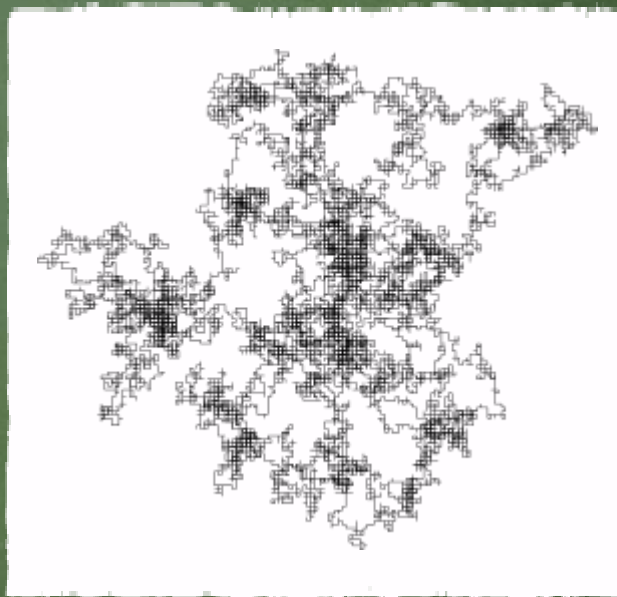
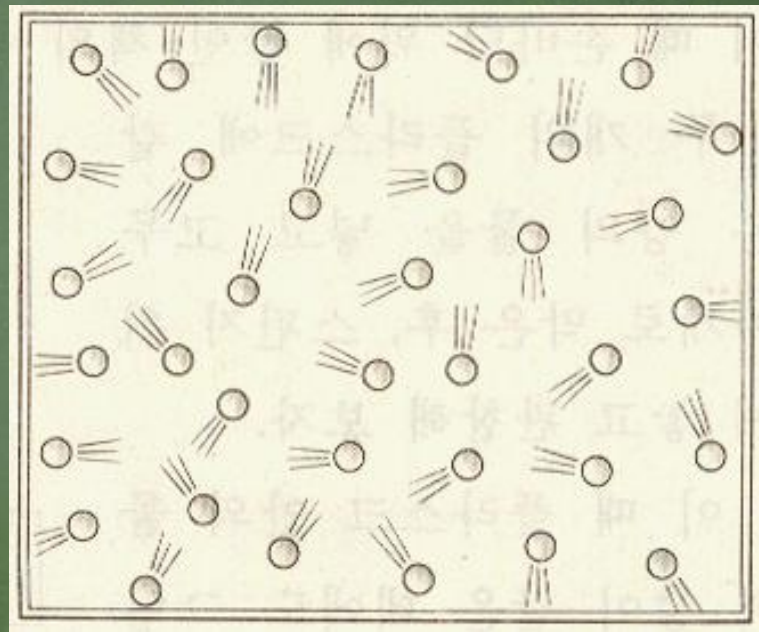


10장 통계 물리학



여러 개의 입자가 무작위적으로 행동할 때
우리는 통계적인 성질을 조사할 수 있다.
먼저 온도에 따른 기체 분자의 분포를
조사해보자.

기체분자운동론



이 기체를 **거시적인 값** P , V , T , N 등으로 표현해보자.

이상적인 경우, 내부 에너지는 N 과 T 만의 함수가 된다.

기체분자운동론

$$N_A = 6.022 \times 10^{23}$$

원자가 아보가드로 수 만큼 있을 때,

1 몰의 원자가 있다고 한다.

기체분자운동론은 이 정도 수의 입자가 있을 때 잘 맞는다.

기체분자운동론



원자가 **아보가드로 수** 만큼 있을 때,

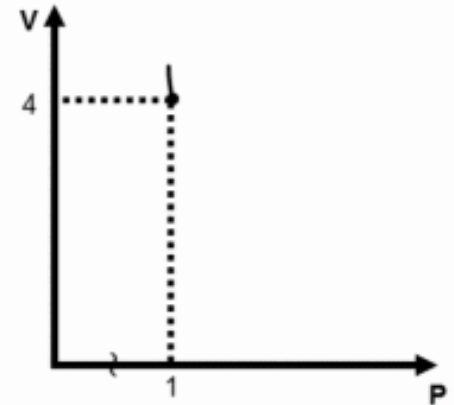
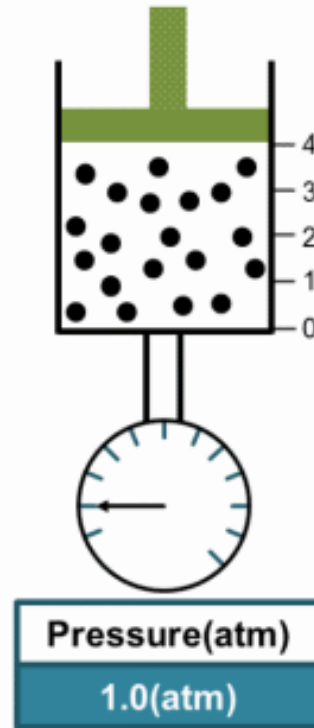
1 몰의 원자가 있다고 한다.

기체분자운동론은 이 정도 수의 입자가 있을 때 잘 맞는다.

이상기체에 대한 경험적 법칙들



로버트 보일



$$PV = C \text{ (C=constant)}$$

T is constant

▲ = Weight

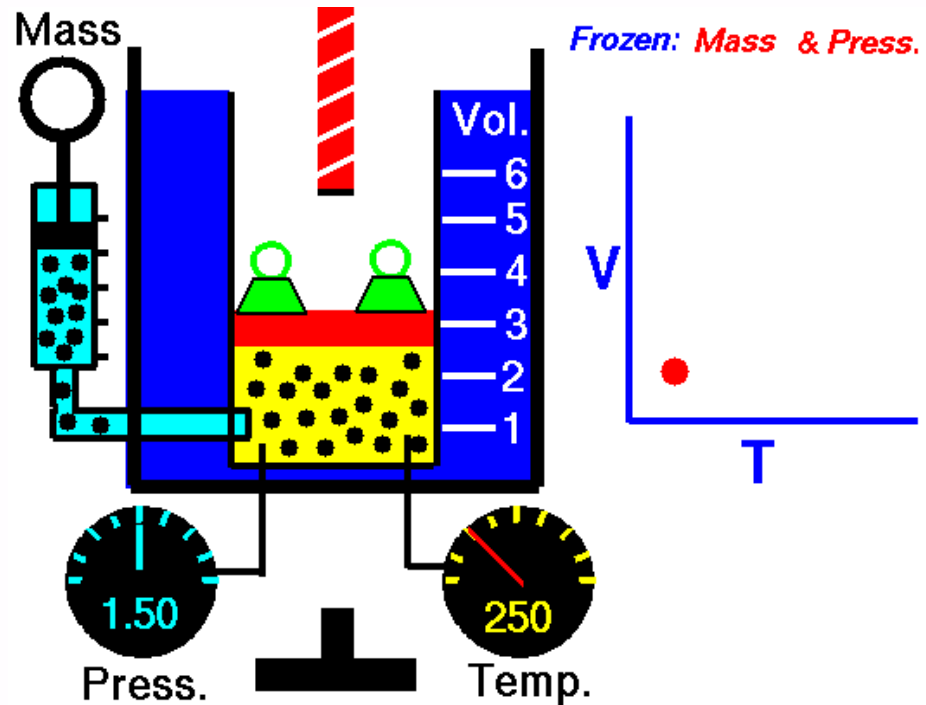
보일의 법칙:

온도 및 양이 일정한 기체의 압력과 부피는 반비례 관계이다.

