

시작하는 이야기

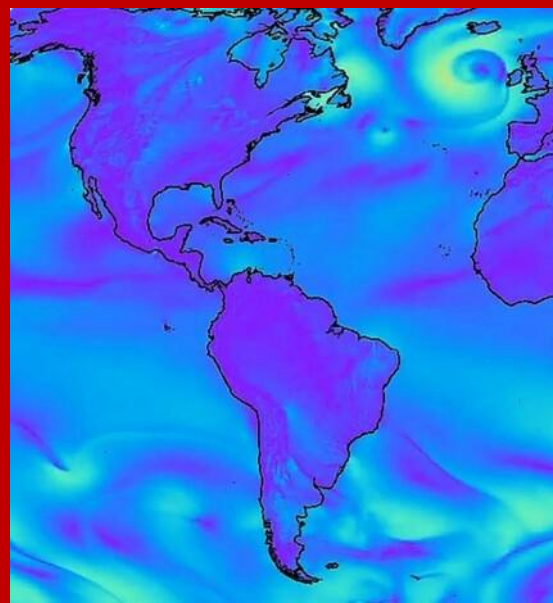
역학 강의를 시작하기에 앞서,
우리가 어디에 와 있는지에 대해서 질문해 봅시다.
물리학이란 무엇이며, 무슨 일을 하는 것일까요?

그 전에 이런 질문으로부터 시작해 봅시다.

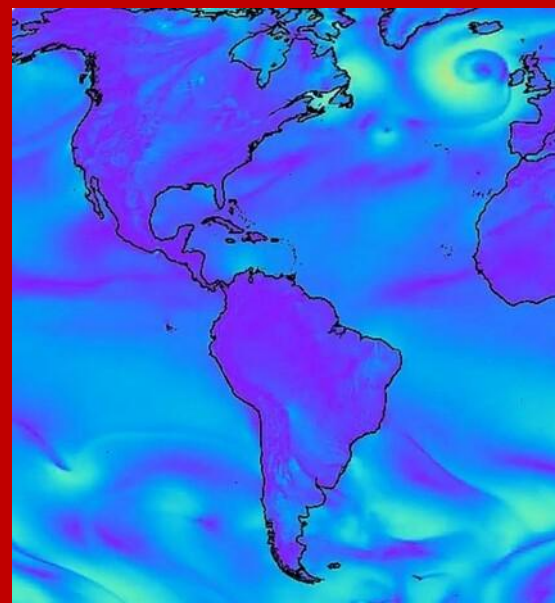
어떤 행동이 과학적, 또는 합리적인 것일까요?
그리고 그러한 과학적 또는 합리적인 행동을 하는 것이
그렇지 않은 것에 비해서 좀 더 나은 이유는 무엇인가요?



예를 들어, 내일 날씨는 어떻게 될지 생각해 봅시다.
내일 날씨를 예측하기 위해서 여러분은
어떤 방법을 사용하겠습니까?



어떤 사람은 내일 날씨를 예측하기 위해 점을 칠 수도 있습니다.
그리고 어떤 사람은 컴퓨터를 사용해
내일 날씨를 계산해서 예측할 수 있습니다.



둘 중에서 어느 쪽이 좀 더 과학적일까요?
그리고 과학적인 것을 여러분들이 더 권장한다면,
그 이유는 무엇인가요?

솔직하게 생각해 봅시다.
내일 날씨를 점을 쳐서 예측을 하더라도,
맞을 확률이 조금은 존재합니다.
그리고 슈퍼 컴퓨터로 내일의 날씨를 계산해서 예측하더라도,
틀릴 확률이 존재합니다.

따라서 과학적인 방법이 항상 옳기 때문에
그것을 우리가 권장하는 것은 아닐지 모릅니다.
과학적 방법론이 다른 방법론보다 우월하다고 말할 수 있다면,
그 이유는 무엇일까요?

여기에서 우리는 과학적 방법론의 예측 능력에 대해서
다음과 같이 두 가지로 질문해 봅시다.

첫째, 우리는 **근본적으로** 미래를 예측할 수 있는가?
둘째, 우리는 **현실적으로** 미래를 예측할 수 있는가?

첫째, 우리는 **근본적으로** 미래를 예측할 수 있는가?

물리학이 바로 이 질문에 대해서 답을 해 줍니다.

과연 우리가 현재 알고 있는 자료로부터
미래를 결정할 수 있는

충분한 **자연 법칙**을 가지고 있을까요?

그렇다면 우리는 적어도 근본적으로는
미래를 예측할 수 있는 것입니다.

둘째, 우리는 **현실적으로** 미래를 예측할 수 있는가?

이것은 개별 과학 분과에서 답해야 할 문제이며,
계산상의 기술적인 한계가 존재할 수 있습니다.

따라서 계산상의 한계를 극복하기 위해서
다양한 가정과 모형화가 필요하고,
이 과정에서 어떤 경우에는 예측에 실패할 수도 있는 것입니다.

여기에서 우리는 물리학이 가지는 의미,
특히 개별 과학 분과의 상위에서 가지는 근본적인 의미를
이해할 수 있게 됩니다.

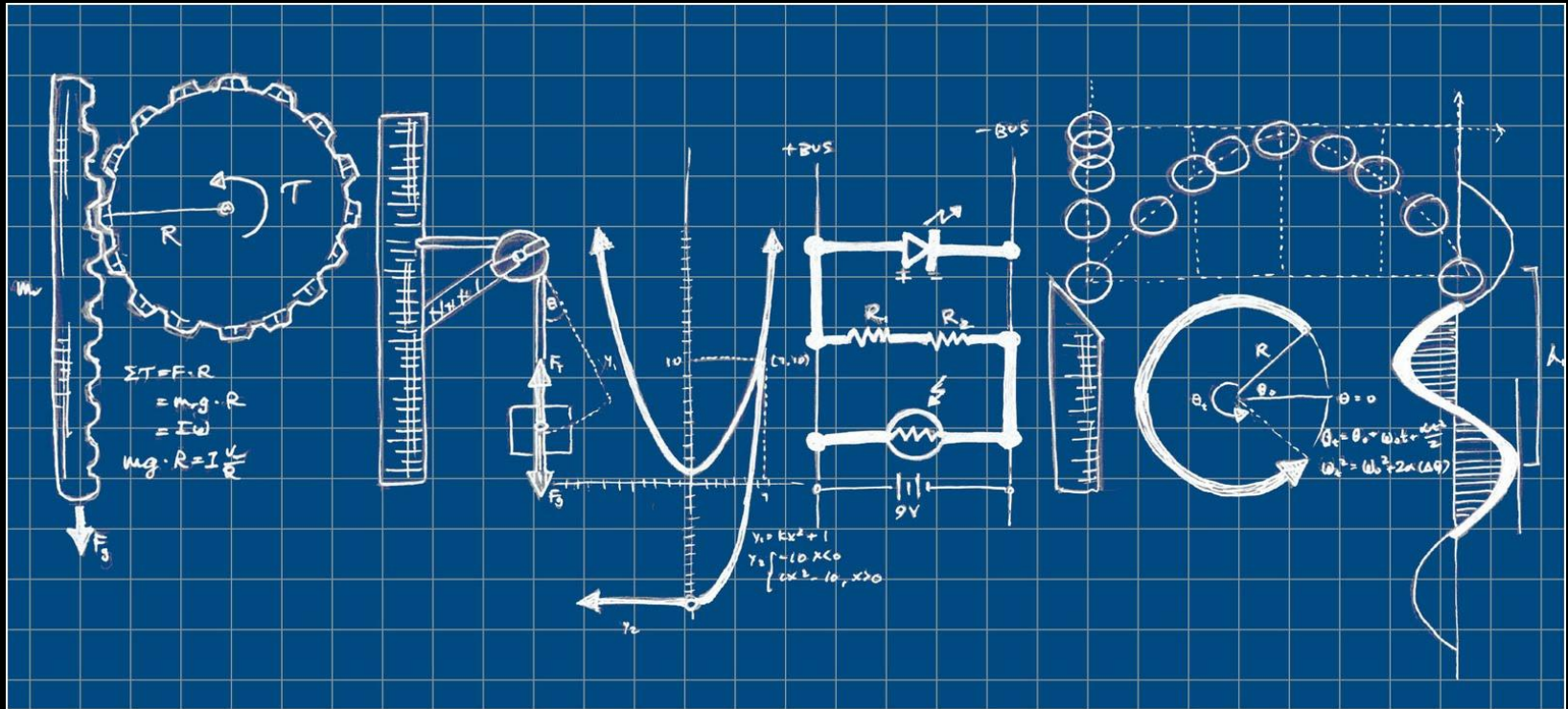
우리는 물리학을 공부함으로써,
인류가 가지고 있는 근본적인 예측 능력이 어디까지인지를
이해할 수 있게 되는 것입니다.

