

2장 뉴턴 역학

이번 장에서는 뉴턴 역학에 대해서 살펴봅시다.
이 질문에 답하기 위해, 우리는 운동의 본질이 무엇인지에 대해서
질문해봐야 하겠습니다.

$$\vec{x}_i(t)$$

고전 물리학에서의 운동이란
입자의 위치를 시간에 따라 기술하는 것을 말합니다.

그러면 운동을 어떻게 기술할 수 있을까요?

운동을 기술하는 방법을 이해하기 위해서는,
운동의 **원인**을 이해해야 합니다.

어떤 물체는 왜 운동할까요?
또는, 어떤 물체는 왜 움직일까요?



아리스토텔레스는 생각하기를
운동motion은 원동자mover가 있기 때문에
발생한다고 생각했습니다.



일견 이러한 관점은 우리의 경험과 일치하는 것처럼 보입니다.
예를 들면, 골프공은 **골프공을 치는 행위**가
원동자가 되기 때문에 굴러갑니다.
그러나 더 이상 원동자가 작용하지 않으면 멈추게 됩니다.



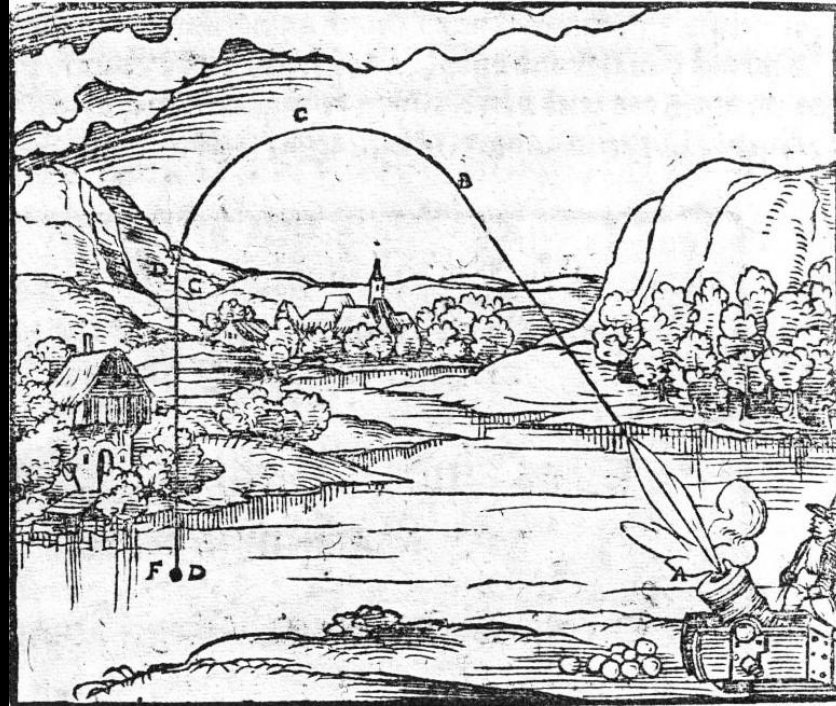
그러나 이러한 설명도 완벽해 보이지는 않습니다.
골프공을 치는 것은 한 순간인데,
공은 상당한 시간 굴러가기 때문입니다.
원동자가 없어도, 어느 정도는 운동을 계속한다는 것입니다.



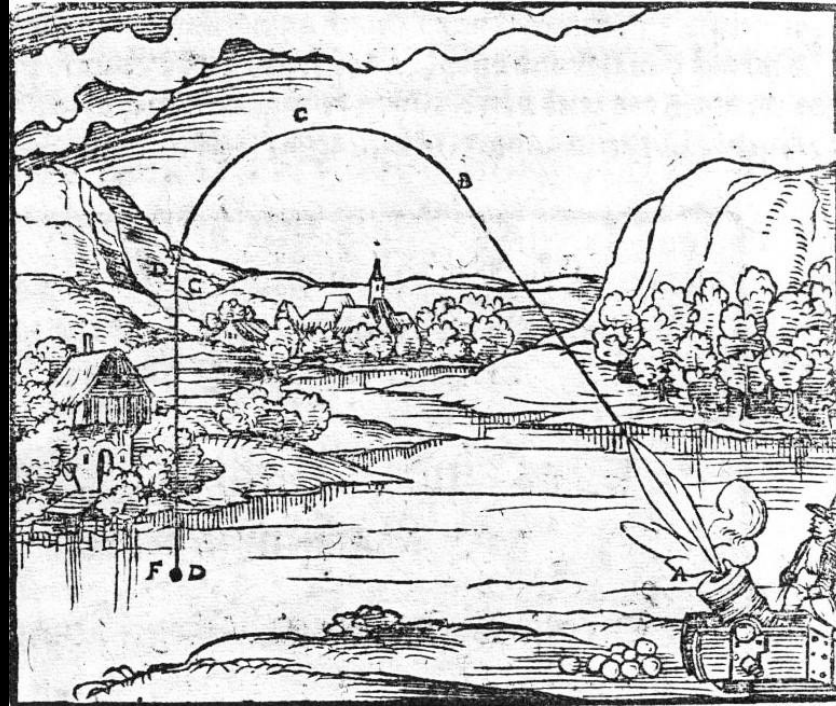
팽이의 운동도 마찬가지로입니다.
지속적으로 원동자가 작용하지 않더라도
팽이가 상당 시간 돌아가는 것은 어떻게 설명할 수 있을까요?



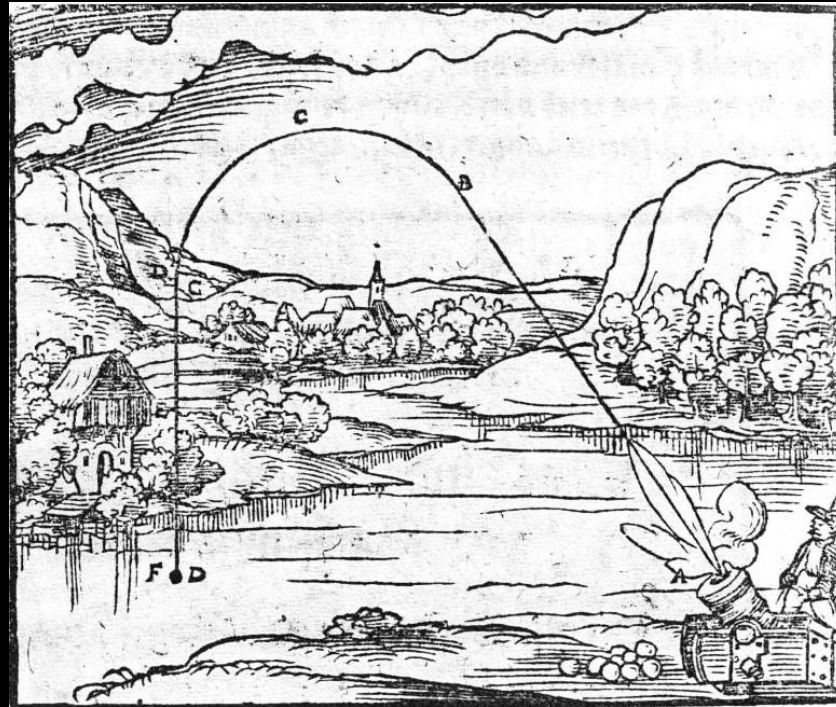
여기에 대한 가장 쉬운 설명은 이렇습니다.
팽이를 처음 돌릴 때 **뭔가**를 물체에 부여했는데
이 뭔가가 **보존**되기 때문이라고 해석하는 것입니다.



임페투스 이론에 의하면,
포사체는 임페투스가 충만할 때는 직선으로 이동하다가,
임페투스가 줄어들면서 원호 모양으로 움직이고,
마침내 임페투스가 다 소모되면 아래로 떨어지게 됩니다.



포사체의 운동에 대한 이러한 설명은
우리의 경험과도 잘 부합하는 것 같습니다.



물론 임페투스라는 것은
어떤 경우에는 보존되는 것처럼 보이지만,
어떤 경우에는 보존되지 않아야 합니다.

물체는 운동을 하면서 왜 임페투스를 잃게 될까요?
즉, 왜 직선 운동을 지속하지 않고
아래로 떨어지게 될까요?

이 문제를 이해하기 위해서는
물체의 낙하 운동,
즉 자유 낙하 운동에 대해서
살펴보아야 하겠습니다.



사실 물체의 낙하에 대한 다양한 관찰은
아리스토텔레스 시절부터 있어왔던 것입니다.

만약 다른 특성은 동일하지만
무게 또는 가벼움에 있어서
그 충격의 차이가 있는 물체들이 있다면,
그 크기의 상대적 비율에 따라
동일한 공간을 빠르게 이동한다.

아리스토텔레스, '물리학' 중

$$v \propto \frac{W}{R}$$

아마도 아리스토텔레스는 낙하하는 물체의 속력이 무게에 비례하고 저항에 반비례한다고 생각했던 것 같습니다.



사실 공기의 저항이 있기 때문에
낙하하는 물체의 속력이 무게에 비례하고
저항을 만들어내는 요소(유체의 점성이나 부피)에 반비례한다고
생각하는 것은 자연스러워 보입니다.

$$v \propto \frac{W}{R}$$

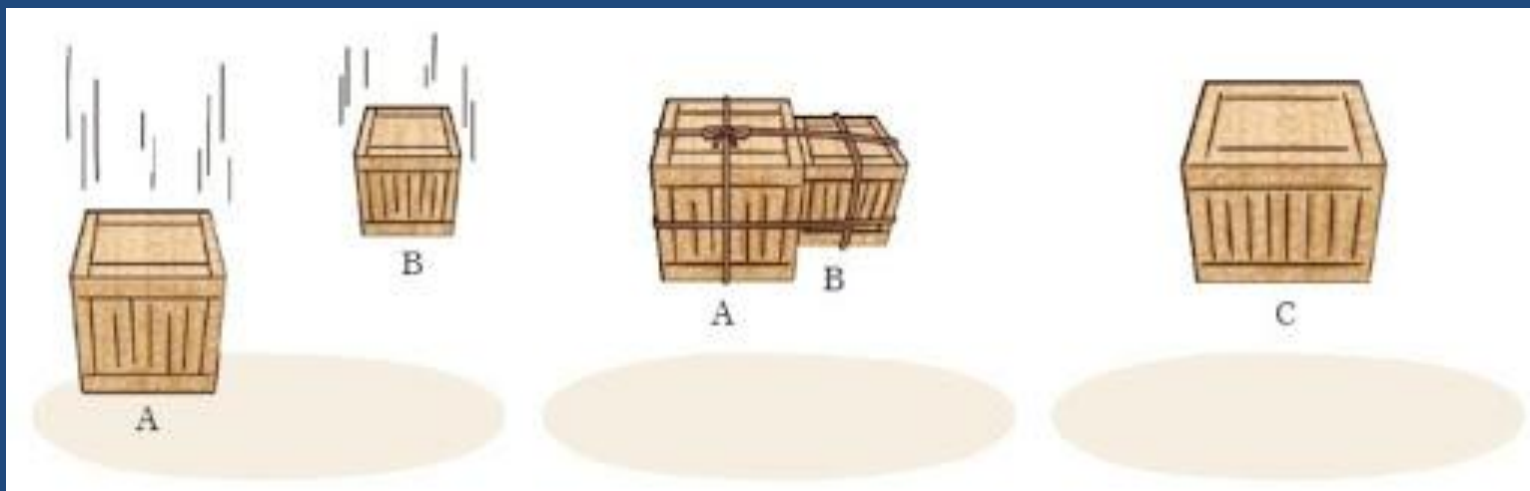
저항이 없다면 물체의 속력은 무한대가 됩니다.
따라서 어쩌면 아리스토텔레스는 진정한 의미의 진공이라는 것은
존재할 수 없다고 말하는 것인지도 모르겠습니다.