이상기체에 대한 경험적 법칙들



자크 알렉상드르 세사르 샤를



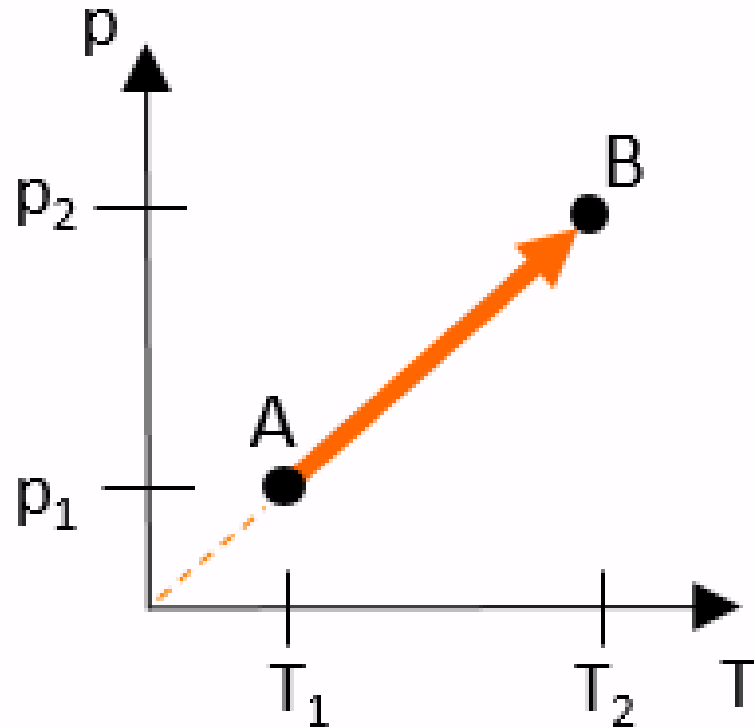
샤를의 법칙:

압력 및 양이 일정한 기체의 온도와 부피는 정비례한다.

이상기체에 대한 경험적 법칙들



조제프 루이 게이-뤼삭



게이-뤼삭의 법칙:

부피 및 양이 일정한 기체의 압력과 온도는 정비례한다.

이성기체에 대한 경험적 법칙들



아메데오 아보가드로

▼수소와 산소가 반응하여 수증기를 만드는 반응 모형

그림 1: 수소 원자 2 개와 산소 원자 1 개가 반응하여 수증기 2 개를 만들 때



원자는 더 이상 나뉘어지지 않는다는 사실에 위배된다.

그림 2: 수증기의 산소 원자가 쪼개지지 않게 할 때



산소와 수소, 수증기의 부피비가 2 : 1 : 2라는 사실에 위배된다.

그림 3: 수소 분자 2 개와 산소 분자 1 개가 반응하여 수증기 2 개를 만들 때



분자 개념을 이용하면 모든 사실을 잘 설명할 수 있다.

아보가드로의 법칙:

온도, 부피 및 압력이 일정한 기체의 입자 수는 일정하다.

보일의 법칙

$$P \propto 1 / V$$

보일의 법칙:

온도 및 양이 일정한 기체의 압력과 부피는 반비례한다.

샤를의 법칙

$$V \propto T$$

샤를의 법칙:

압력 및 양이 일정한 기체의 온도와 부피는 정비례한다.

게이-뤼사크의 법칙

$$P \propto V$$

게이-뤼사크의 법칙:

부피 및 양이 일정한 기체의 압력과 온도는 정비례한다.

아보가드로의 법칙

$$N = \text{const}$$

아보가드로의 법칙:

온도, 부피 및 압력이 일정한 기체의 입자 수는 일정하다.

이상기체의 상태방정식

$$P V = N k T$$

이상기체의 상태방정식

$$P V = N k T$$

압력

이상기체의 상태방정식

$$P V = N k T$$

압력

부피

이상기체의 상태방정식

$$P V = N k T$$

압력

부피

입자의 수

이상기체의 상태방정식

$$P V = N k T$$

압력 부피 입자의 수 온도

이상기체의 상태방정식

$$P V = N k T$$

볼츠만 상수

압력 부피 입자의 수 온도

이상기체의 상태방정식

$$P V = N k T$$

볼츠만 상수

압력 부피 입자의 수 온도

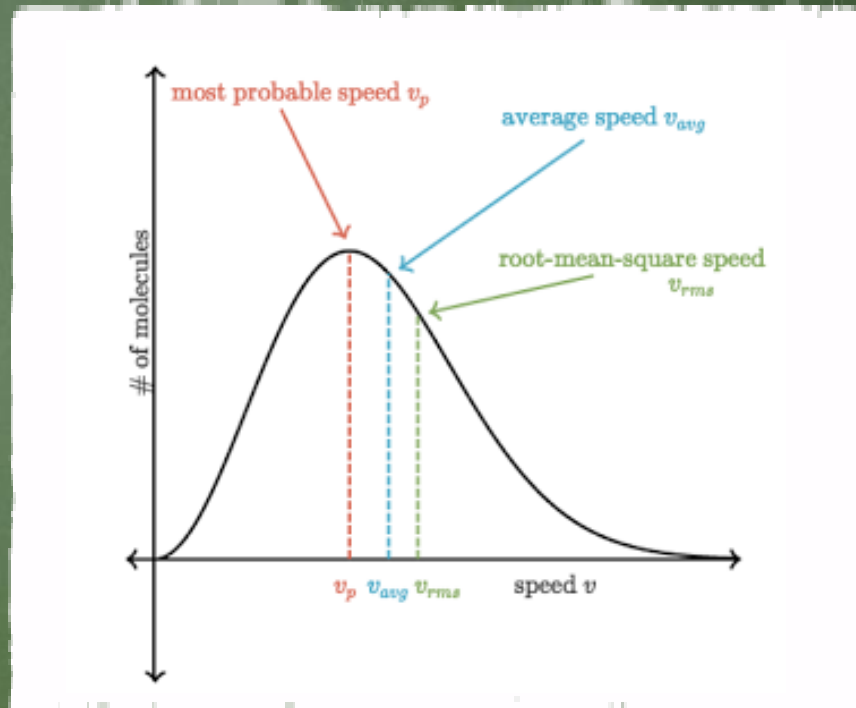
입자들이 충분히 독립적일 때, 이상기체법칙이 잘 맞는다.