그것으로부터 소위 과학적 방법론이,
물론 기술적인 한계가 때로 있을 수 있더라도,
다른 종류의 비과학적 방법론보다 권장된다는 것을
정당화할 수 있게 되는 것입니다.

과연 우리는 우주의 모든 것에 대해서
근본적인 예측 능력을 가지고 있을까요?

이 과목에서 모든 것을 답해줄 수는 없겠지만,
적어도 이 문제를 답하고자 했던
고전적인 시도에 대해서는 살펴볼 수 있겠습니다.

세상을 수로 기술하다



먼저 **물리학**이라는 단어의 의미로부터
이야기를 시작해 봅시다.

φυσικά

물리학의 의미는 자연을 이해하는 것에 있습니다.

φυσικά

자연을 이해하기 위해서, 우리는 무엇을 알면 될까요?

우리가 가장 먼저 할 수 있는 것은
자연에 있는 대상을 점 입자point particle로 기술하는 것입니다.

이것은 자연에 대한 일종의 근사approximation라고 하겠습니다.

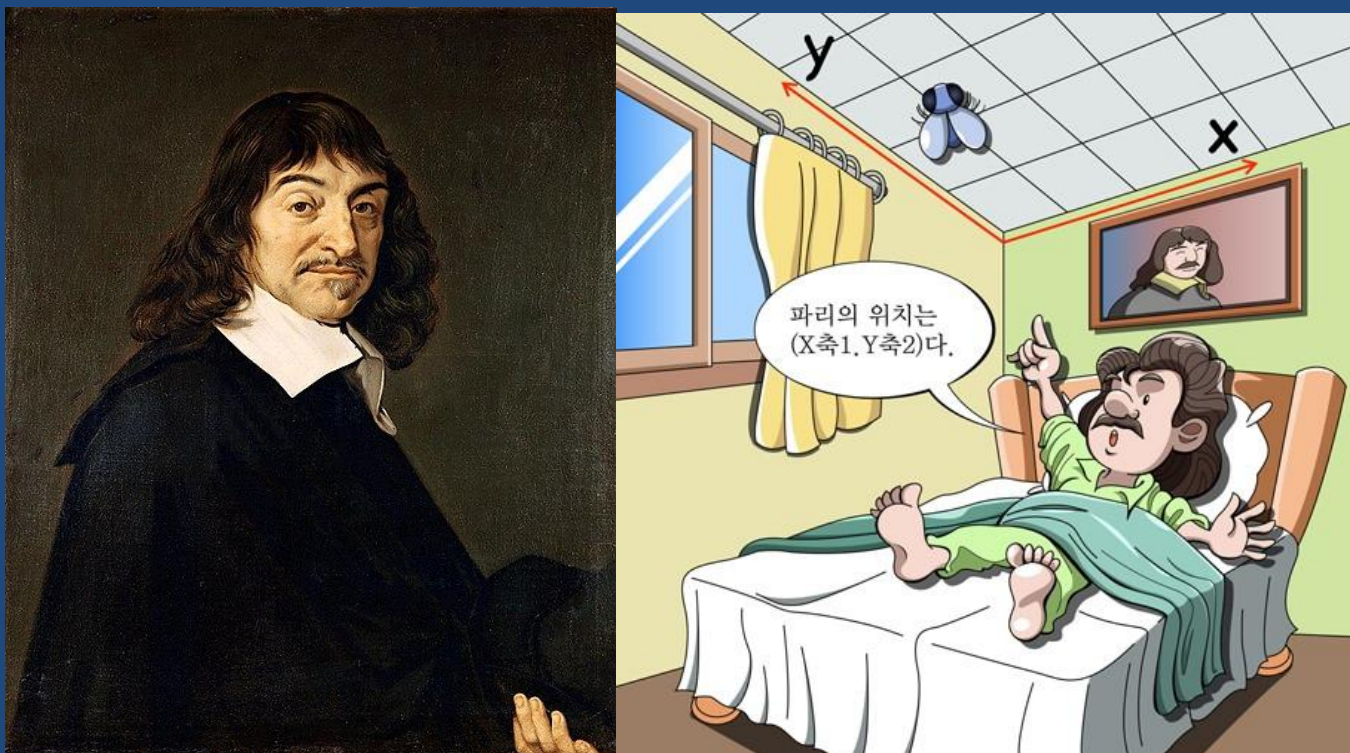
그런데 사실 우리는 이러한 **근사**가 없이는
자연을 기술할 수 없습니다.

자연을 **점 입자**로 기술하는 것은
고전 물리학의 근본적인 가정입니다.

이제 우리는 자연에 존재하는 대상, 즉 점 입자에
어떤 수^{number}를 덧입혀서 기술할 것입니다.
여기에서 객관적인 세계와
주관적으로 부여한 수가
서로 만나야 한다는 것을 알 수 있습니다.

이것은 대체 어떻게 가능할까요?