$$v \propto \frac{W}{R}$$

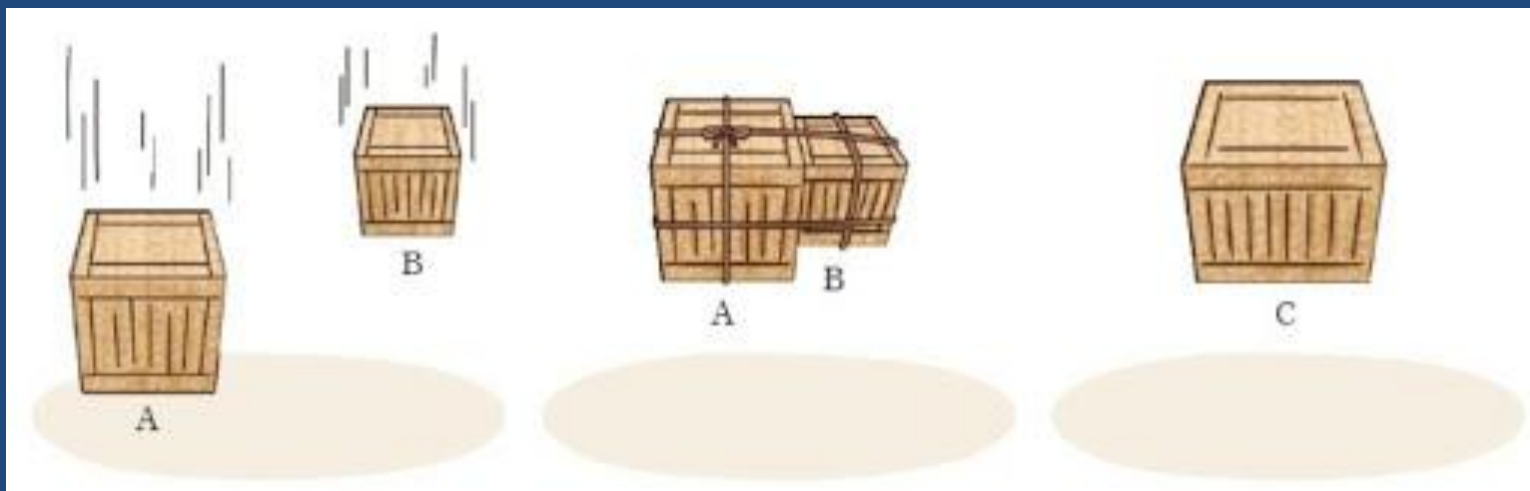
그러면 이러한 마찰 또는 저항은
물체의 운동에 있어서 **본질적인 요소**인 것일까요?
아니면 현실적으로 존재하기는 하지만
물체의 운동에 대한 **비본질적인 요소**인 것일까요?

$$v \propto \frac{W}{R}$$

아리스토텔레스의 관점에서는 어느 정도
물체의 저항이 자유 낙하 과정에서의
본질적인 요소 중 하나에 해당한다고 말하는 것처럼 보입니다.



그러나 갈릴레이는 이렇게 생각했습니다.
만일 자유 낙하하는 물체의 속력이 물체의 무게에 비례한다면,
두 물체 A와 B를 엮었을 때의 속력은 어떻게 될까요?
A의 속력보다 빠를까요, 아니면 느릴까요?



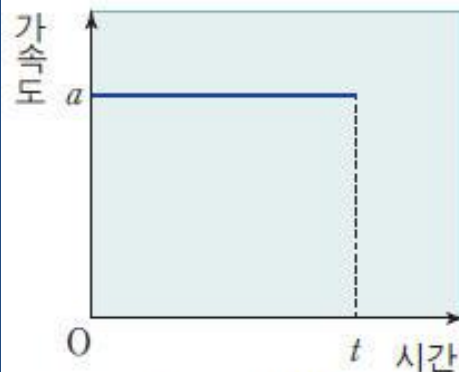
갈릴레이는 이러한 사고 실험을 통해서
마찰은 자유 낙하 운동의 본질이 아니며,
운동의 본질의 관점에서 다시 본다면, 자유 낙하 운동은
무게에 의존하지 않아야 한다는 것을 발견했던 것입니다.



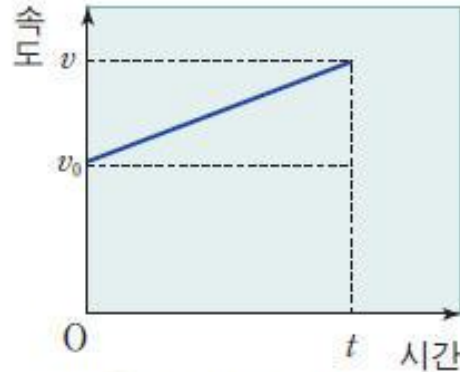
이러한 관점에서 갈릴레이는 자유 낙하 운동을 연구하였습니다.
갈릴레이는 빗면에 쇠구슬을 실제로 굴러가면서
자유 낙하 운동의 본질을 탐색한 것으로 생각됩니다.



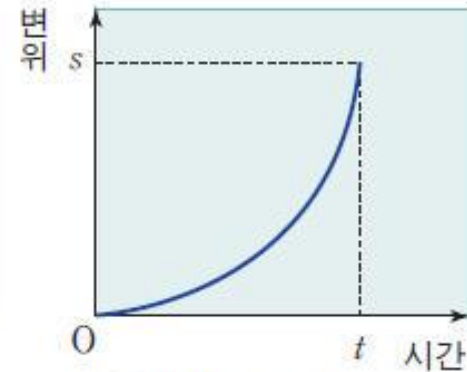
갈릴레이가 빗면을 사용한 이유는
물체가 낙하하는 시간을 늦추기 위해서라고 할 수 있습니다.
갈릴레이는 쇠공을 빗면을 따라 굴리며
일정한 시간마다 이동 거리를 측정하였습니다.



가 가속도 - 시간 그래프

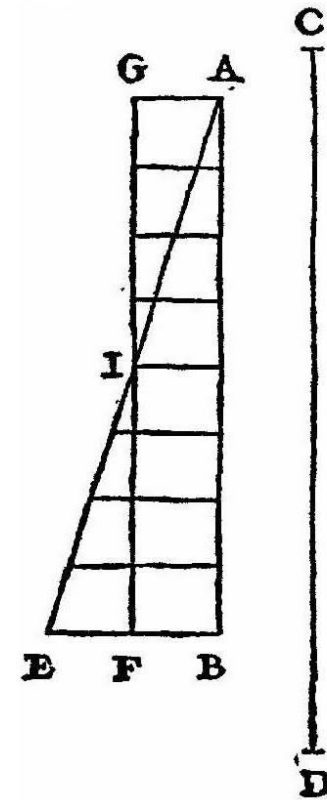
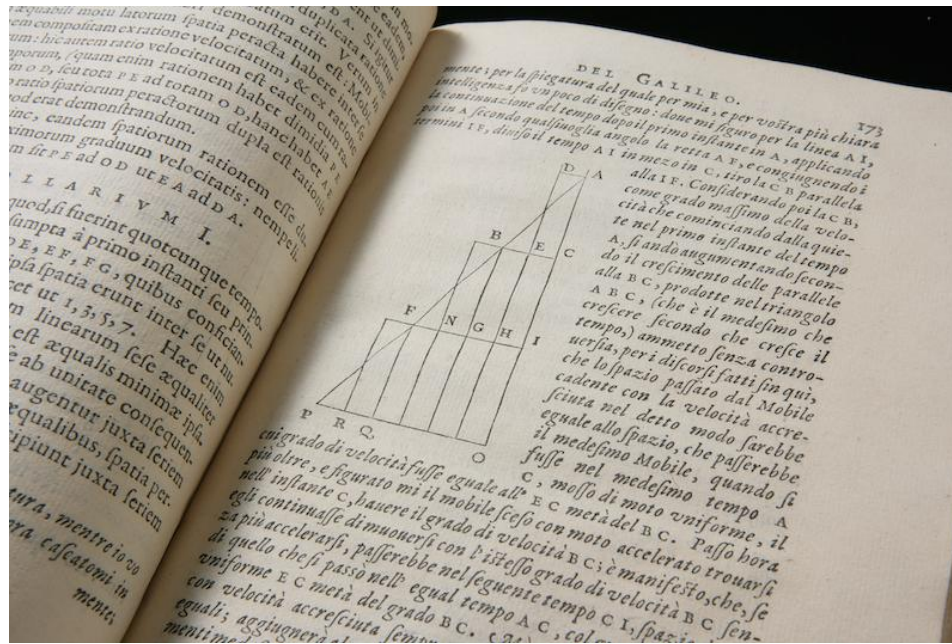


나 속도 - 시간 그래프

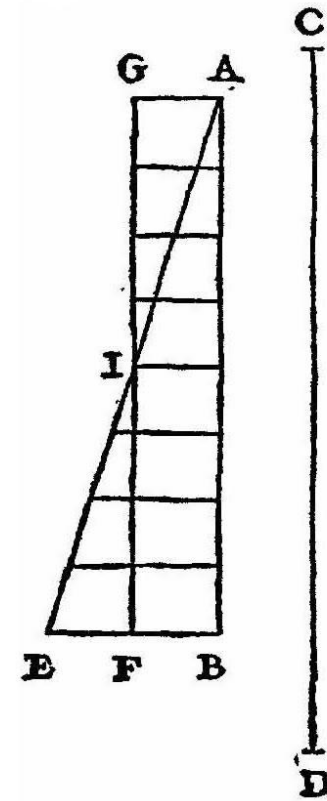
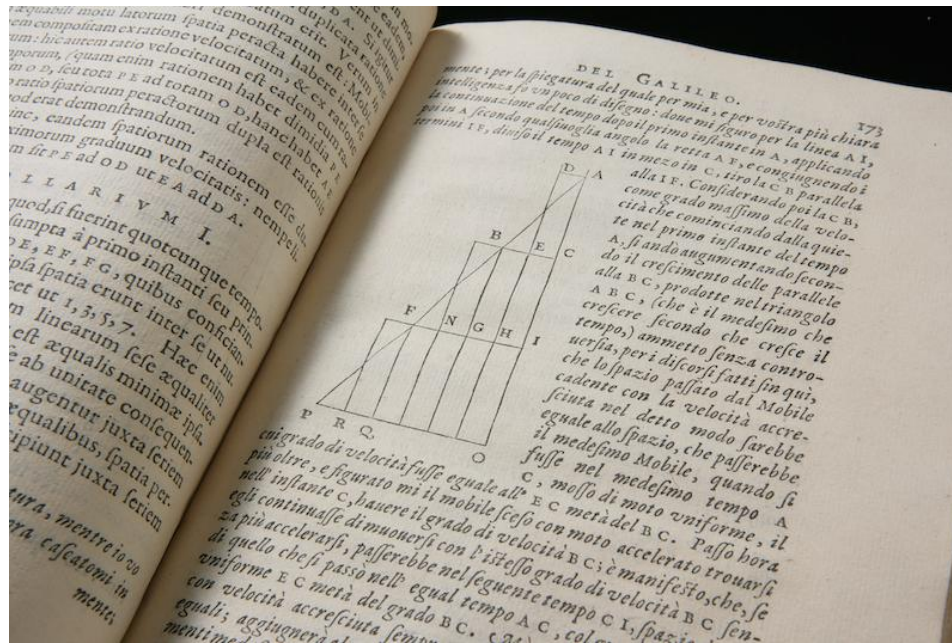


