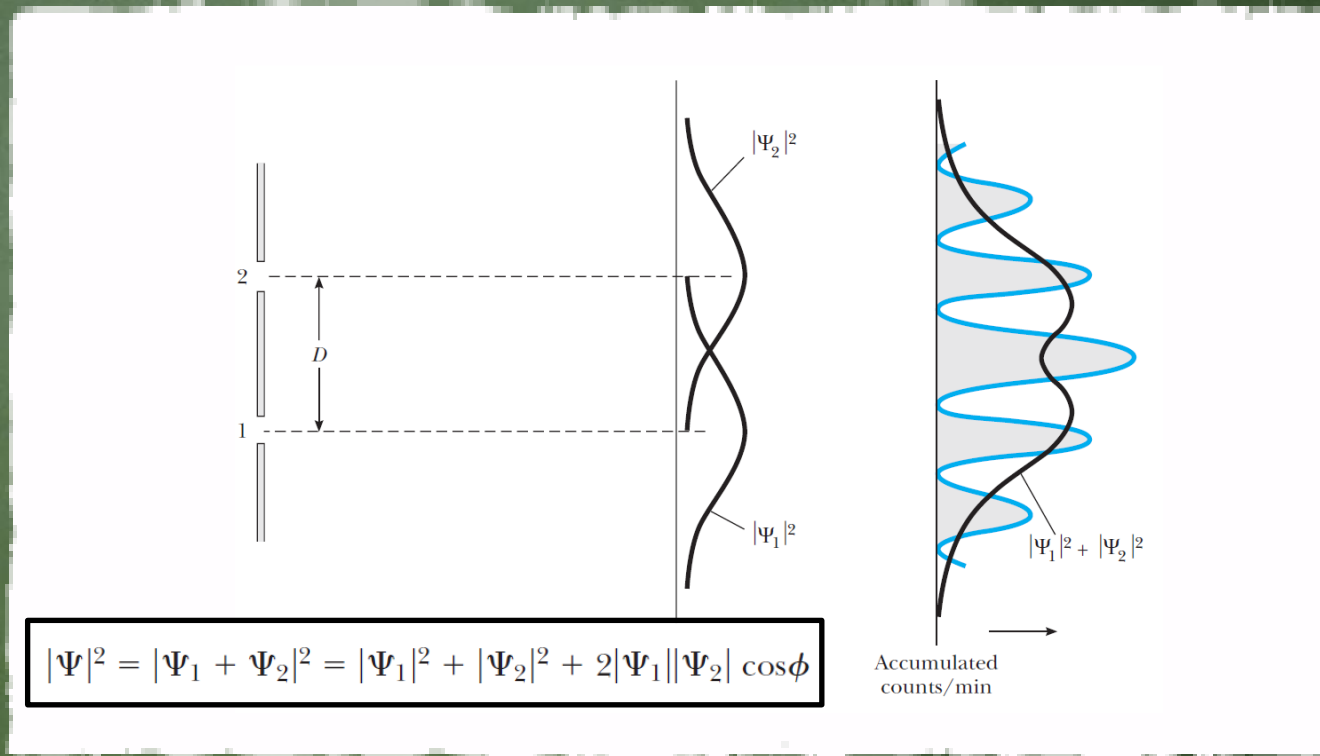
입자의 이중 슬릿 실험



실제 실험은 $|\Psi_1 + \Psi_2|^2$ 에 비례한다는 것을 보여준다.

즉, 전자는 자기 자신과 간섭한다는 결론을 얻는다.

입자의 이중슬릿실험



측정을 하기 전에는 전자는 슬릿 두 개의 구멍을 모두 통과한다.
그러나 각각의 슬릿에서 측정을 하면 두 개의 구멍 중 어느 한 곳만을 통과한다.

따라서 **빛**은 **파동**이지만 **입자**이고,
전자는 **입자**이지만 **파동**이다.

상보성 complementarity

입자와 파동의 특성을
동시에 측정할 수 없다.

상보성 complementarity

따라서 물질과 또는 파동함수 Ψ 그 자체는
서로 간섭할 수 있는 파동의 성질을 가진다.
그러나 측정을 하면 우리는 입자로 간주하게 되며,
이때 통계적으로 $|\Psi|^2$ 의 확률분포를 따른다.