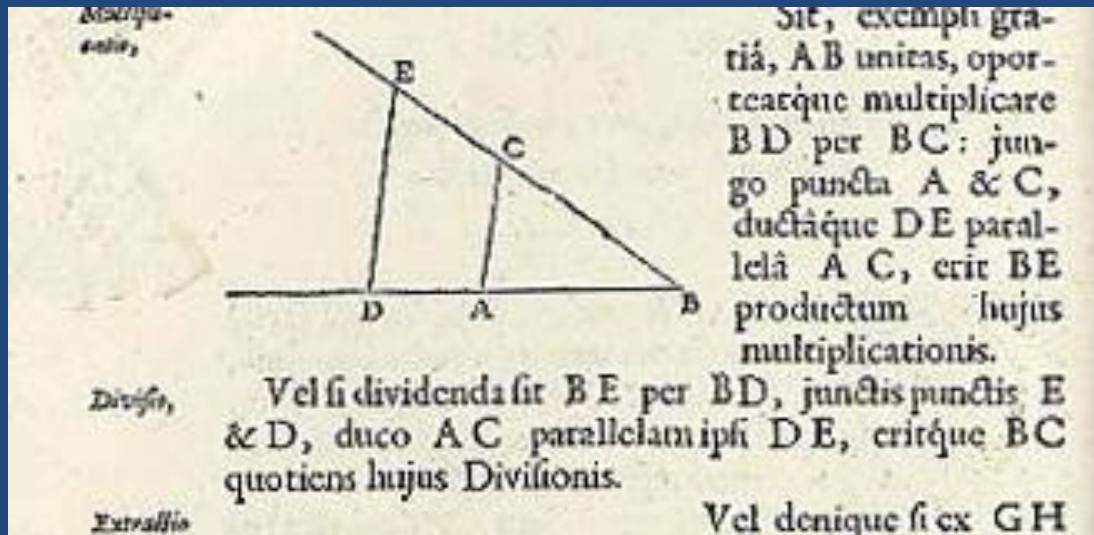
이 이야기를 시작하기 위해 우리는
17세기의 위대한 철학자, 수학자, 물리학자인
르네 데카르트를 떠올려 봅시다.



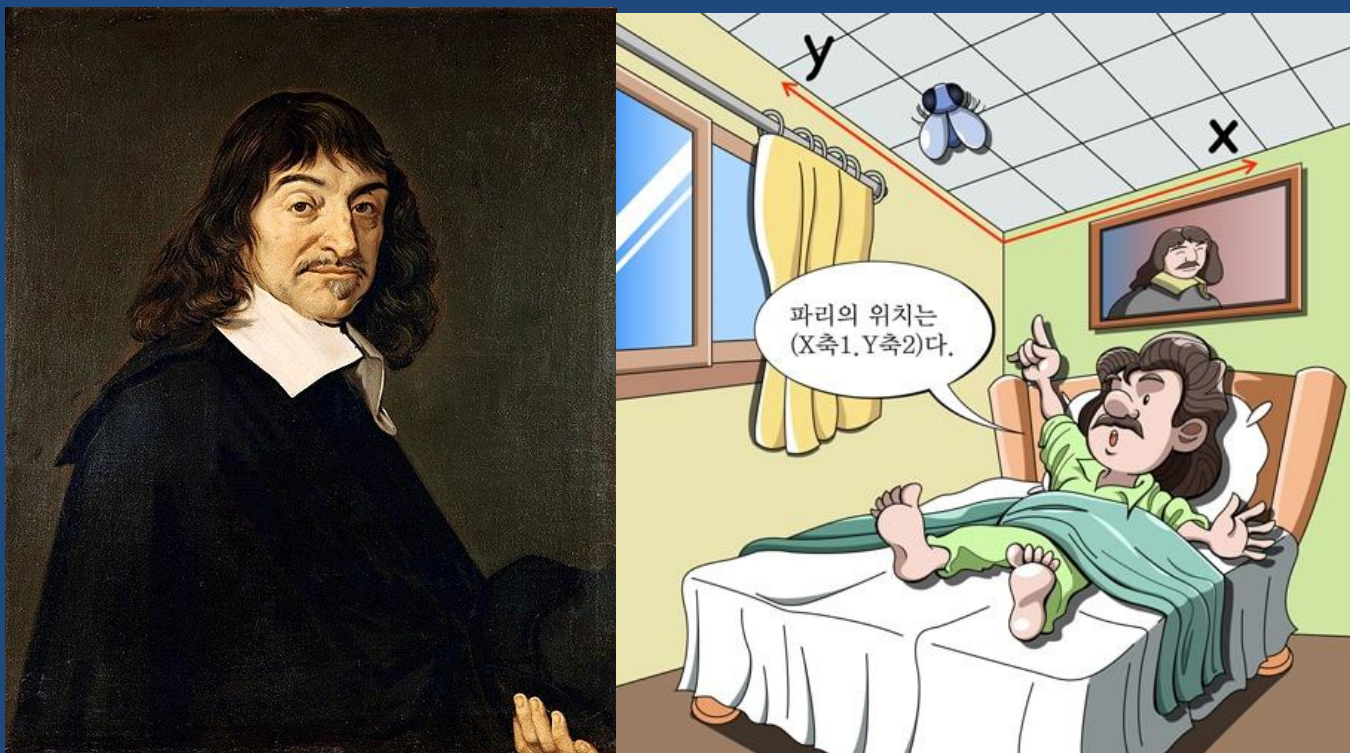
데카르트는 침대에 누워서 천장을 보다가
천장에 벌레가 날아다니는 것을 보게 됩니다.
이것으로부터 그는 **좌표계**의 개념을 도입하게 됩니다.

“세상을 수로 기술하다.”

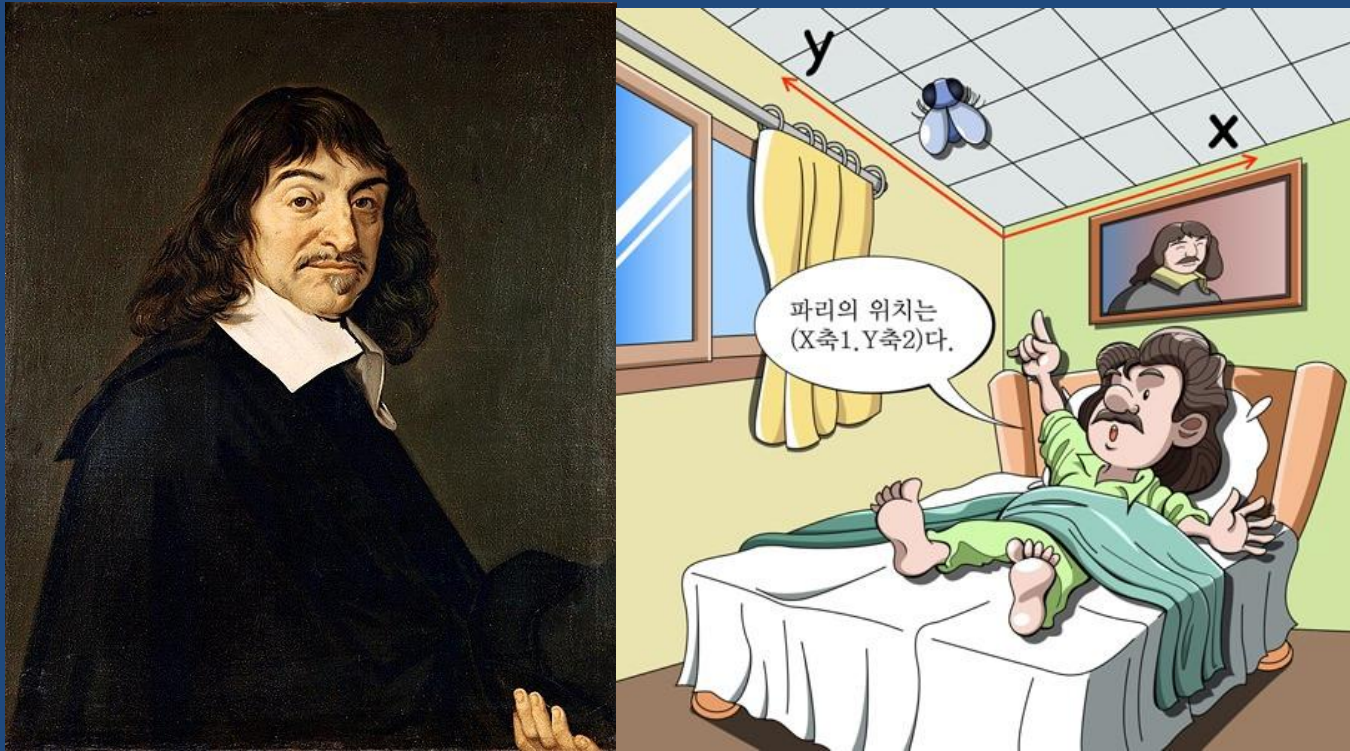
데카르트의 멋진 업적을 이렇게 요약해 봅니다.