다 변위 - 시간 그래프

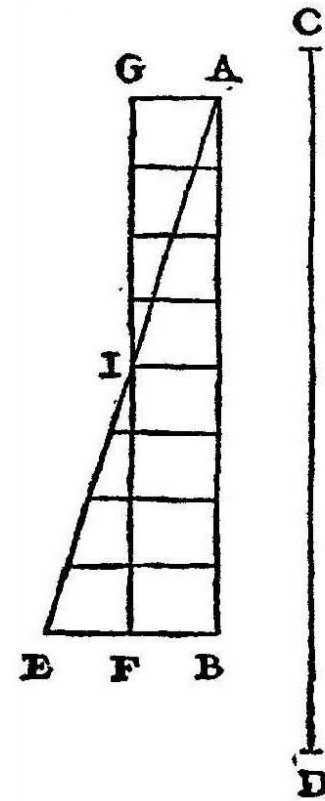
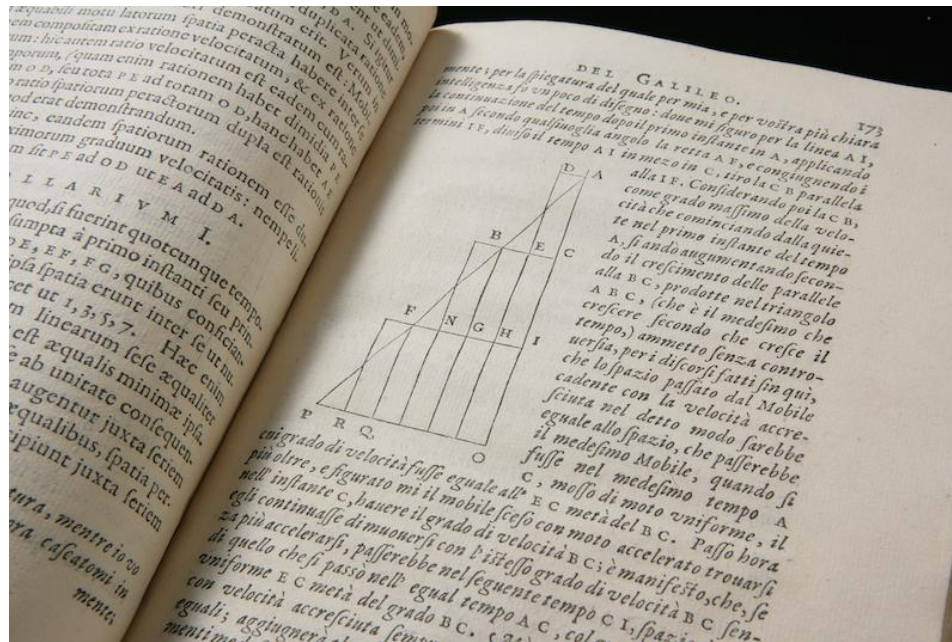
갈릴레이는 쇠공의 속력이 일정하게 늘어나는 것을 발견합니다.
 즉, 이것은 등속 운동이 아니라
 속력이 일정하게 늘어나는 운동,
 즉 등가속도 운동이라는 것을 발견한 것입니다.



갈릴레이는 속력이 **변하는 경우**에도
아주 짧은 시간 간격의 경우에는 등속 운동으로 근사할 수 있으므로
이동 거리는 속력-시간 그래프 아래의 **면적**이 된다고 생각했습니다.

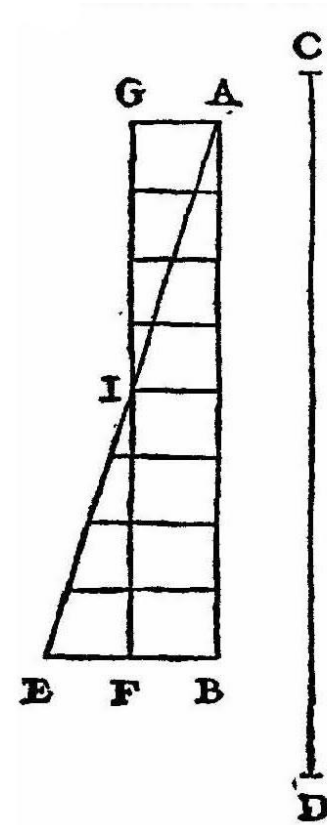


위의 오른쪽 그림에서 CD 는 시간축을 의미합니다.
 그리고 AE 는 속력이 일정하게 증가하는 것을 의미합니다.
 그러면 $\triangle AEB$ 의 면적은 등가속도 운동하는 물체가
 이동한 거리로 해석할 수 있습니다.



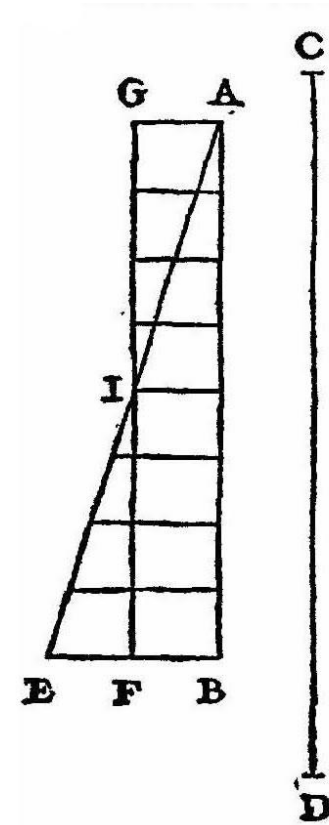
다른 한 편, $\triangle AEB$ 의 면적은 사각형 $AGFB$ 의 면적과 같습니다.
 사각형 $AGFB$ 는 등가속도 운동하는 물체의
 처음 속력($v_i = 0$)과 나중 속력($v_f = EB$ 의 길이) 사이의 **평균값**으로
 등속 운동한 물체의 이동 거리라고 해석할 수 있습니다.

“어떤 물체가 가만히 있다가
 일정하게 속력이 빨라져 움직였을 때,
 그 물체가 어떤 거리를 지나는데 걸린 시간은
 그 물체가 가장 빠른 속력과 가장 느린 속력의
 평균 속력으로 같은 거리를 지날 때
 걸리는 시간과 같다.”
 갈릴레이, ‘새로운 두 과학’ 중



다른 한 편, $\triangle AEB$ 의 면적은 사각형 $AGFB$ 의 면적과 같습니다.
 사각형 $AGFB$ 는 등가속도 운동하는 물체의
 처음 속력($v_i = 0$)과 나중 속력($v_f = EB$ 의 길이) 사이의 평균값으로
 등속 운동한 물체의 이동 거리라고 해석할 수 있습니다.

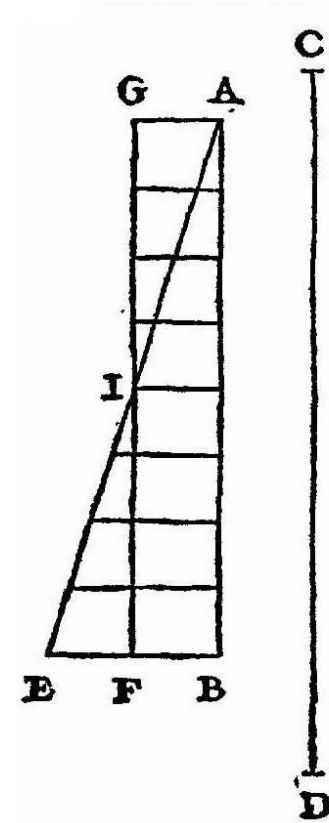
“어떤 물체가 가만히 있다가
 일정하게 속력이 빨라져 움직였을 때,
 그 물체가 어떤 거리를 지나는데 걸린 시간은
 그 물체가 가장 빠른 속력과 가장 느린 속력의
 평균 속력으로 같은 거리를 지날 때
 걸리는 시간과 같다.”
 갈릴레이, ‘새로운 두 과학’ 중



오늘 우리가 잘 아는 수식으로 표현하면 다음과 같습니다.

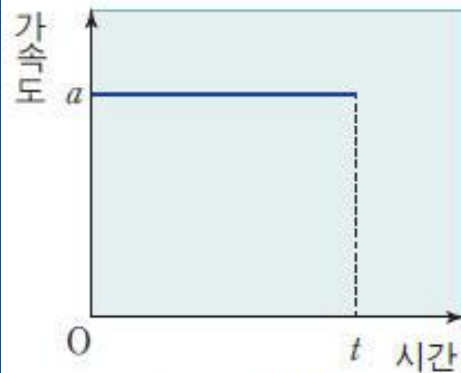
$$s = \left(\frac{v_i + v_f}{2} \right) t$$

“어떤 물체가 가만히 있다가
 일정하게 속력이 빨라져 움직였을 때,
 그 물체가 어떤 거리를 지나는데 걸린 시간은
 그 물체가 가장 빠른 속력과 가장 느린 속력의
 평균 속력으로 같은 거리를 지날 때
 걸리는 시간과 같다.”
 갈릴레이, ‘새로운 두 과학’ 중

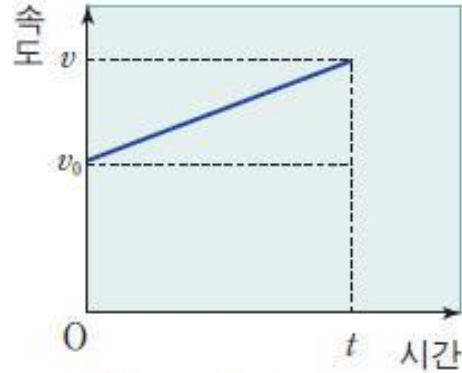


또는 속력이 시간에 비례하기 때문에
 $v_i = 0$ 및 $v_f = at$ 와 같이 표현하면, 다음과 같이 적을 수 있습니다.

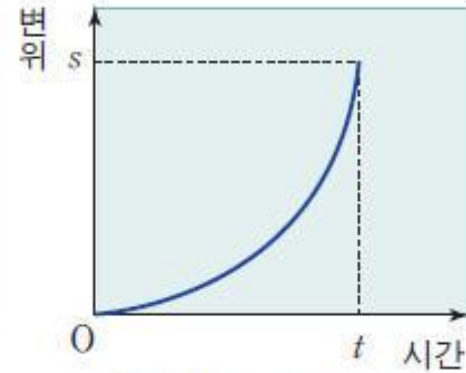
$$s = \left(\frac{v_i + v_f}{2} \right) t = \frac{1}{2} at^2$$



가 가속도 - 시간 그래프

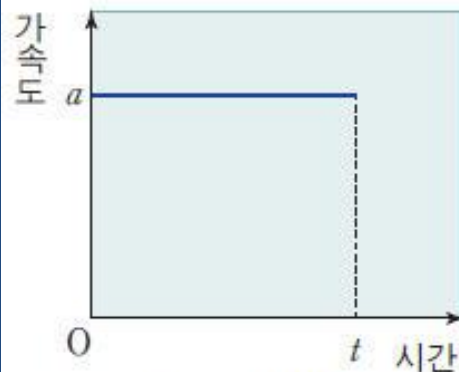


나 속도 - 시간 그래프

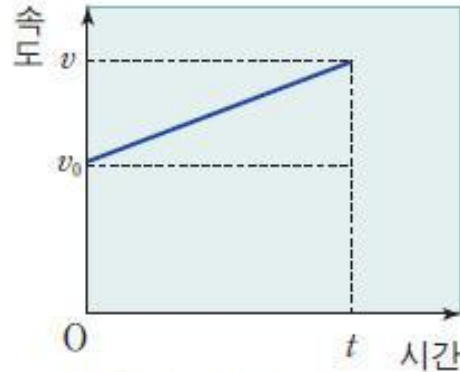


다 변위 - 시간 그래프

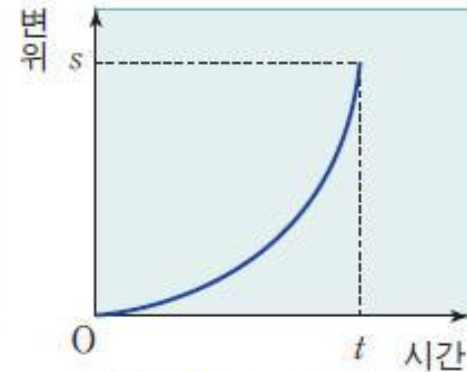
이것이 등가속도 운동에 대한 정확한 공식이 됩니다.