맥스웰-볼츠만 분포

$$p(v)d^3v \propto v^2 e^{-mv^2/2kT} dv$$

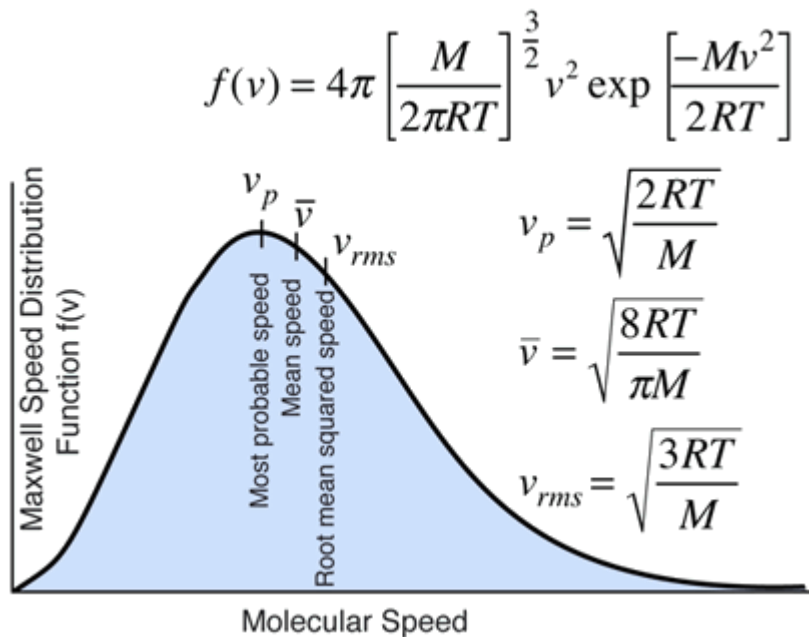
3차원 공간에서 입자의 에너지가 속도의 제곱에 비례한다면
맥스웰-볼츠만 분포를 얻는다.

맥스웰-볼츠만 분포



3차원 공간에서 입자의 에너지가 속도의 제곱에 비례한다면
맥스웰-볼츠만 분포를 얻는다.

맥스웰-볼츠만 분포



$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

$$\langle v^2 \rangle = \frac{3kT}{m}$$

기체 분자 하나의 평균 **병진**운동에너지

$$\langle E \rangle = \frac{3}{2} kT$$

기체의 평균 **병진**운동에너지

$$\langle E \rangle = \frac{3}{2} NkT$$

이상기체의 **내부** 에너지는 위와 같다.

제곱의 형태로 나타나는 에너지의 기대값

$$E = \sum_i \left(\frac{1}{2} m v_i^2 + \frac{1}{2} k x_i^2 + \frac{L_i^2}{2I_i} \right)$$

$$\langle \alpha x^2 \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (\alpha x^2) e^{-\alpha x^2 / kT} dx}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2 / kT} dx}$$

일반적으로 제곱의 형태로 나타나는 에너지를

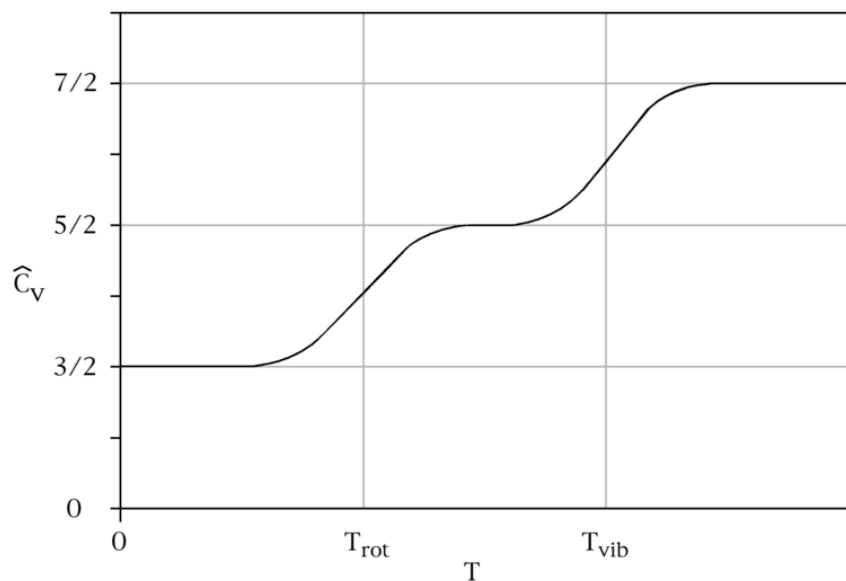
볼츠만 분포에 대해 기대값을 구해보면

$kT/2$ 얻는다.

에너지 등분배

고전적 시스템의 에너지가 n 개의 자유도의 합으로 이루어져 있고
시스템이 온도 T 의 열원에 접촉해 있다면
시스템의 평균 에너지는 $n \times kT/2$ 이다.

에너지 등분배



$$\text{정적열용량} = f \times \frac{1}{2} Nk$$

f 는 기체 분자의 자유도이다.