그러나 데카르트가 곧 발견한 것은
자연에 수를 부여하기 위해서는
우리의 선택이 필요하다는 것입니다.



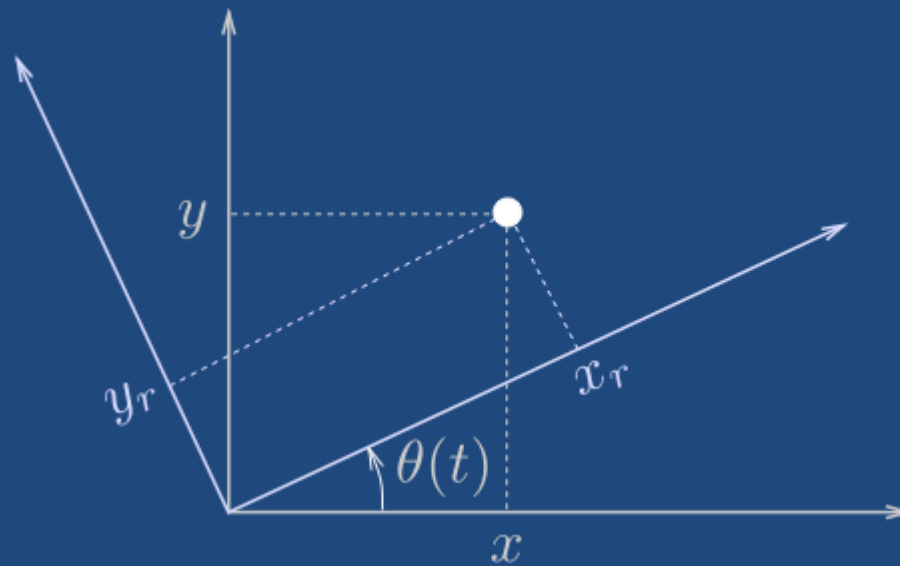
벌레가 움직이는 것은 **객관적**인 현상입니다.
우리는 이 벌레에 수를 부여할 수 있습니다.
그런데 사실 우리는 어떤 수든지 부여할 수 있습니다.
즉, 수를 부여하는 활동은 **주관적**입니다.



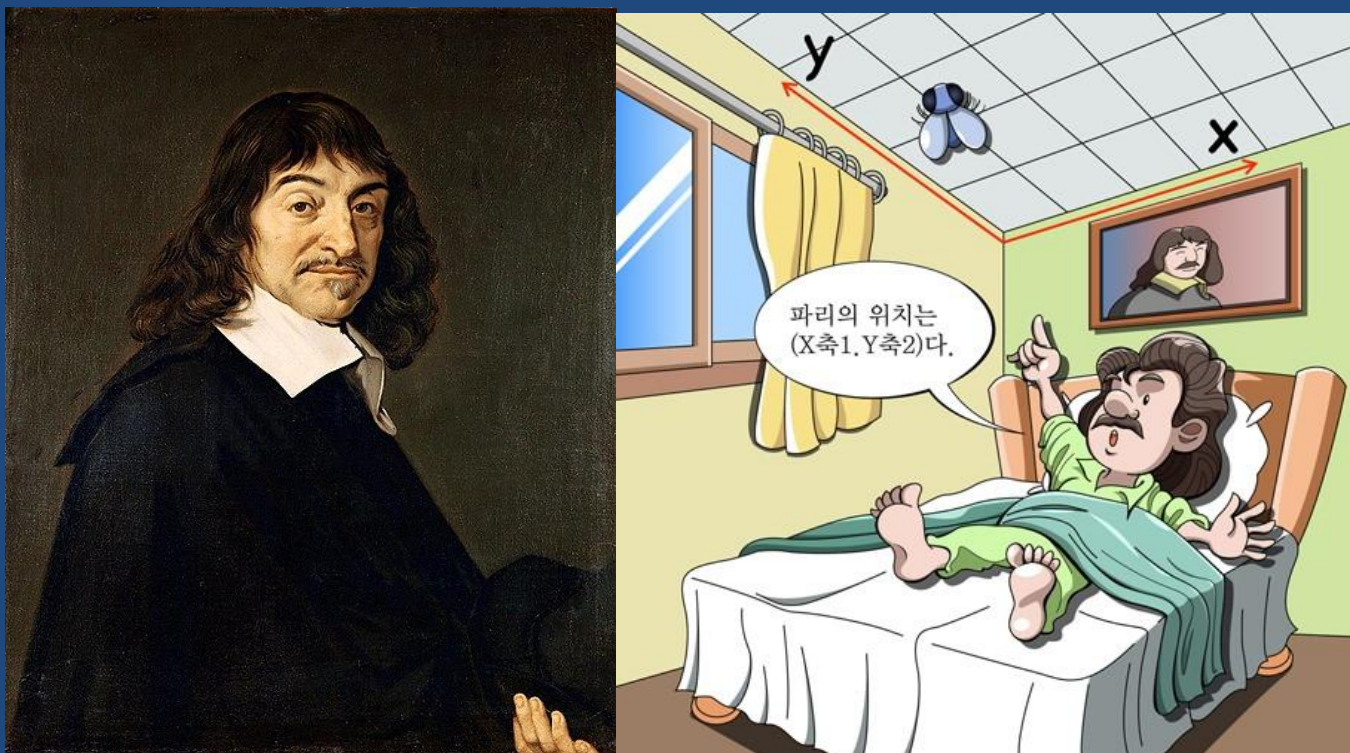
따라서 객관적인 대상에 수를 부여하는 주관적인 작업이
의미를 가지기 위해서는
이 주관적인 활동이 객관적인 뭔가를
담아낼 수 있어야 합니다.



여기에서 수학은 주관적인 도구를 사용하더라도
그 너머에서 객관적인 요소를 다룰 수 있도록 해 줍니다.