가 가속도 - 시간 그래프



나 속도 - 시간 그래프

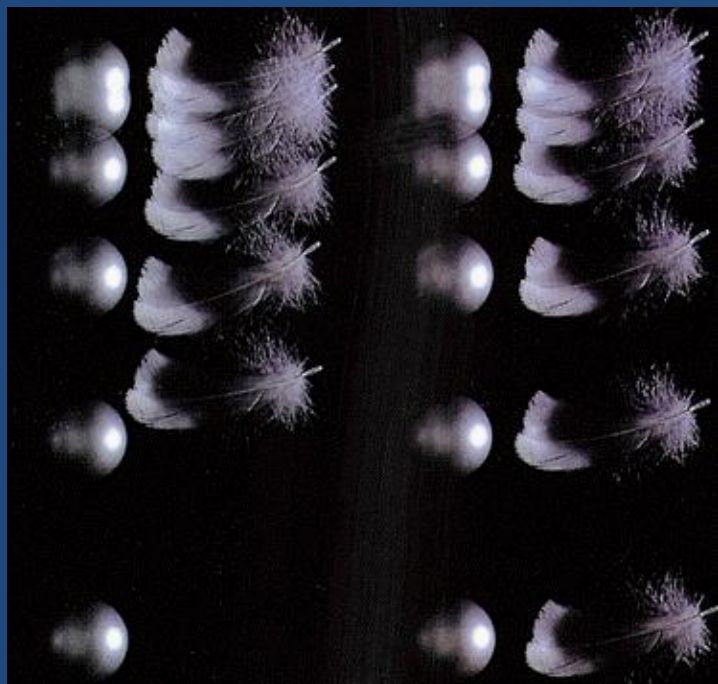


다 변위 - 시간 그래프

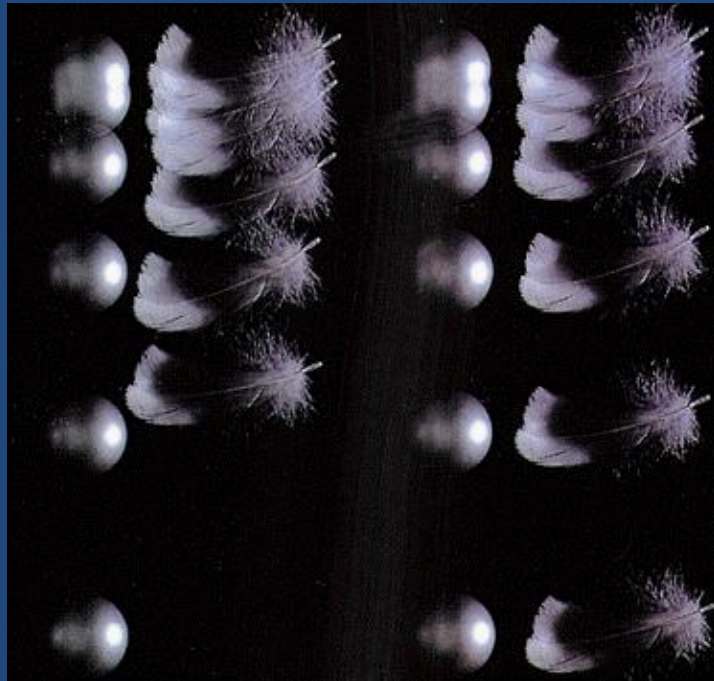
갈릴레이는 미분 방정식을 오늘날과 같은 방법으로
직접 풀었던 것은 아니지만,
면적을 구하는 것을 통해 미분 방정식을 풀 수 있다는 것을
이해하고 있었습니다.

$$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$$

사실 뉴턴이 완성한 미적분학의 기본 정리도
근본적으로 같은 내용을 담고 있습니다.
변화율 계산(미분)의 역연산은 면적 구하기(적분)이라는 것입니다.



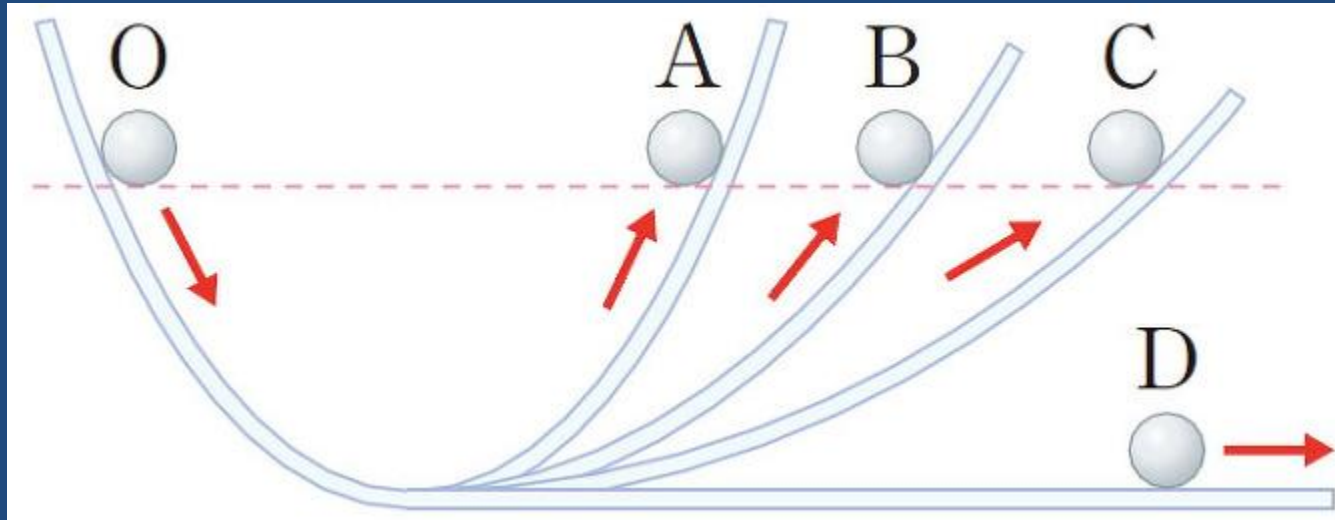
현실적으로 물체의 자유 낙하는 물체의 저항에 의존합니다.
그러나 진공 상태를 만들어서 저항을 없애면
질량이 다른 물체가 같이 낙하한다는 것을 확인할 수 있습니다.



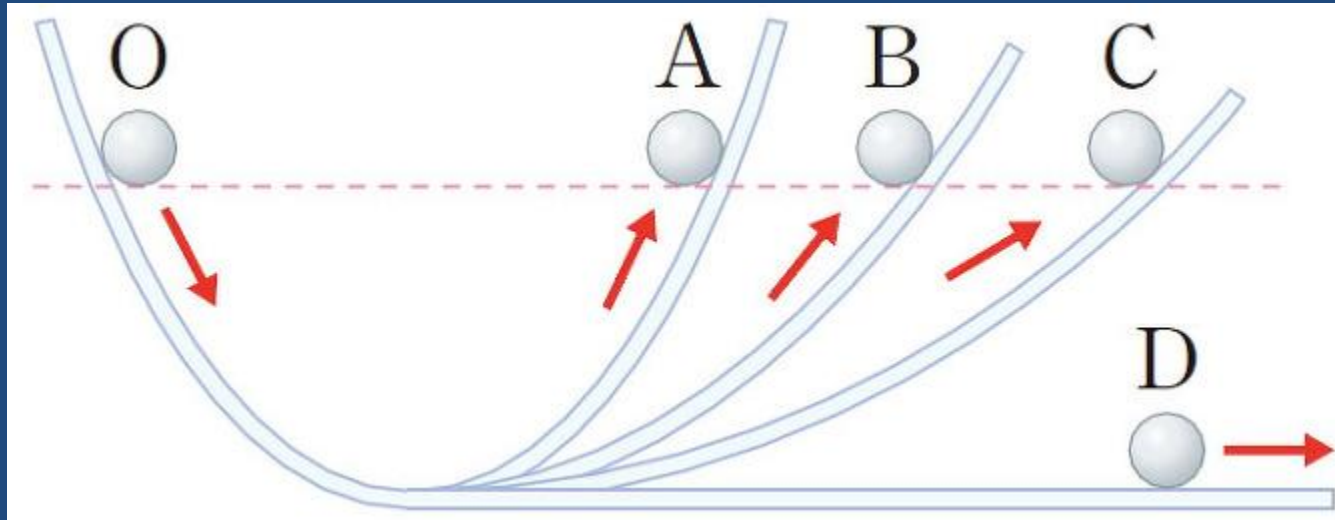
즉, 마찰은 운동의 본질이 아니라고 하는
갈릴레이의 생각이 옳았던 것입니다.



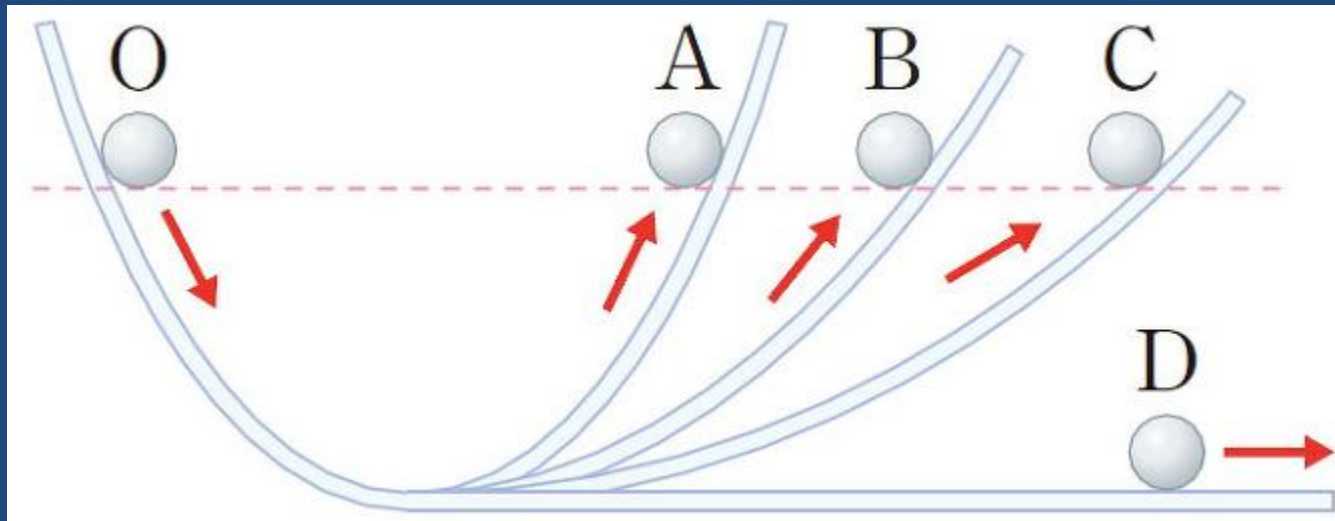
갈릴레이와 데카르트는 운동의 본질을 파악하기 위해
운동에서 보존되는 것이 무엇인지를 자세히 살펴보았습니다.