낮은 온도에서는 병진운동(3),

좀 더 높은 온도에서는 회전운동

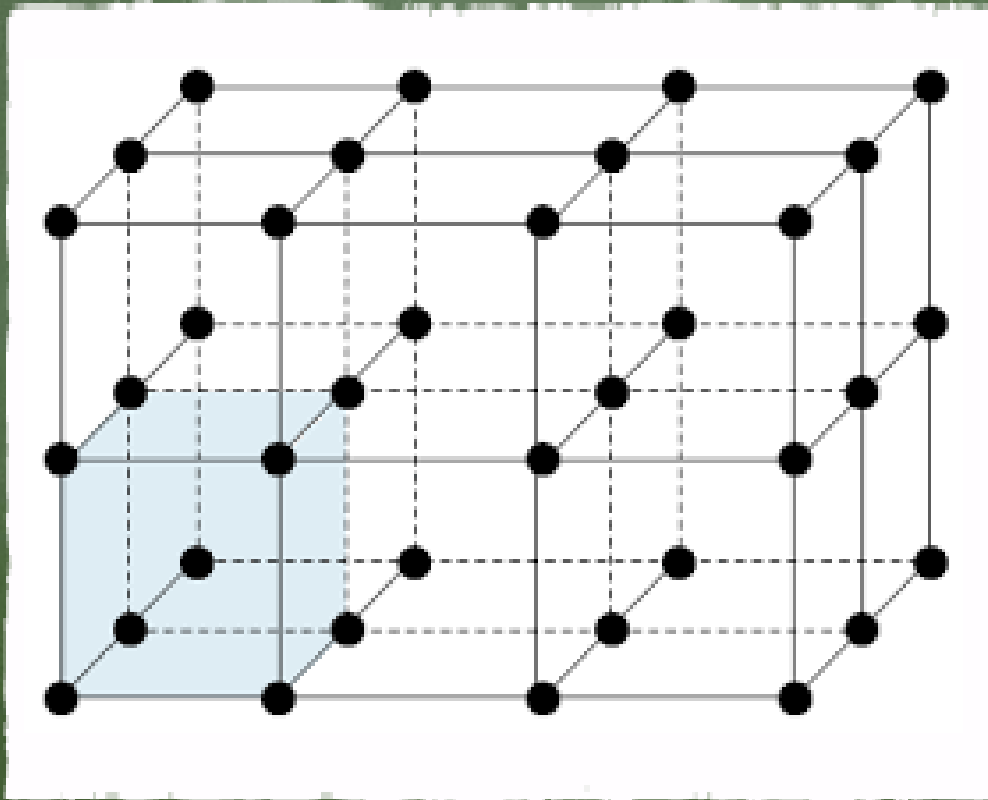
(1원자: 0, 2원자: 2, 일반적으로: 3),

아주 높은 온도에서는 분자 결합의

진동운동(결합당 2)이 자유도이다.

$$\text{정압열용량} = \frac{1}{2} f Nk + Nk$$

에너지 등분배

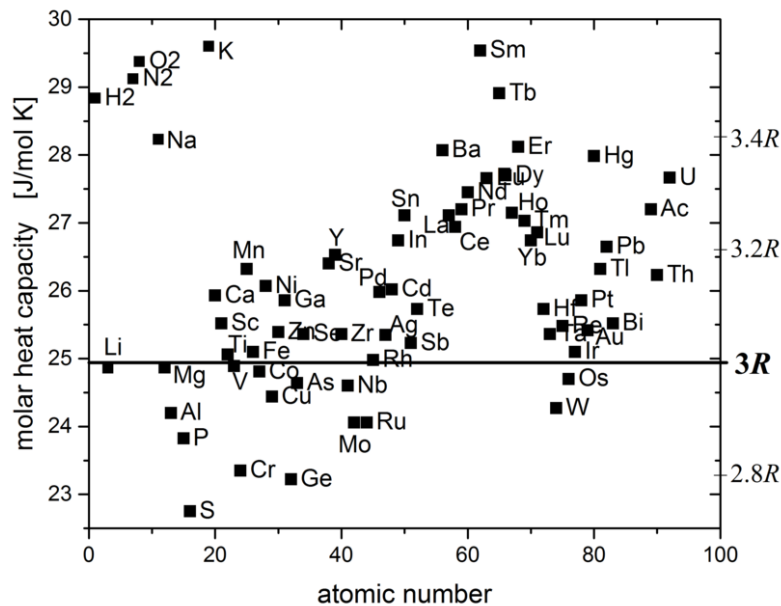


3차원 고체 격자의 경우,
병진 및 회전운동은 없으며
진동은 세 축으로 가능하다.

따라서 $3 \times 2 = 6$ 의 자유도를
가지게 된다.

(^{두롱-프티} Dulong-Petit 규칙)

에너지 등분배



3차원 고체 격자의 경우,
병진 및 회전운동은 없으며
진동은 세 축으로 가능하다.

따라서 $3 \times 2 = 6$ 의 자유도를
가지게 된다.

(두롱-프티 Dulong-Petit 규칙)

맥스웰-볼츠만 통계는
낮은 온도에서 분자들이 서로 겹쳐지는 상황에서는
잘 맞지 않게 된다.

이 때 우리는 양자 통계를 필요로 한다.

대칭화 조건

$$\psi_{\pm}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = A[\psi_a(\vec{r}_1)\psi_b(\vec{r}_2) \pm \psi_b(\vec{r}_1)\psi_a(\vec{r}_2)]$$

상대론적 효과에 의해 스핀이 정수인 **보존** Boson은 **대칭화(+)**, 스핀이 반정수인 **페르미온**

Fermion은 **반대칭화(-)**를 요구하게 된다.

대칭화 조건의 결과

$$\langle \Delta x^2 \rangle_{\pm} = \langle \Delta x^2 \rangle_d \mp 2|\langle x \rangle_{ab}|^2$$

보존의 경우는 거리가 가까워지고 하고, 퍼트리온의 경우는 거리가 멀어지고 한다.

거리가 충분히 멀리 떨어져 있으면 구분 가능하다고 생각해도 괜찮다.

파울리의 배타원리 exclusion principle

$$\langle \Delta x^2 \rangle_{\pm} = \langle \Delta x^2 \rangle_d \mp 2|\langle x \rangle_{ab}|^2$$



전자는 페르미온이므로,
다른 전자와 같은 양자수를 가질 수 없다.