예를 들어, 내가 좌표를 다르게 잡더라도,
두 개의 수를 묶어서 기술하면
원점으로부터의 거리는 좌표축의 선택과는 무관하게 됩니다.



이것이 바로 데카르트가 파리를 기술하기 위해
하나의 수가 아니라 두 개의 수를 묶어서 기술한 이유입니다.
이러한 수의 묶음을 **벡터**라고 합니다.

객관적인 세계의 물리 현상은
주관적인 좌표의 설정에 무관해야 합니다.

그렇다면 우리가 자연을 이해하는 방식,
즉 자연을 결정하는 방정식은
그 값 자체는 좌표의 설정에 의존하지만
수학적인 형태가 좌표의 설정과 무관하게,
즉 좌표 변환에 대해 일정한 방식으로
함께 변해야 한다는 것을
말할 수 있습니다.

이것을 공변성covariance이라고 합니다.

따라서 자연의 근본적인 방정식을 구성하는 요소들은
공변성을 표현하기 쉬운 방식으로 표현되어야 합니다.
즉, 좌표 변환에 대해서 일정한 패턴으로 변환하는 요소들을
기본적인 구성 요소building block로 삼아야 합니다.

이렇게 공변성을 확장하는 과정이
역학의 발전과 관련됩니다.

뉴턴 역학에서 라그랑주 역학으로,
그리고 특수 상대성 이론과 일반 상대성 이론으로 확장되는 과정은
자연의 법칙을 조금 더 공변적으로 표현하려는 노력과
깊이 연관되어 있는 것입니다.

$$\phi \quad \vec{A} \quad T_{ab}$$

이렇게 수학적으로 공변성을 쉽게 표현할 수 있는 물리량들을
스칼라, 벡터, 텐서 등으로 부릅니다.

책 소개	III	4-3 평균가속도와 순간가속도	64
옮긴이 글	VI	4-4 포물선 운동	66
		4-5 등속 원운동	73
		4-6 1차원 상대운동	75
		4-7 2차원 상대운동	77
CHAPTER 1 측정	1	장리 및 오역	79
1-1 길이를 포함한 물리량의 측정	1	연습문제	79
1-2 시간	5		
1-3 질량	6		
장리 및 오역	8		
연습문제	9	CHAPTER 5 힘과 운동-I	85
		5-1 Newton의 제1 및 제2 운동법칙	85
CHAPTER 2 직선운동	13	5-2 특별한 힘	93
2-1 위치, 변위, 평균속도	13	5-3 Newton의 법칙 응용	97
2-2 순간속도와 속력	18	장리 및 오역	105
2-3 가속도	20	연습문제	106
2-4 등가속도 운동	24		
2-5 자유낙하 가속도	28	CHAPTER 6 힘과 운동-II	111
2-6 그래프 적분을 이용한 운동 해석	30	6-1 마찰	111
장리 및 오역	32	6-2 항력과 종단속력	117
연습문제	33	6-3 등속 원운동	120
		장리 및 오역	125
CHAPTER 3 벡터	39	연습문제	126
3-1 벡터와 성분	39		
3-2 단위벡터, 성분을 이용한 벡터의 덧셈	45	CHAPTER 7 운동에너지와 일	133
3-3 벡터 곱하기	49	7-1 운동에너지	133
장리 및 오역	54	7-2 일과 운동에너지	135
연습문제	55	7-3 중력이 한 일	140
		7-4 용수철 힘이 한 일	144
CHAPTER 4 2차원 운동과 3차원 운동	59	7-5 변하는 힘이 한 일	147
4-1 위치와 변위	59	7-6 일률	151
4-2 평균속도와 순간속도	61	장리 및 오역	153
		연습문제	154

우리가 물리학을 처음 공부하면
단위, 좌표, 벡터 등에 대해서 배워야 하는 이유가
바로 여기에 있습니다.

운동이란?

$$\vec{x}_i(t)$$

고전 물리학에서 말하는 운동에 대해서 좀 더 자세히 살펴봅시다.

$$\vec{x}_i(t)$$

운동이란 입자의 위치에 대한 것입니다.

$$\vec{x}_i(t)$$

이러한 운동은 세 가지 중요한 특징을 가지고 있습니다.

$$\vec{x}_i(t)$$

첫째로, 운동은 입자에 대한 것입니다.
이 입자에는 질량 및 전하와 같은
몇 가지 고정 불변의 속성이 부여됩니다.

$$\vec{x}_i(t)$$

둘째로, 운동은 시간의 함수입니다.
따라서 운동은 입자의 변화를 기술합니다.

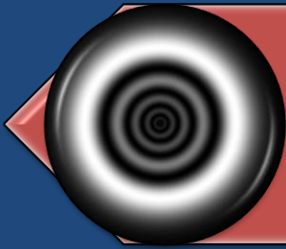
$$\vec{x}_i(t)$$

셋째로, 운동은 벡터로 표현됩니다.
이것은 운동이 어떤 수학적 질서를 통해
표현되어야 한다는 것을 의미합니다.

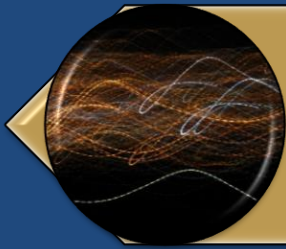
고전 물리학을 넘어선다는 것은
앞에서 말한 요소들을 넘어선다는 것을 의미할 것입니다.

입자의 위치가 아닌 파동 함수로,
점입자를 넘어선 장으로,
시간의 함수만이 아닌 시간과 공간의 함수로,
그리고 벡터뿐만 아니라 스칼라, 텐서 등의 다양한 구성 요소로
우리의 이론을 확장시킬 수 있을 것입니다.