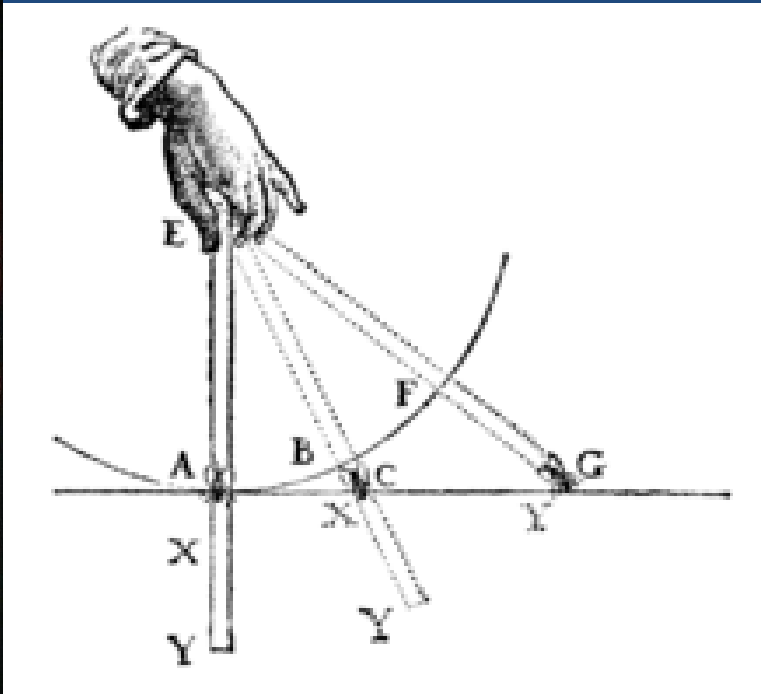
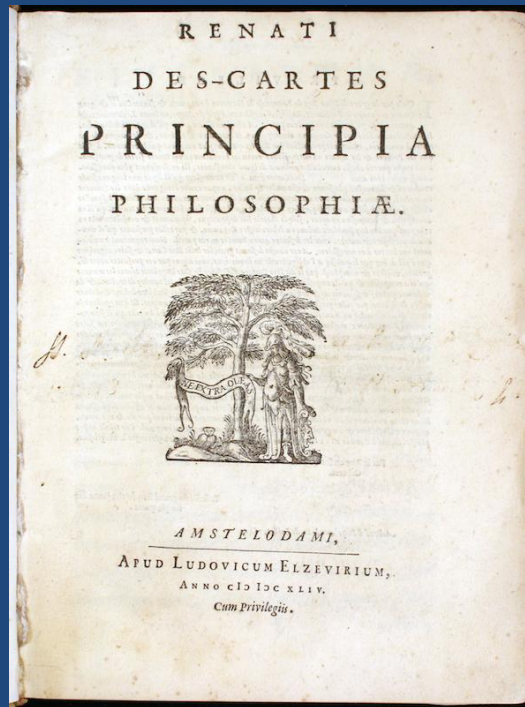
갈릴레이는 마찰이 운동의 본질이 아니라는 것을 파악했습니다.
갈릴레이의 경험에 의하면,
마찰이 없다면, 특정한 지점에서 굴린 공은
같은 높이까지 올라갈 것입니다.



여기에서 갈릴레이는 다음과 같은 결론을 내립니다.
만약 공이 평탄한 길로 굴러간다면,
공 D는 한 없이 **일정한 속력**으로 굴러가야만 한다는 것입니다.



즉, 마찰과 같은 다른 이유가 없다면
물체의 **속력**은 일정해야 합니다.



한 편, 데카르트는 한 가지 요소를 더 발견합니다.
예를 들어, 관의 A 위치에 벌레를 두고 관을 일정한 속력으로 돌리면
직선 운동을 해야 한다는 것을 알 수 있습니다.
즉, 벌레는 속력만이 아니라 **방향**도 유지한다는 것입니다.

$$m\vec{v}$$

이 둘을 종합하면 위와 같이 표현됩니다.
특별한 이유가 없다면, 운동에서 보존되는 것은
질량과 속도의 곱이라는 것입니다.

$m\vec{v}$

여기에서 **속도**는 크기와 방향을 모두 고려한
벡터량이어야 합니다.
이것을 오늘날에는 **운동량** momentum이라고 합니다.

질량이 일정하다면, 그리고 다른 이유가 없다면,
운동 상태는 보존됩니다.
즉, 속도가 유지됩니다.

질량이 일정하다면, 그리고 다른 이유가 없다면,
운동 상태는 보존됩니다.
즉, 속도가 유지됩니다.

그런데 다른 이유란 무엇일까요?

질량이 일정하다면, 그리고 다른 이유가 없다면,
운동 상태는 보존됩니다.
즉, 속도가 유지됩니다.

그런데 다른 이유란 무엇일까요?
즉, 운동 상태를 바꾸는 원인은 무엇일까요?

이것을 우리는 힘force이라고 정의합니다.

저는 이것을 정의definition라고 부르고 싶습니다.
힘이 존재하면 운동 상태가 변하고,
힘이 존재하지 않으면 운동 상태가 변하지 않습니다.

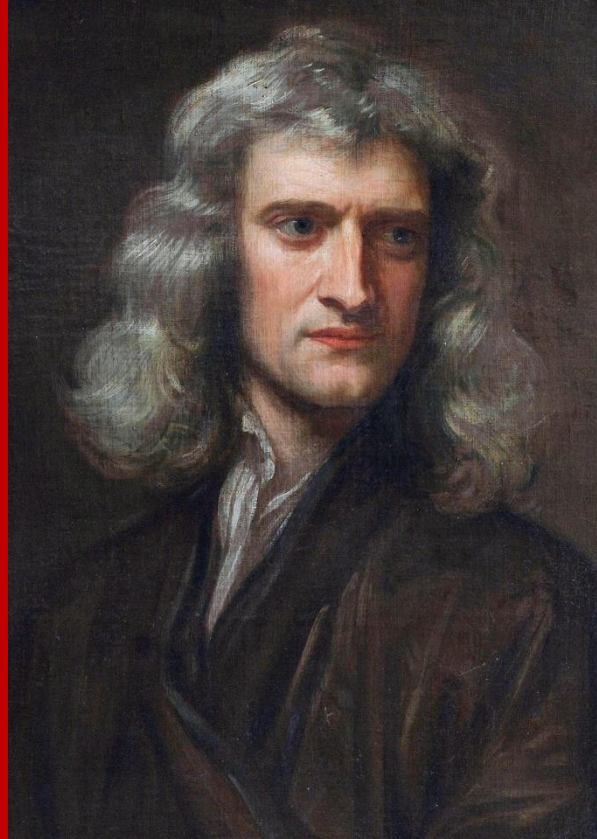
그런데 우리는 운동 상태란 **속도**로 표현된다고 했습니다.
따라서, **힘은 속도의 변화**와 관련됩니다.
이것으로부터 뉴턴은 다음과 같이 힘의 법칙을 적습니다.

그런데 우리는 운동 상태란 **속도**로 표현된다고 했습니다.
따라서, **힘**은 속도의 변화와 관련됩니다.
이것으로부터 뉴턴은 다음과 같이 힘의 법칙을 적습니다.

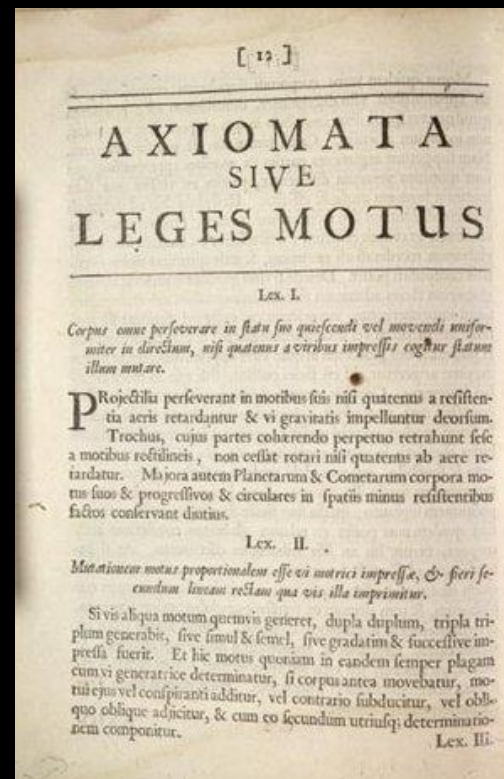
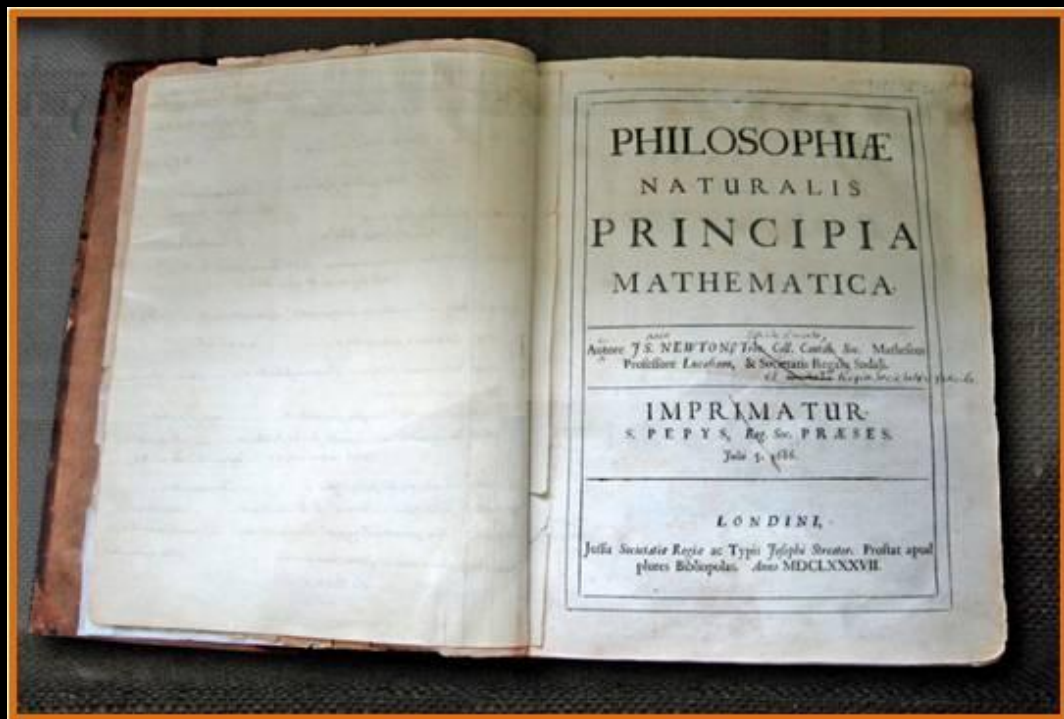
$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

이것이 바로 유명한 뉴턴의 운동 방정식입니다.

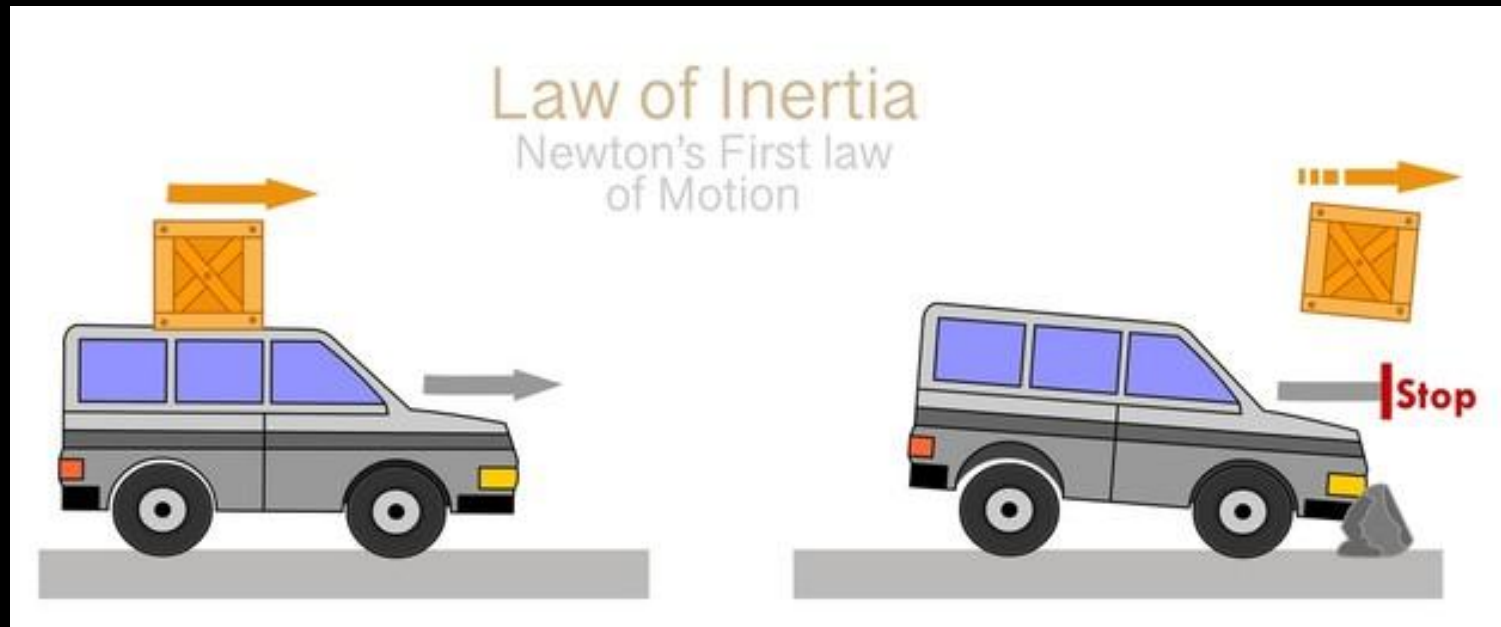
$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$