양자 통계

보즈-아인슈타인 분포

$$f_{\text{BE}}(E) = \frac{1}{B e^{E/k_B T} - 1}$$

$$n(E) dE = g(E) f_{\text{BE}}(E) dE$$

$$= \frac{1}{e^{E/k_B T} - 1} \quad (\text{for photons or phonons})$$

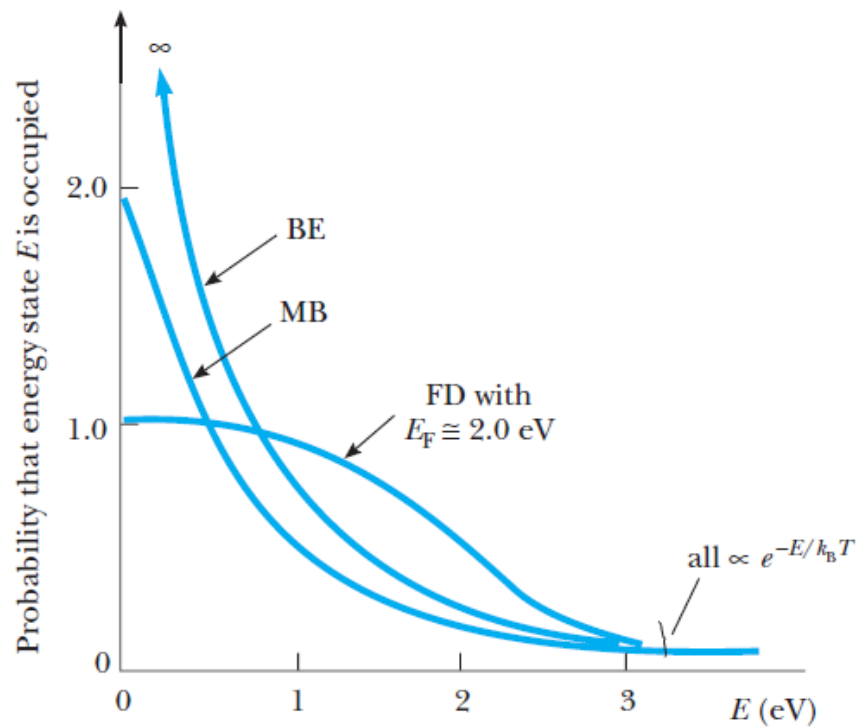
페르미-디랙 분포

$$f_{\text{FD}}(E) = \frac{1}{H e^{E/k_B T} + 1}$$

$$n(E) dE = g(E) f_{\text{FD}}(E) dE$$

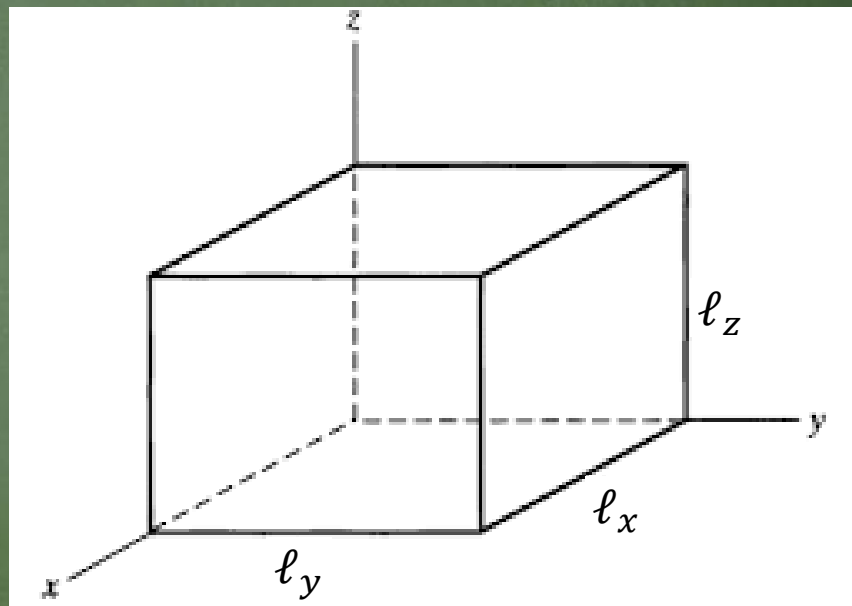
$$= \frac{1}{e^{(E-E_F)/k_B T} + 1}$$

양자 통계



먼저 보즈-아인슈타인 통계의
몇 가지 응용을 살펴보자.

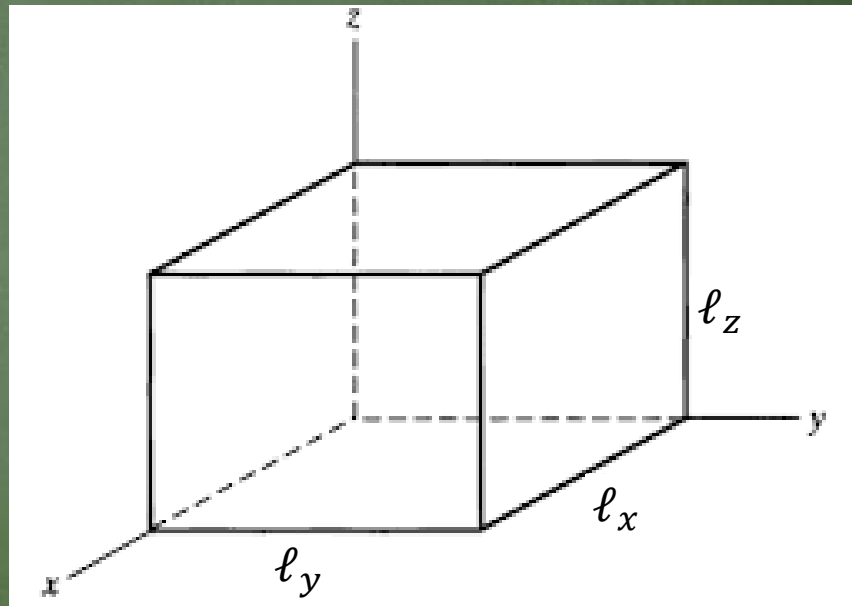
상대 밀도를 계산하는 방법



위와 같은 3차원 상자에 입자를 채운다면 양자화 조건에 의해서, 다음 조건이 요구된다.

$$k_i \ell_i = n_i \pi$$

상대 밀도를 계산하는 방법



이 때, k -공간에서는 어떻게 생각하느냐에 대해 살펴보자.

상대 밀도를 계산하는 방법

$$(k - \text{공간의 부피}) = \frac{1}{8} \left(\frac{4}{3} \pi k^3 \right)$$

k -공간에서 $k_i > 0$ 인 영역

상대 밀도를 계산하는 방법

운동량의 미소 변화에 대해 부피는 다음과 같게 된다.

$$\frac{1}{8} (4\pi k^2 dk)$$

상태 밀도를 계산하는 방법

$$g(k)dk = \frac{k - \text{공간 구 겹칠 8분원의 부피}}{k - \text{공간의 한 상태가 차지한 부피}} = \frac{\frac{1}{8} (4\pi k^2 dk)}{\pi^3 / \ell_x \ell_y \ell_z}$$