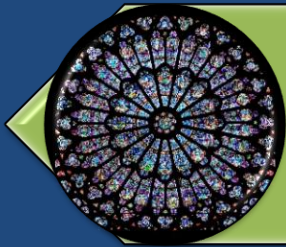
운동을 이해하는 방법



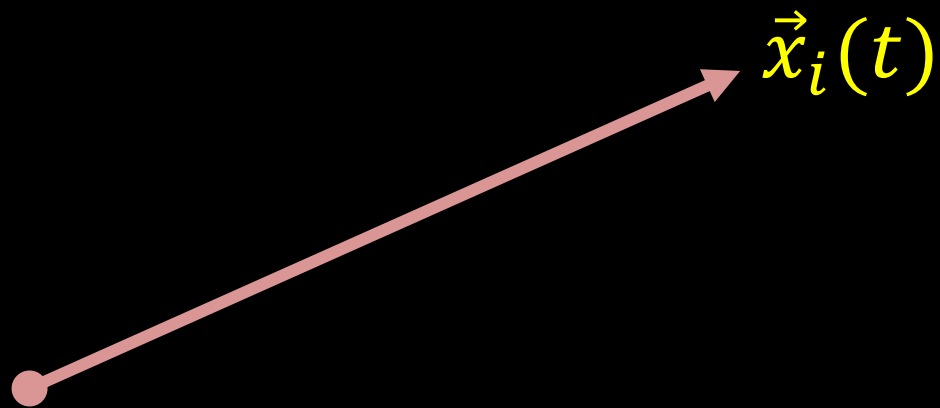
자연을 구성하는
기본 대상



대상의
변화/운동

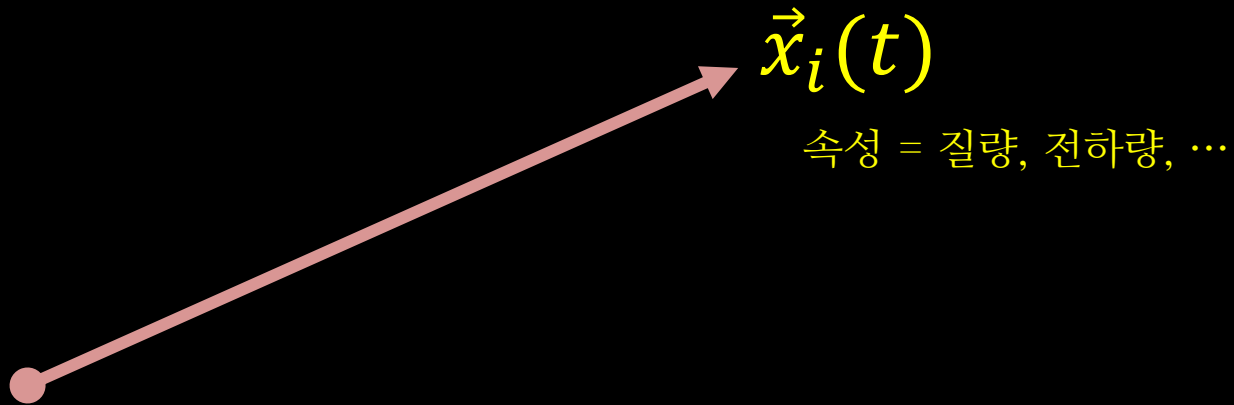


대상과 변화를 기술할 때의
질서와 대칭성



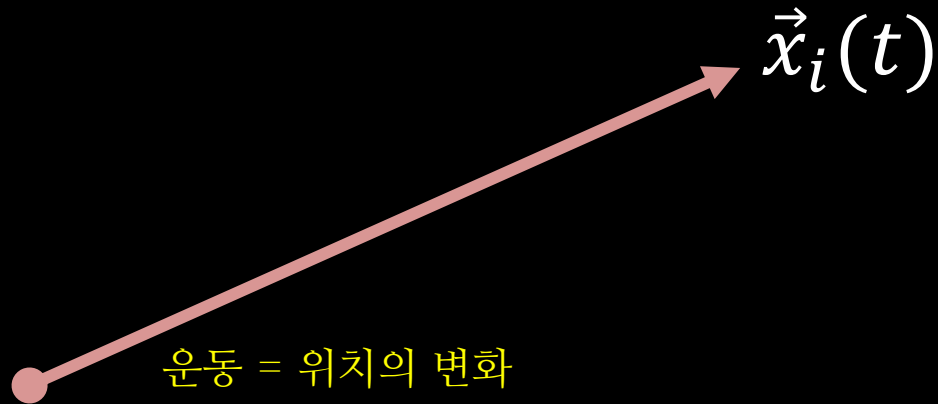
고전 물리학에서는 입자의 위치를 알면
모든 것을 이해할 수 있다고 생각합니다.

자연을 구성하는 기본 대상

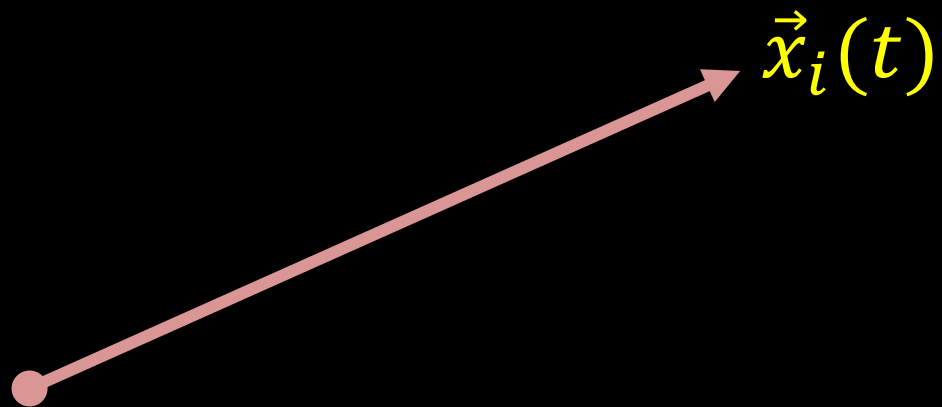


고전 물리학에서는 입자의 위치를 알면
모든 것을 이해할 수 있다고 생각합니다.