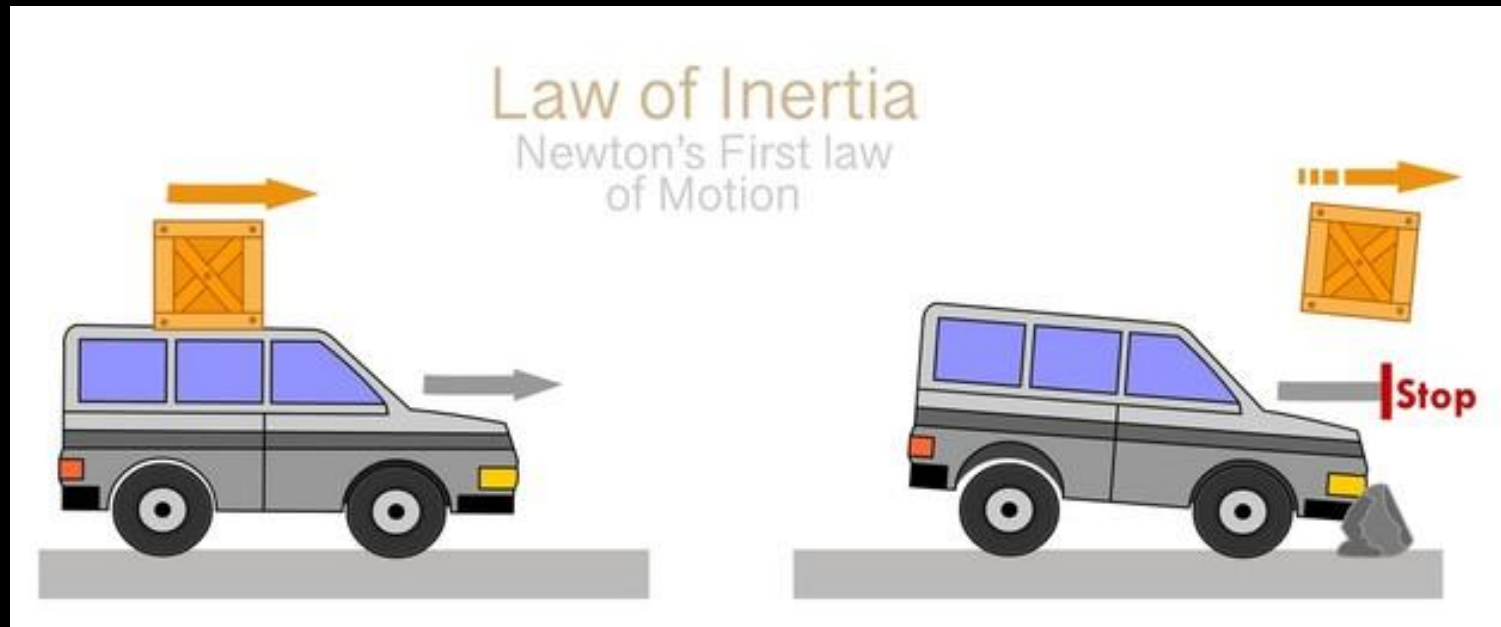
속도의 변화는 속도의 미분으로 표현됩니다.
따라서 우리는 미분 방정식을 풀어야 합니다.
뉴턴은 미적분학을 발전시켜 이 문제를 해결하게 됩니다.



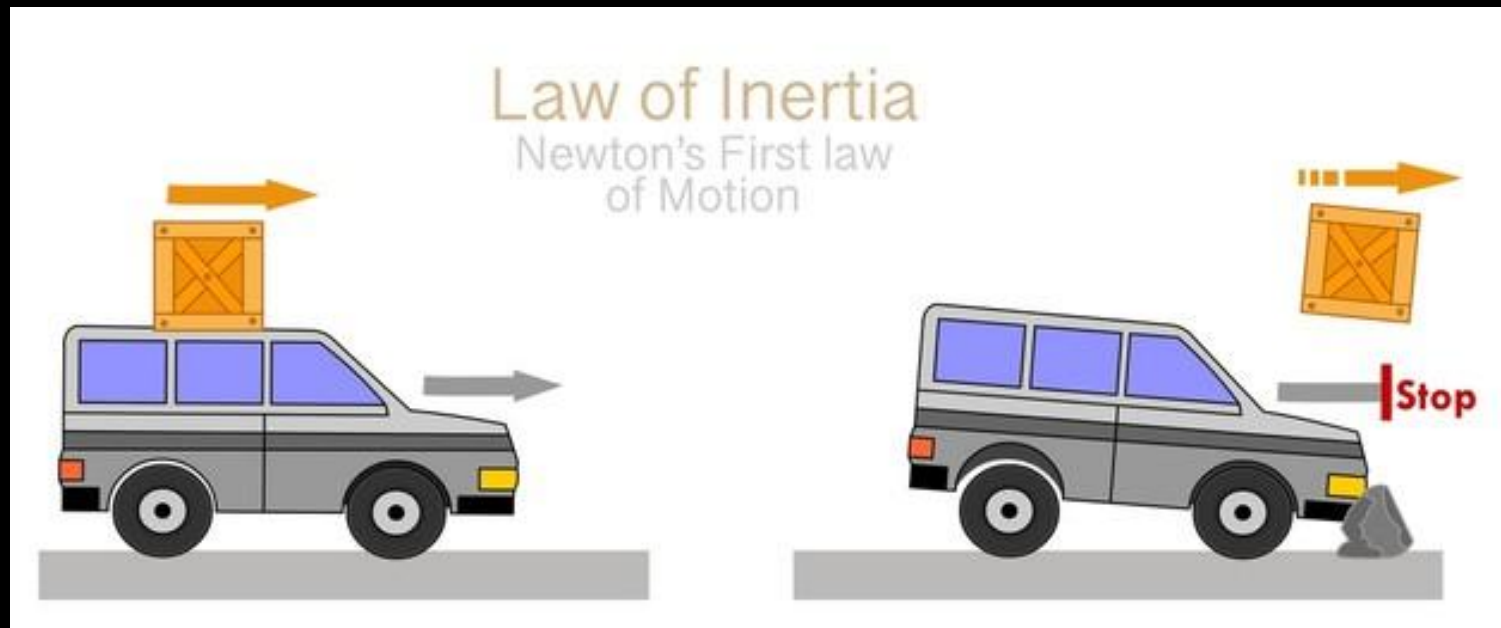
우리가 잘 아는 뉴턴의 세 가지 운동 법칙은 다음과 같은 것을 말합니다.



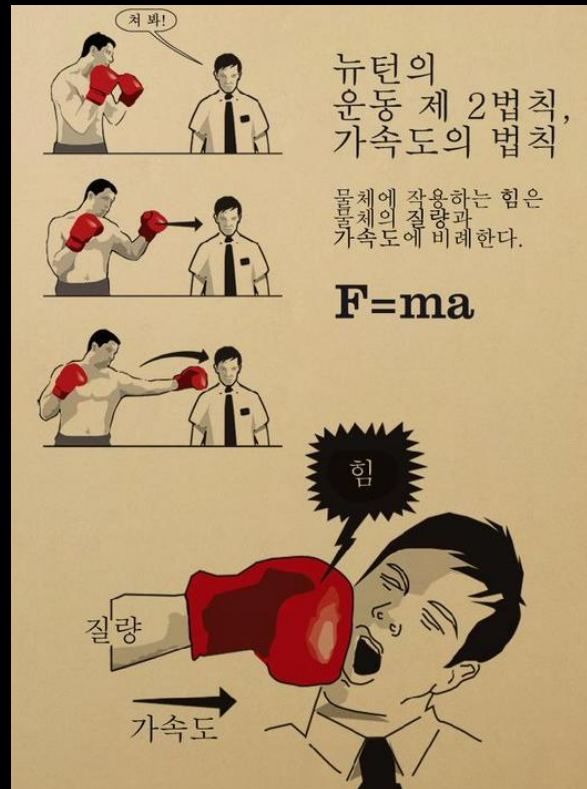
첫째, 힘이 없다면 물체는 운동 상태를 유지한다.
즉, 물체의 속도가 바뀌지 않는다는 것입니다.



이렇게 물체가 일정한 속도를 유지하려는 성질을
관성이라고 부릅니다.
이 첫 번째 법칙은 관성의 법칙이라고도 합니다.



그러나 이 관성의 개념에 문제가 있을지 모른다는 것은
나중에 살펴보도록 합시다.



둘째, 힘은 가속도에 비례한다.
즉, 운동 상태가 변화하는 원인을 힘으로 정의하겠다는 것입니다.

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

이 방정식이 바로 우리가 입자의 위치를 결정하기 위해
풀어야 하는 방정식입니다.
그러나 이 방정식을 풀기 위해서는 우변 뿐만 아니라
좌변도 적을 수 있어야 합니다.

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

다시 말하면 어떠한 계에 어떠한 힘이 실제로 작용하는지를 알아야
위의 방정식을 사용할 수 있다는 말이 됩니다.



셋째, 물체 A가 물체 B에 힘을 가하면,
물체 B는 물체 A에 크기는 같고 방향은 반대인 힘을 가한다.
이것은 작용-반작용의 법칙이라고 합니다.

$$\frac{d(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)}{dt} = 0 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

사실 작용-반작용의 법칙은
운동량 보존 법칙의 특별한 예가 됩니다.

결국 뉴턴의 운동 법칙은
특별한 원인이 없는 경우에는
물체는 속도를 유지한다,
그러나 어떤 원인이 있는 경우에는
속도가 변한다는 것을 이야기합니다.

그 원인을 힘이라고 정의한 것입니다.

역학 문제를 푸는 법

모든 역학 문제는 다음과 같은 두 단계로 해결합니다.

1. 방정식을 쓴다.
2. 방정식을 푼다.

농담같아 보일지 모르겠지만, 이 기본기를 잊지 맙시다.

이제 방정식을 어떻게 쓰는지 생각해 봅시다.

먼저, 무슨 방정식을 써야 할까요?
그것은 뉴턴의 운동 방정식입니다.

그리고 이 방정식을 쓴다는 말은,
방정식의 좌변과 우변을 모두 쓴다는 말입니다.

이제부터 역학 문제의 운동 방정식을 올바르게 적는 방법을
여러분들에게 알려드리겠습니다.

먼저 우리는 일반적으로
질량 중심의 병진 운동과
질량 중심에 대한 상대적인 운동으로
방정식을 분리할 수 있다는 것을 알고 있습니다.

강체의 경우 상대적인 운동은
회전 운동에 해당합니다.

따라서 우리는 방정식을 적기 전에,
우리가 적을 방정식은 (강체의 경우)
최종적으로 세 가지 형태로
분류된다는 것을 알 수 있습니다.

1. 질량 중심의 병진 운동에 대한 운동 방정식
2. 질량 중심의 회전 운동에 대한 토크 방정식
3. 구속 조건 constraints

위의 세 방정식 중에서 일부를 잊으면
우리는 주어진 계를 충분히 결정할 수 없게 되거나
오답을 내게 될 것입니다.