상태 밀도를 계산하는 방법

각 k 에 대해 허용된 상태들의 개수

$$g(k)dk = \frac{V k^2 dk}{2\pi^2}$$

상대론적 밀도를 계산하는 방법

광자의 경우 2 개의 편광을 고려해야 하므로

$$g(k)dk = \frac{V k^2 dk}{\pi^2}$$

상대론적 밀도를 계산하는 방법

광자의 경우 2 개의 편광을 고려해야 하므로

$$g(k)dk = \frac{V k^2 dk}{\pi^2}$$

$$g(\omega)d\omega = \frac{V \omega^2 d\omega}{\pi^2 c^3}$$

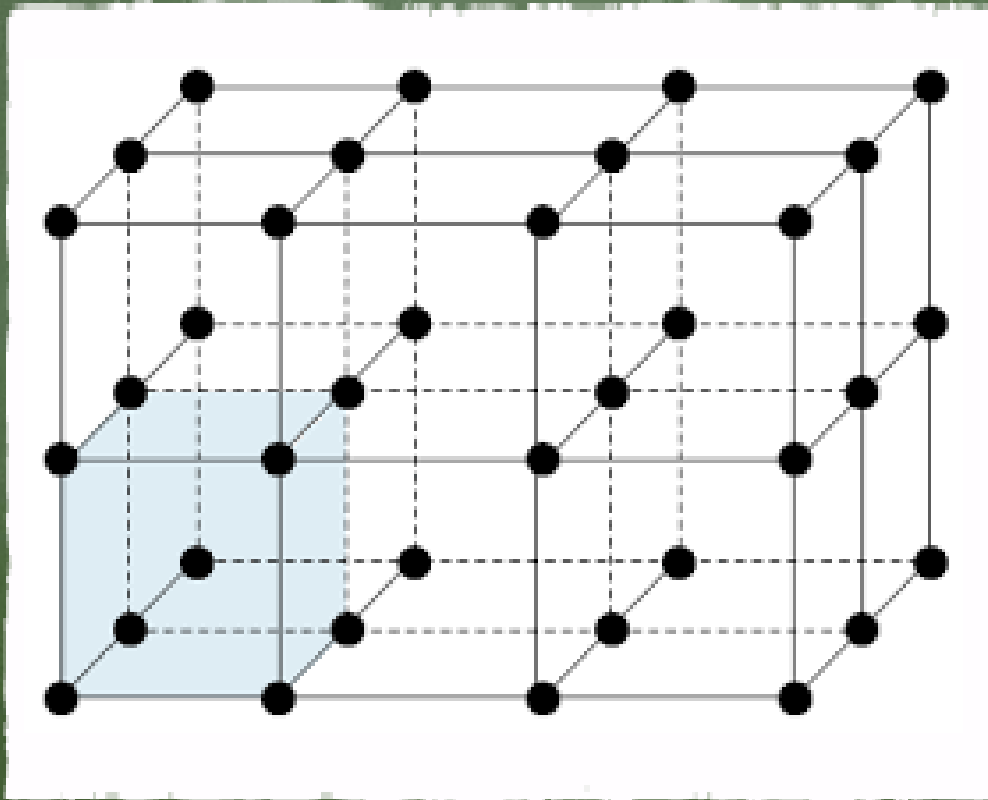
플랑크의 흑체 복사 공식

$$u_{\omega} = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}$$

스펙트럼당 에너지 밀도를 다시 유도할 수 있다.

이것은 플랑크의 흑체 복사 공식과 같다.

에너지 등분배

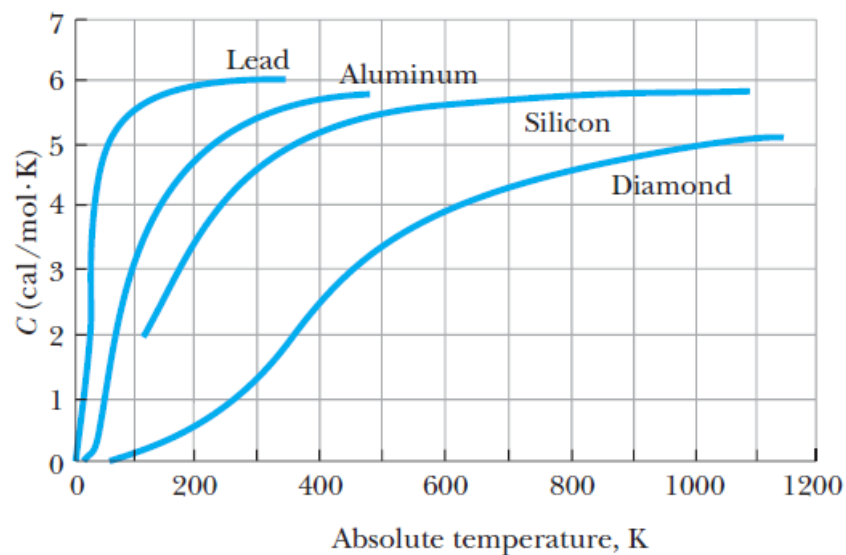


3차원 고체 격자의 경우,
병진 및 회전운동은 없으며
진동은 세 축으로 가능하다.

따라서 $3 \times 2 = 6$ 의 자유도를
가지게 된다.

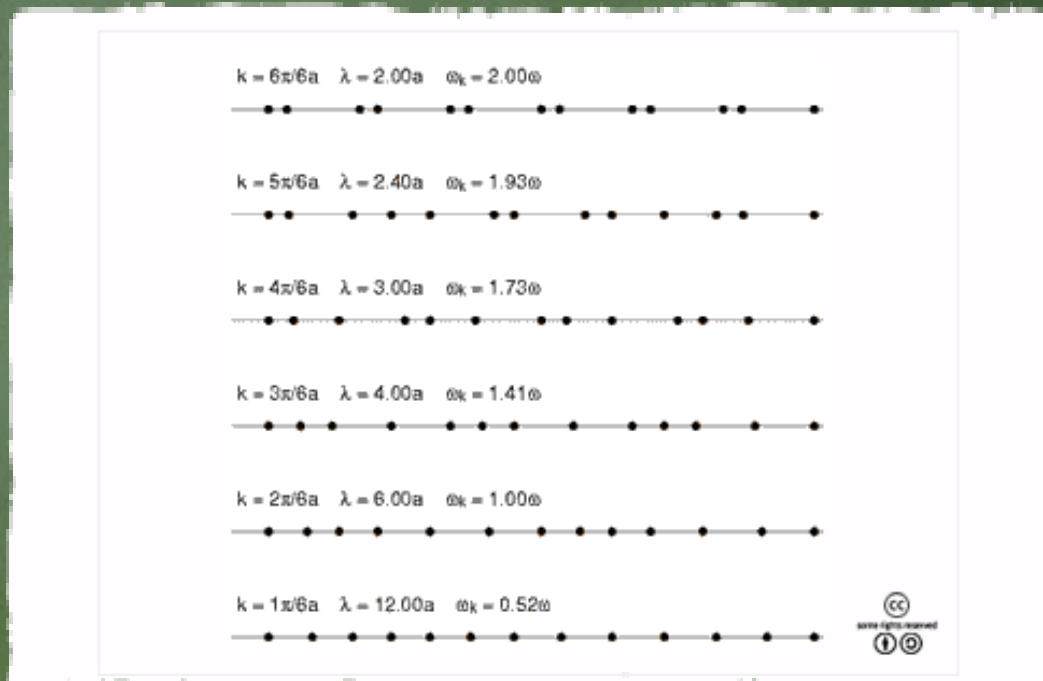
(^{두롱-프티} Dulong-Petit 규칙)

저온 영역에서 고체의 비열



저온 영역에서는 듀롱-프티 규칙이 잘 맞지 않는다.