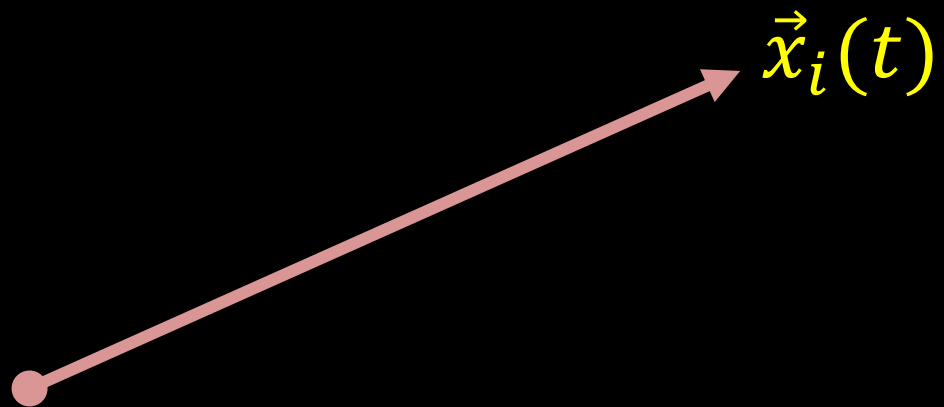
대상의 변화/운동



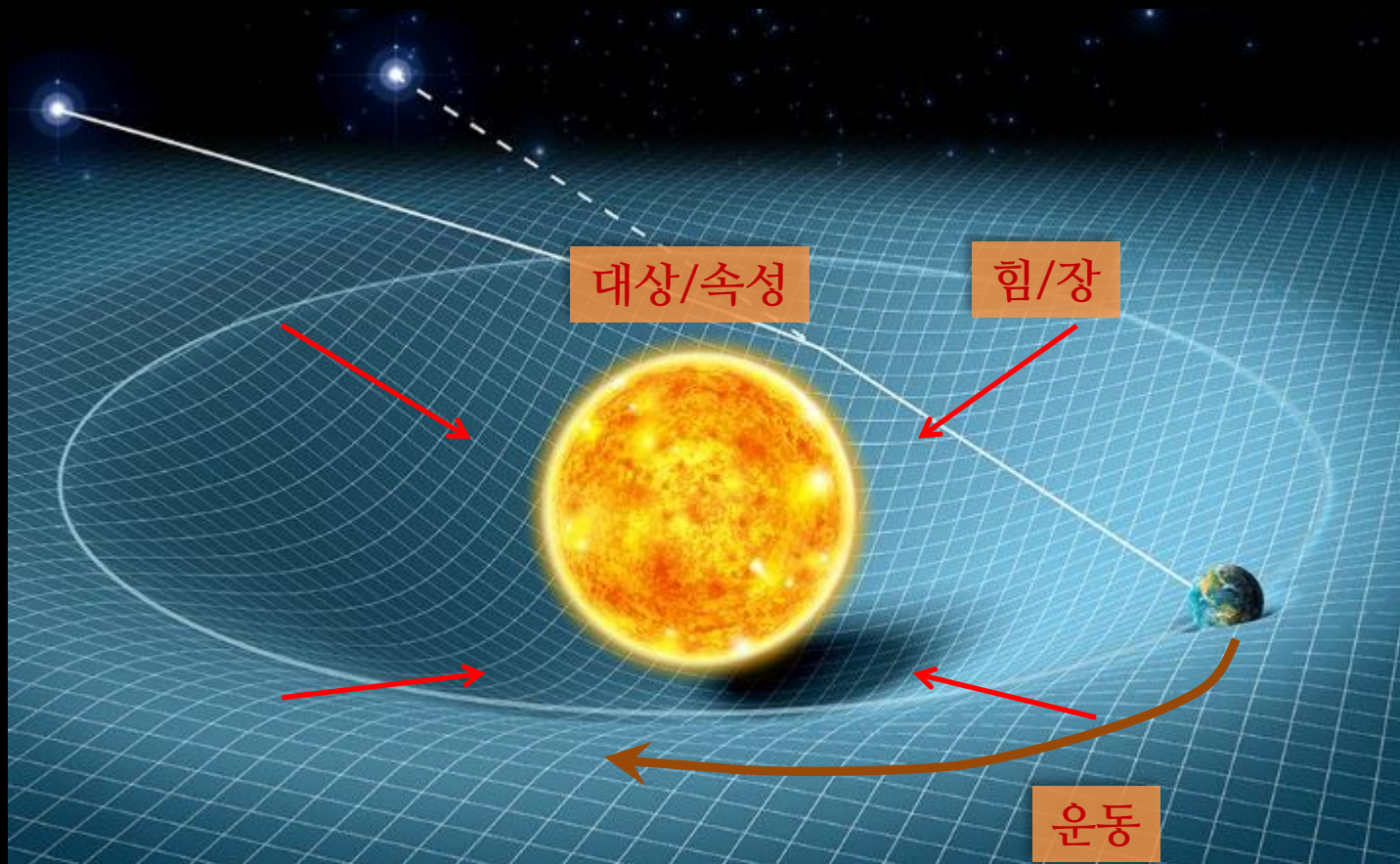
고전 물리학에서는 입자의 위치를 알면
모든 것을 이해할 수 있다고 생각합니다.



그러면 입자의 위치는 어떻게 알 수 있을까요?



우리는 입자의 위치를 방정식을 풀어서 알 수 있습니다.



대상

object/source

힘/장

force/field

운동

motion

장 방정식
field equation

운동 방정식
equation of motion



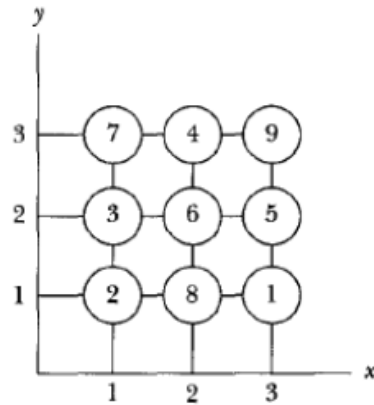
우리는 세상을 예측하기 위해서
방정식을 풀어야 합니다.

방정식, 특히 미분 방정식을 푸는 것이야말로
세상을 예측하는 가장 강력한 무기가 됩니다.

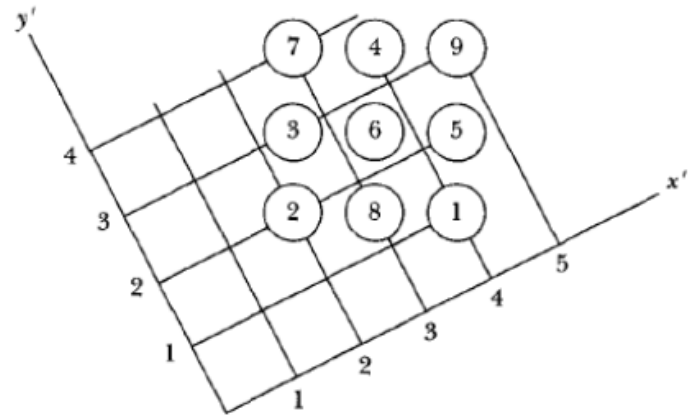
그러면 과연 우리는 자연을 결정할 수 있는
충분한 방정식을 알고 있을까요?
그리고 고전 물리학 너머에서는
어떤 방식으로 세상을 이해하려고 할까요?

1장 행렬과 벡터, 벡터 계산

$$M(x, y) = M(x', y')$$



(a)



(b)

스칼라(scalar)는 좌표 변환에 대해서
변하지 않는 물리량을 말합니다.

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{pmatrix}$$

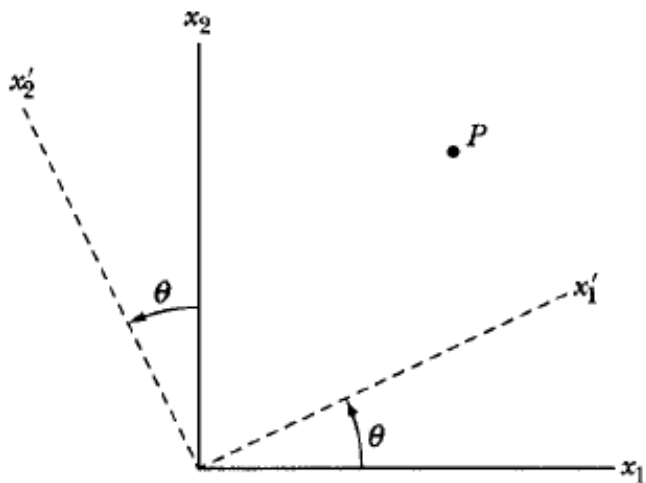
$$x'_i = \sum_{j=1}^3 \lambda_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, 3$$

좌표 변환 중에서 다음과 같이
행렬에 의해서 기술되는 좌표 변환을 생각해 봅시다.

$$\sum_j \lambda_{ij} \lambda_{kj} = \delta_{ik}$$

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 0, & \text{if } i \neq k \\ 1, & \text{if } i = k \end{cases}$$

다음과 같은 조건의 경우 직교 행렬이라고 합니다.
회전 변환은 직교 행렬의 한 예가 됩니다.



$$\left. \begin{aligned} x_1' &= x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta \\ x_2' &= -x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta \end{aligned} \right\}$$

다음과 같은 조건의 경우 직교 행렬이라고 합니다.
회전 변환은 직교 행렬의 한 예가 됩니다.

$$x'_i = \sum_j \lambda_{ij} x_j$$

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}' = \mathbf{\lambda x}$$

$$\left. \begin{aligned} x'_1 &= \lambda_{11}x_1 + \lambda_{12}x_2 + \lambda_{13}x_3 \\ x'_2 &= \lambda_{21}x_1 + \lambda_{22}x_2 + \lambda_{23}x_3 \\ x'_3 &= \lambda_{31}x_1 + \lambda_{32}x_2 + \lambda_{33}x_3 \end{aligned} \right\}$$

다음 네 가지는 모두 동일한 것을 표현하고 있습니다.