이제 각각의 방정식을 적는 법을
구체적으로 살펴봅시다.

1. 질량 중심의 병진 운동

Step 1: 질량 중심을 모두 찾는다.

1. 질량 중심의 병진 운동

Step 1: 질량 중심을 모두 찾는다.

Step 2: 접촉점을 모두 찾는다.

접촉이 일어나는 곳에는 항상 모든 방향으로 접촉점에 힘이 발생한다.
(중력은 질량 중심에 작용하는 것으로 생각한다.)

1. 질량 중심의 병진 운동

Step 1: 질량 중심을 모두 찾는다.

Step 2: 접촉점을 모두 찾는다.

접촉이 일어나는 곳에는 항상 모든 방향으로 접촉점에 힘이 발생한다.
(중력은 질량 중심에 작용하는 것으로 생각한다.)

Step 3: 앞에서 찾은 힘의 벡터 화살표를 모두 질량 중심으로 옮긴다.

1. 질량 중심의 병진 운동

Step 1: 질량 중심을 모두 찾는다.

Step 2: 접촉점을 모두 찾는다.

접촉이 일어나는 곳에는 항상 모든 방향으로 접촉점에 힘이 발생한다.
(중력은 질량 중심에 작용하는 것으로 생각한다.)

Step 3: 앞에서 찾은 힘의 벡터 화살표를 모두 질량 중심으로 옮긴다.

Step 4: 좌표계를 정의하고, 성분별로 방정식을 쓴다.

2. 질량 중심에 대한 회전 운동

Step 1: 적당한 회전의 기준점을 잡는다. (예: 질량 중심)

2. 질량 중심에 대한 회전 운동

Step 1: 적당한 회전의 기준점을 잡는다. (예: 질량 중심)

Step 2: 이 기준점에서 작용하는 힘까지의 수직 거리를 구한다.

2. 질량 중심에 대한 회전 운동

Step 1: 적당한 회전의 기준점을 잡는다. (예: 질량 중심)

Step 2: 이 기준점에서 작용하는 힘까지의 수직 거리를 구한다.

Step 3: 작용하는 힘들의 수직 성분을 구한다.

2. 질량 중심에 대한 회전 운동

Step 1: 적당한 회전의 기준점을 잡는다. (예: 질량 중심)

Step 2: 이 기준점에서 작용하는 힘까지의 수직 거리를 구한다.

Step 3: 작용하는 힘들의 수직 성분을 구한다.

Step 4: 각변위의 방향을 정의한다.

이 방향에 따라 토크들의 부호를 정한다.

그리고 모든 토크를 더하고 토크 방정식을 쓴다.

3. 구속 조건

다음과 같은 효과들을 구속 조건에 반영할 수 있으며,
이러한 **구속 조건을 유지**하기 위해서는 **구속력**constraint force이 개입되어야 한다.

물체가 평면 상에서 움직인다는 것

강체rigid body라는 것

빗면을 따라 움직인다는 것

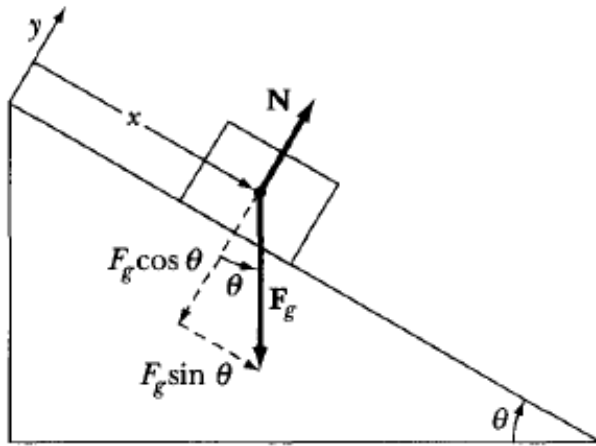
미끄러지지 않고 구른다rolling without slipping는 것

줄에 매여 움직일 때, 줄이 팽팽하다는 것 등

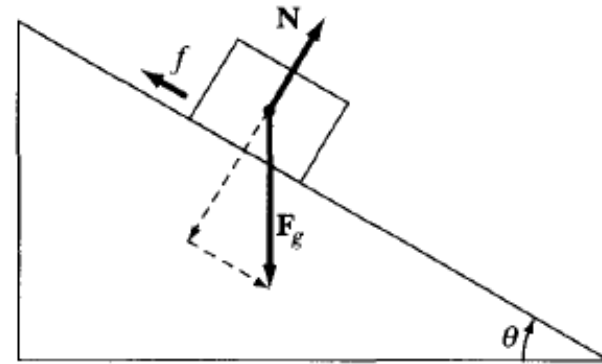
저의 경험으로는
이 매뉴얼에 따라서 문제를 접근하면
제가 지금까지 봤던 뉴턴 역학과 관련한 모든 역학 문제를
옳게 풀 수 있었습니다.

물론 여러분들이 지금까지 가지고 왔던 문제 풀이의 습관
또는 이미 알고 있던 직관이나 공식들을 사용해서
문제를 푸는 것이 좀 더 쉽게 느껴질 때도 있을 것입니다.
그러나 많은 경우 이러한 선지식이나 선입견이
학생들의 성장을 방해하는 것을 보게 됩니다.

제가 여러분들에게 보여드린 매뉴얼을 적용해서
문제를 이해하려고 해보시기 바랍니다.
처음에는 쉽지 않겠지만,
결국에는 이 연습을 통해서
여러분도 어떤 문제든 흔들리지 않고 풀 수 있는
물리의 강자가 될 수 있을 것입니다.



(a)



(b)

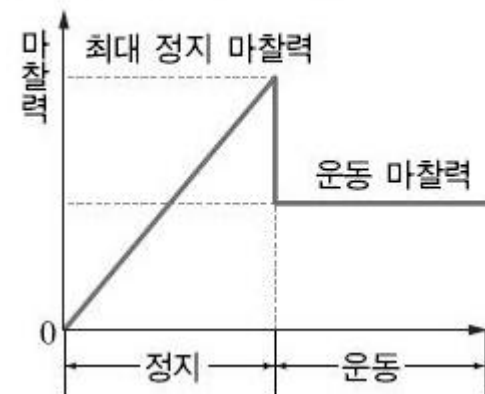
$$f_{\max} = \mu_s N$$

최대정지마찰력

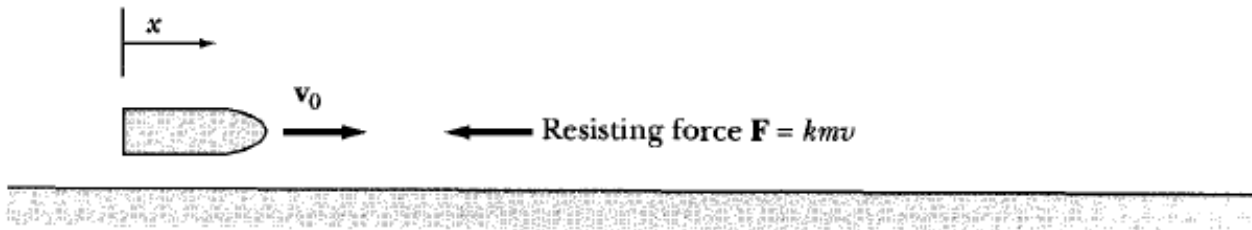
$$f_k = \mu_k N = \mu_k F_g \cos \theta$$

운동마찰력

[외력과 마찰력의 관계]



예제 2.1 / 2.2 / 2.3



2계 미분 방정식

$$ma = m \frac{dv}{dt} = -kmv$$

적분 1

$$\int \frac{dv}{v} = -k \int dt$$

$$\ln v = -kt + C_1$$

초기 조건 1

$$v = v_0 e^{-kt}$$

$$v(t=0) \equiv v_0$$

적분 2

$$v = \frac{dx}{dt} = v_0 e^{-kt}$$

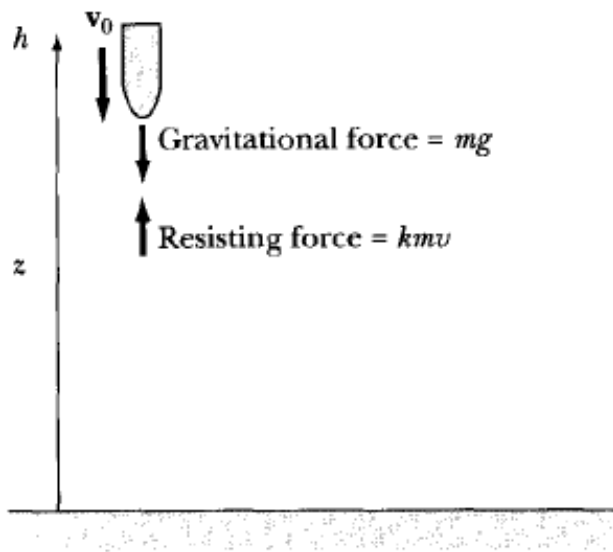
$$x = v_0 \int e^{-kt} dt = -\frac{v_0}{k} e^{-kt} + C_2$$