저온 영역에서 고체의 비열



아인슈타인은 이 문제를 이해하기 위해
양자화된 조화진동자가 보즈-아인슈타인 분포를 갖는다고 생각하였다.

저온 영역에서 고체의 비열

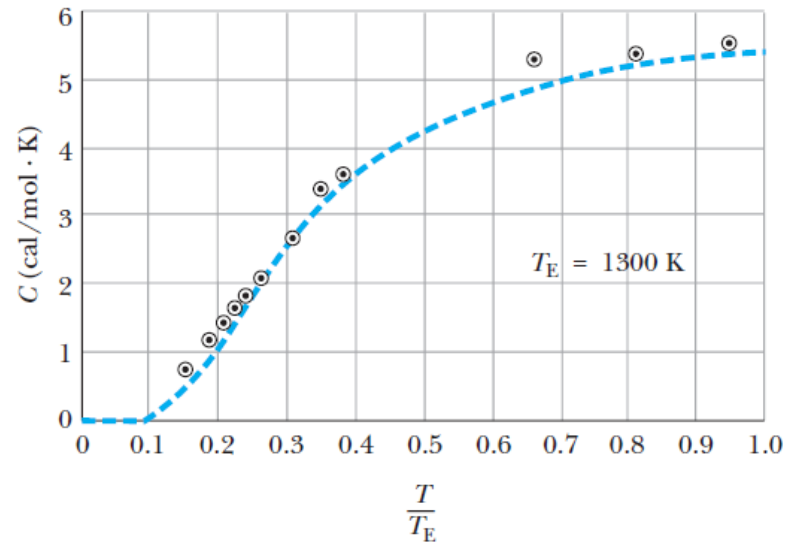
$$\bar{E} = \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1}$$

$$U = 3N_A \bar{E} = 3N_A \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1}$$

$$C = \frac{dU}{dT} = 3R \left(\frac{\hbar\omega}{k_B T} \right)^2 \frac{e^{\hbar\omega/k_B T}}{(e^{\hbar\omega/k_B T} - 1)^2}$$

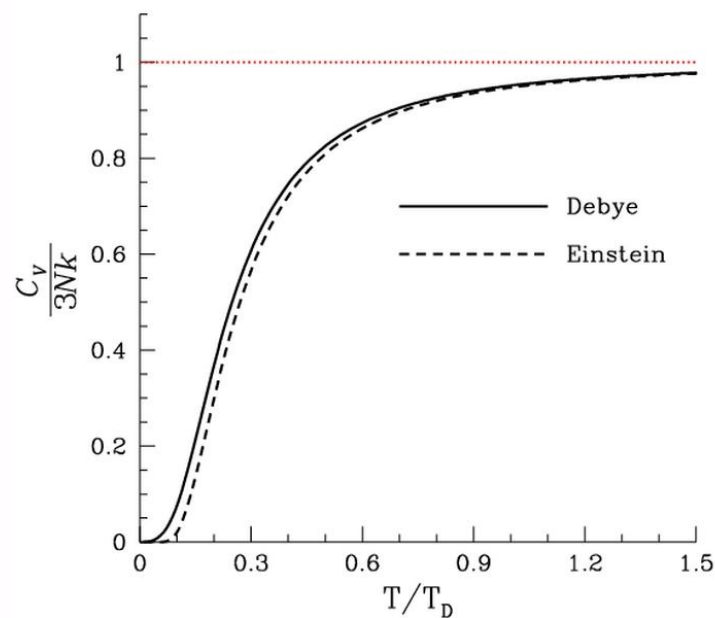
이 결과는 고온 영역에서 잘 맞고,
저온 영역에서 비열이 감소하는 것을 보여준다.

포논 phonon



이러한 양자화된 격자 진동을 **포논 phonon** 이라고 부른다.

포논 phonon



데바이는 낮은 온도에서의 현상을 좀 더 잘 설명하기 위해
더 정교화된 포논 모델을 발전시켰다.

보스-아인슈타인 응축 condensation

Bose - Einstein Condensation

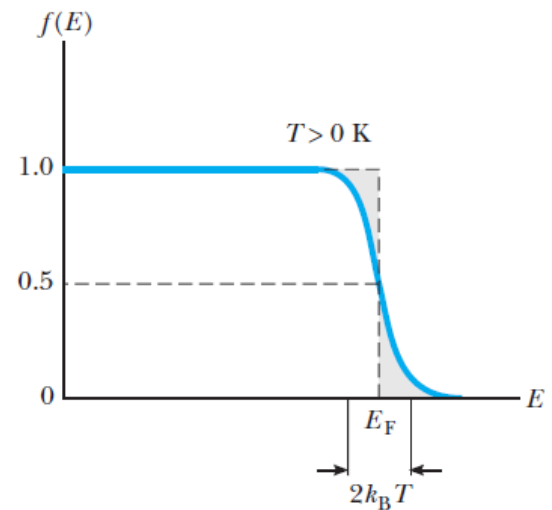
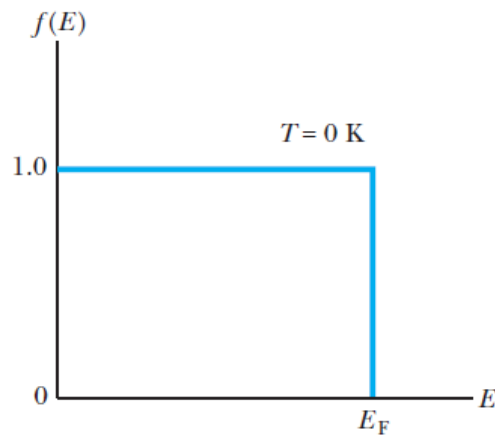
임계온도 이하에서 모든 보손들이 바닥상태에 놓이게 되면
개별 입자가 아니라 입자들이 응축된 하나의 장처럼 보이게 된다.

그 다음, 페르미-디랙 통계의
응용에 대해서도 살펴보자.