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB}$$

$$C_{ij} = [\mathbf{AB}]_{ij} = \sum_k A_{ik} B_{kj}$$

행렬의 곱

$$\lambda_{ij}^t = \lambda_{ji}$$

치환transpose

$$\lambda \lambda^{-1} = \mathbf{1}$$

역행렬inverse

$$\lambda^t = \lambda^{-1}$$

직교 행렬orthogonal matrix

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$$

일반적으로
교환 법칙이 성립하지 않음

$$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} = \mathbf{1}$$

$$\mathbf{1A} = \mathbf{A1} = \mathbf{A}$$

항등원identity

$$[\mathbf{AB}]\mathbf{C} = \mathbf{A}[\mathbf{BC}]$$

결합 법칙

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \sum_i A_i B_i$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos(\mathbf{A}, \mathbf{B})$$

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \sqrt{\sum_i x_i^2}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= \sum_i A_i B_i = \sum_i B_i A_i = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \\ \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) &= \sum_i A_i (B + C)_i = \sum_i A_i (B_i + C_i) \\ &= \sum_i (A_i B_i + A_i C_i) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \end{aligned}$$

벡터의 스칼라 곱은 위와 같은 성질을 가지고 있습니다.

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$$

$$\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$$

왼쪽의 두 방식으로 표현할 수 있습니다.

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}_1 A_1 + \mathbf{e}_2 A_2 + \mathbf{e}_3 A_3$$

벡터의 크기를 1이 되도록 하면 단위 벡터unit vector가 됩니다.
우리는 기저basis를 단위 벡터로 선택할 수 있습니다.

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$$

$$\boxed{C_i \equiv \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} A_j B_k} \quad \left. \begin{array}{l} 0, \quad \text{if any index is equal to any other index} \\ \varepsilon_{ijk} = +1, \quad \text{if } i, j, k \text{ form an } \textit{even} \text{ permutation of } 1, 2, 3 \\ -1, \quad \text{if } i, j, k \text{ form an } \textit{odd} \text{ permutation of } 1, 2, 3 \end{array} \right\}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$

행렬식determinant 표현

한편, 벡터의 벡터 곱은 위와 같이 정의됩니다.

$$C = AB \sin \theta$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \neq (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$$

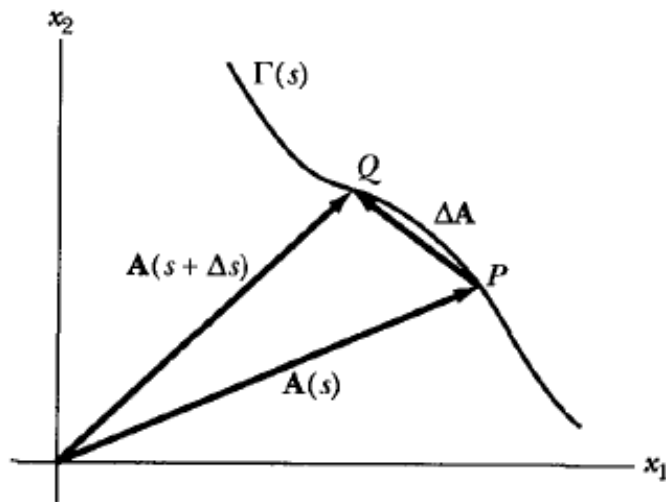
$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} \quad \text{BAC-CAP rule}$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})$$

$$\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \sum_k \mathbf{e}_k \varepsilon_{ijk}$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) &= [(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{D}]\mathbf{C} - [(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}]\mathbf{D} \\ &= (\mathbf{ABD})\mathbf{C} - (\mathbf{ABC})\mathbf{D} = (\mathbf{ACD})\mathbf{B} - (\mathbf{BCD})\mathbf{A} \end{aligned}$$

그리고 위와 같은 성질을 가지고 있습니다.



$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(s)$$

$$\frac{d\mathbf{A}}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{A}}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\mathbf{A}(s + \Delta s) - \mathbf{A}(s)}{\Delta s}$$

벡터 함수를 다양하게 미분할 수 있는데,
그 중에서 역학에서는 주로 스칼라 변수의 미분을 다루게 됩니다.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$$

위치position

$$\mathbf{v} \equiv \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}$$

속도velocity

$$\mathbf{a} \equiv \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \ddot{\mathbf{r}}$$

가속도acceleration

벡터 중에서 가장 중요한 벡터는 바로
위치 벡터와 그의 미분들입니다.

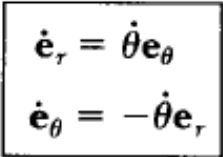
이번 장에서 가장 중요한 문제로
입자의 위치, 속도, 가속도 벡터를
직교 좌표계와 평면 극좌표계에서 표현해 봅시다.
여기에 고전 역학의 정수가 담겨있습니다.

$$\mathbf{r} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \sum_i \dot{x}_i \mathbf{e}_i$$

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}} = \sum_i \ddot{x}_i \mathbf{e}_i$$

먼저 직교 좌표계는 간단합니다.
 기저 벡터들이 시간에 따라 변하지 않기 때문입니다.

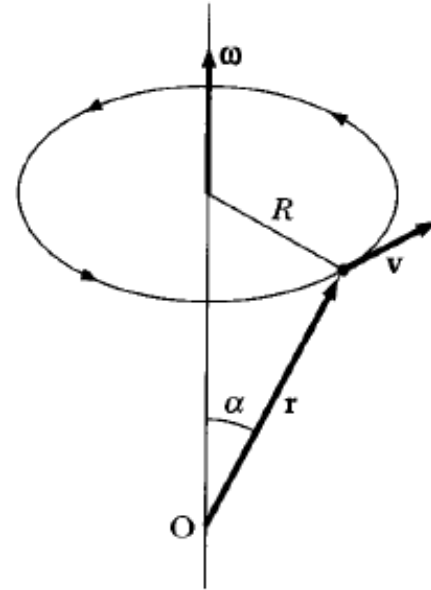


$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \frac{d}{dt}(\dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta) \\ &= \ddot{r}\mathbf{e}_r + \dot{r}\dot{\mathbf{e}}_r + \dot{r}\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\mathbf{e}}_\theta \\ &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta\end{aligned}$$

평면 극좌표계에서는 기저도 시간에 따라 변합니다.
기저의 미분으로부터 속도와 가속도의 표현을 구할 수 있습니다.

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$$

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$



마지막으로 회전 운동의 경우,
각변위는 벡터가 아니지만
미소 각변위와 각속도는 벡터가 된다는 것을
기억해 두시다.

감사합니다