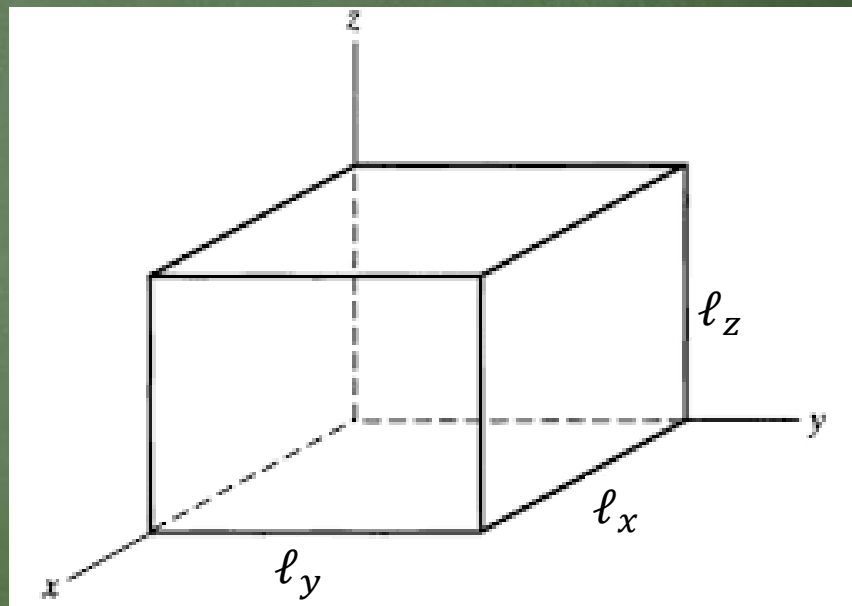
페르미-디랙 통계

$$n(E) dE = g(E) f_{\text{FD}}(E) dE$$

$$f_{\text{FD}}(E) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/k_B T} + 1}$$



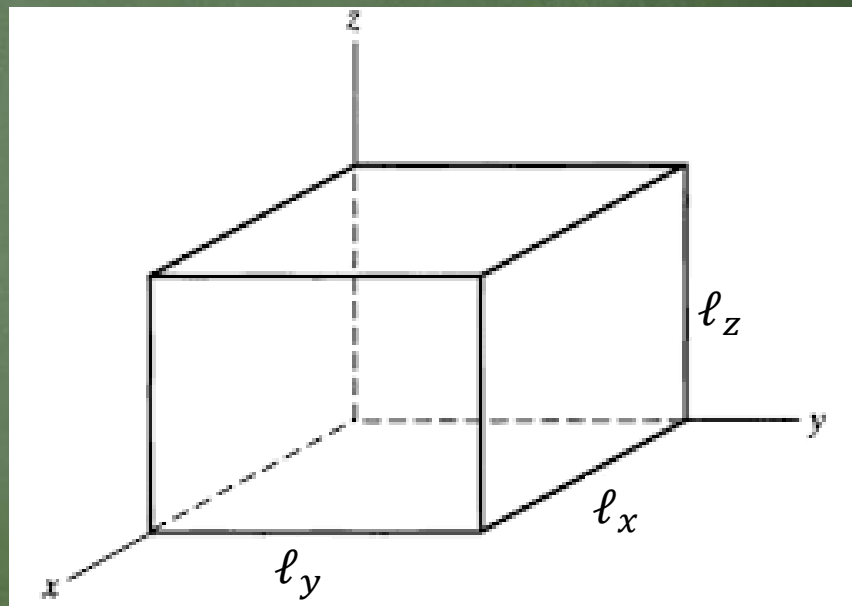
상대 밀도를 계산하는 방법



위와 같은 3차원 상자에 전자를 채운다면 양자화 조건에 의해서, 다음 조건이 요구된다.

$$k_i \ell_i = n_i \pi$$

상대 밀도를 계산하는 방법



파울리의 배타 원리에 의해 같은 장소에 입자를 쌓아둘 수 없다.

이 때, k -공간에서는 어떻게 대응되는지에 대해 살펴보자.

상대 밀도를 계산하는 방법

$$\frac{1}{8} \left(\frac{4}{3} \pi k_F^3 \right) = \frac{Nq}{2} \left(\frac{\pi^3}{V} \right)$$

k_F : k -공간의 바깥 반지름

N : 입자의 수

q : 입자 당 가지고 있는 전자의 수

π^3/V : $k_x k_y k_z$ 단위 볼륨의 부피

상태 밀도를 계산하는 방법

$$\frac{1}{8} \left(\frac{4}{3} \pi k_F^3 \right) = \frac{Nq}{2} \left(\frac{\pi^3}{V} \right)$$

k -공간에서 $k_i > 0$ 인 영역

스핀 업과 다운

k_F : k -공간의 바깥 반지름

N : 입자의 수

q : 입자 당 가지고 있는 전자의 수

π^3/V : $k_x k_y k_z$ 단위 볼륨의 부피

상대 밀도를 계산하는 방법

$$\frac{1}{8} \left(\frac{4}{3} \pi k_F^3 \right) = \frac{Nq}{2} \left(\frac{\pi^3}{V} \right)$$

k -공간에서 $k_i > 0$ 인 영역

스핀 업과 다운

k_F : k -공간의 바깥쪽 반지름

N : 입자의 수

q : 입자 당 가지고 있는 전자의 수

π^3/V : $k_x k_y k_z$ 단위 블록의 부피

k_F : 페르미 면 surface

E_F : 페르미 에너지

총 에너지

$$dE = (dk \text{ 겹칠 수 안에 포함되는 전자 수}) \times \frac{\hbar^2}{2m} k^2$$

페르미 에너지는 전자가 가질 수 있는 가장 높은 에너지를 말한다.

한편 전자의 총 에너지는 위와 같다.

총 에너지

$$dE = (dk\text{띠를 안에 포함되는 전자 수}) \times \frac{\hbar^2}{2m} k^2$$

$$(dk\text{띠를 안에 포함되는 전자 수}) = \frac{(dk\text{띠의 부피})}{(\text{전자 1개당 차지하는 부피})} = \frac{\frac{1}{8} (4\pi k^2) dk}{\frac{1}{2} \frac{\pi^3}{V}}$$

총 에너지

$$E = \frac{\hbar^2}{10\pi^2 m} (3\pi^2 Nq)^{5/3} V^{-2/3}$$

축퇴압

$$E = \frac{\hbar^2}{10\pi^2 m} (3\pi^2 Nq)^{5/3} V^{-2/3}$$

$$p = -\frac{\partial E}{\partial V} \propto V^{-5/3}$$

즉 페르미온은 압축을 할 때 압력이 생긴다.

이것을 축퇴압 degeneracy pressure이라고 부르고, 물체가 단단함을 갖는 이유가 된다.

페르미-디랙 통계

$$n(E) dE = \frac{DE^{1/2} dE}{e^{(E-E_F)/k_B T} + 1}$$

$$D = \frac{8\sqrt{2}\pi m_e^{3/2}}{h^3}$$

$$\frac{N}{V} = D \int_0^{E_F} E^{1/2} dE = \frac{2}{3} D E_F^{3/2}$$

$$E_F(0) = \frac{h^2}{2m_e} \left(\frac{3N}{8\pi V} \right)^{2/3}$$

같은 식을 에너지에 대해 적분함으로써
입자의 밀도와 페르미 에너지에 대해 계산할 수 있다.