초기 조건 2

$$x = \frac{v_0}{k} (1 - e^{-kt})$$

$$x(t=0) \equiv 0$$

예제 2.4



초기 조건

$$v(t=0) \equiv v_0$$

$$z(t=0) \equiv h$$

2계 미분 방정식

$$F = m \frac{dv}{dt} = -mg - kmv$$

$$\frac{dv}{kv + g} = -dt$$

적분 1

$$\frac{1}{k} \ln(kv + g) = -t + c$$

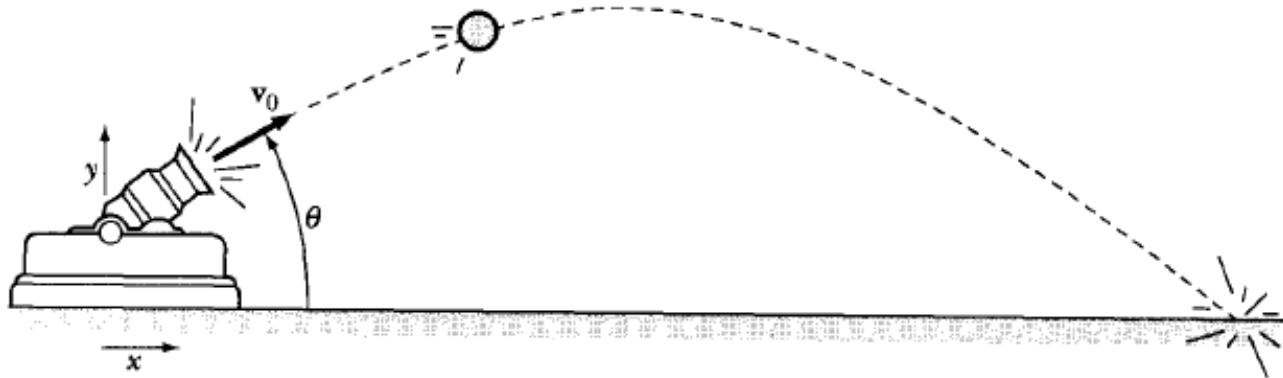
$$kv + g = e^{-kt+kc}$$

적분 2

$$v = \frac{dz}{dt} = -\frac{g}{k} + \frac{kv_0 + g}{k} e^{-kt}$$

$$z = h - \frac{gt}{k} + \frac{kv_0 + g}{k^2} (1 - e^{-kt})$$

예제 2.5



x-direction

$$0 = m\ddot{x}$$

y-direction

$$-mg = m\ddot{y}$$

$$\ddot{x} = 0$$

$$\dot{x} = v_0 \cos \theta$$

$$x = v_0 t \cos \theta$$

$$\ddot{y} = -g$$

$$\dot{y} = -gt + v_0 \sin \theta$$

$$y = \frac{-gt^2}{2} + v_0 t \sin \theta$$

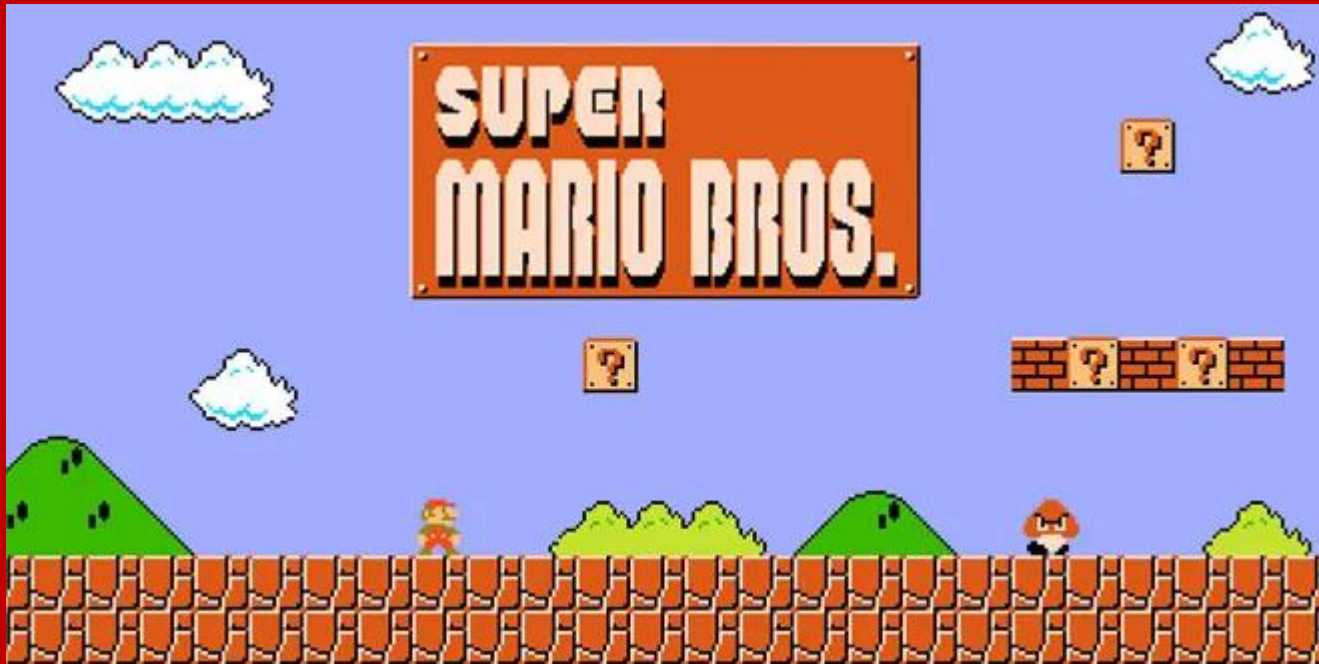
예제 2.6: 포물체 운동

문제가 조금 더 복잡해지면 해석적으로 풀기 어려울 수 있습니다.
이런 경우에는 컴퓨터를 사용해서 문제를 풀 수 있습니다.

예제 2.6/2.7/2.8



여러분이 게임 제작자라고 생각해 봅시다.
그리고 슈퍼 마리오가 달리기를 하거나 점프를 한다면
어떻게 마리오의 위치를 결정할 수 있을지 생각해봅시다.



먼저 가장 쉬운 것은 마리오가 일정한 속력으로
수평으로 움직이는 것입니다.
마리오가 각 시간마다 어느 위치에 있어야할 지에 대해서
계산해보도록 합시다.

시간 (t)	위치 (x)	속력 (v)	가속도 (a)
A	B	C	D
E	F	G	H

시간 간격	(a)
초기 위치	(b)
초기 속력	(c)
가속도	(d)

엑셀을 사용하면 왼쪽의 두 줄을 채운 뒤
아래로 드래그하는 것만으로 시뮬레이션이 끝나게 됩니다.
어떤 원리로 칸들을 채워가야 하는지 살펴보시기 바랍니다.

초기 조건

시간에 따른
변화 ↓

시간 (t)	위치 (x)	속력 (v)	가속도 (a)
A	B	C	D
E	F	G	H
$= A + (a)$	$= B + C \cdot (a)$	$= C + D \cdot (a)$	

시간 간격	(a)
초기 위치	(b)
초기 속력	(c)
가속도	(d)

엑셀을 사용하면 왼쪽의 두 줄을 채운 뒤
아래로 드래그하는 것만으로 시뮬레이션이 끝나게 됩니다.
어떤 원리로 칸들을 채워가야 하는지 살펴보시기 바랍니다.



마리오는 굴바를 잡기 위해서
또는 버섯을 먹기 위해서 점프를 해야 합니다.
제자리에서 하는 점프를 시뮬레이션해 봅시다.

시간 (t)	위치 (y)	속력 (v)	가속도 (a)
A	B	C	D
E	F	G	H

시간 간격	(a)
초기 위치	(b)
초기 속력	(c)
가속도	(d)

이번에도 아까와 비슷한 방법으로 엑셀을 사용해 계산해봅시다.
물리적인 상황이 달라졌으므로
첫 번째와는 다른 부분이 생기게 됩니다.

시간 (t)	위치 (y)	속력 (v)	가속도 (a)
A	B	C	D
E	F	G	H

시간 간격	(a)
초기 위치	(b)
초기 속력	(c)
가속도	(d)

$= a \neq 0$

이번에도 아까와 비슷한 방법으로 엑셀을 사용해 계산해봅시다.
물리적인 상황이 달라졌으므로
첫 번째와는 다른 부분이 생기게 됩니다.

이 두 가지 운동을 각각
등속도 운동과 등가속도 운동이라고 합니다.
등가속도 운동은 속력을 조금씩 바꿔가면서
등속 운동을 여러 번 이어붙인 것이라고 생각할 수 있습니다.



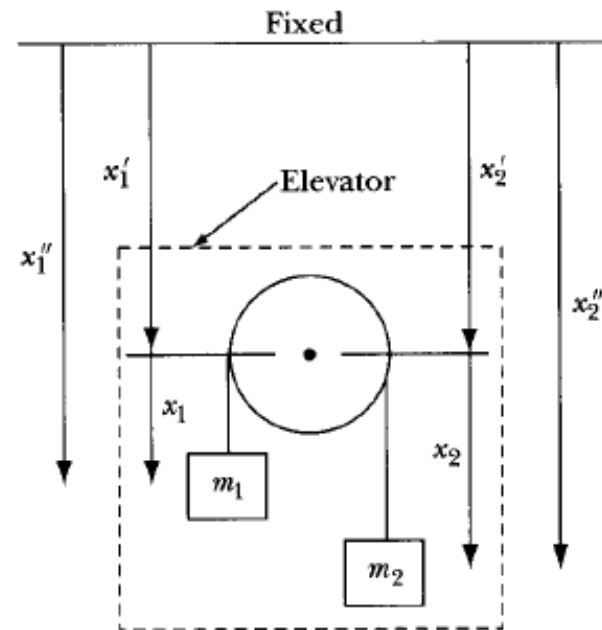
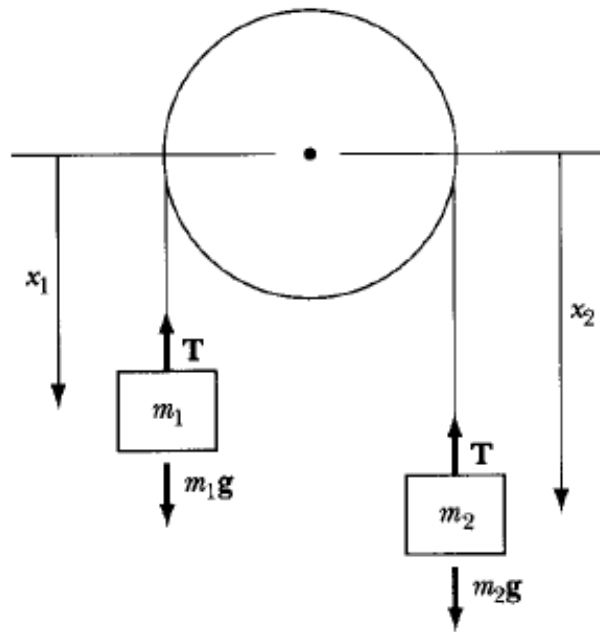
마지막으로 옆으로 달려가면서 점프하는 것을 시뮬레이션해 봅시다.
앞에서 했던 두 가지를 조합해보면 됩니다.

시간 (t)	위치 (x)	위치 (y)	속력 (v_x)	속력 (v_y)	가속도 (a_x)	가속도 (a_y)
A	Bx	By	Cx	Cy	Dx	Dy
E	Fx	Fy	Gx	Gy	Hx	Hy

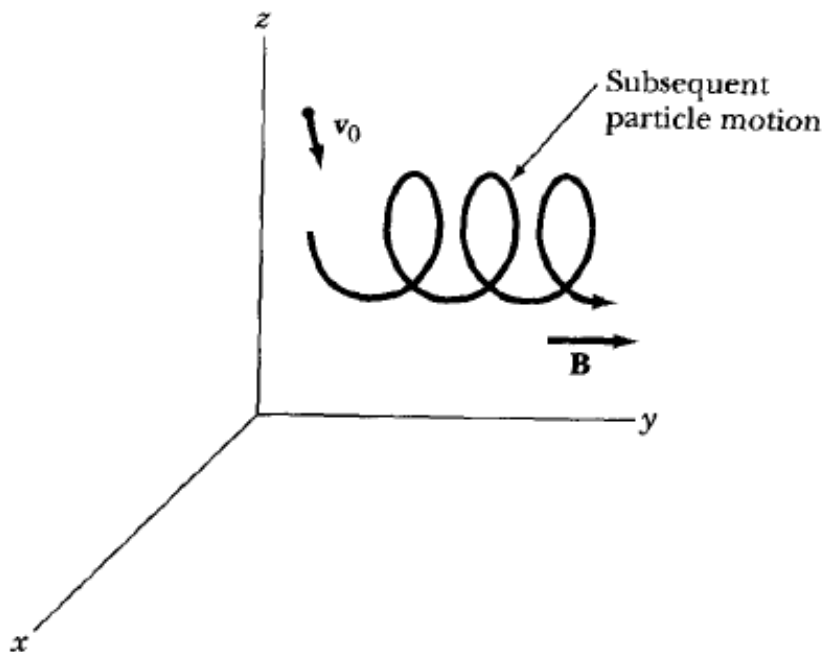
시간 간격 (Δt)	(a)		
초기 위치 (x_0)	(bx)	초기 위치 (y_0)	(by)
초기 속력 (v_{x0})	(cx)	초기 속력 (v_{y0})	(cy)
가속도 (a_x)	(dx)	가속도 (a_y)	(dy)

이번에도 등속도 운동과 등가속도 운동을 동시에 계산하면 됩니다.
이 과정을 통해 2차원 운동을 기술할 수 있습니다.

마지막 시뮬레이션에서는
등속도 운동과 등가속도 운동이 동시에 이루어집니다.
결과적으로 1차원 운동에서 2차원 운동으로
확장시켜볼 수 있게 됩니다.



예제 2.9: 애틀우드 장치



$$\mathbf{v} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{B} = B_0\mathbf{j}$$

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = m\mathbf{a}$$

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= -qB_0\dot{z} \\ m\ddot{y} &= 0 \\ m\ddot{z} &= qB_0\dot{x} \end{aligned} \right\}$$

예제 2.10: 자기장에 의한 대전 입자의 나선 운동

보존 정리

다음과 같은 조건에서 몇 가지 물리량들이 보존됩니다.

1. 힘이 0이면 선운동량 $\vec{p}$ 이 보존된다.

다음과 같은 조건에서 몇 가지 물리량들이 보존됩니다.

1. 힘이 0이면 선운동량 $\vec{p}$ 이 보존된다.
2. 토크가 0이면 각운동량 $\vec{L}$ 이 보존된다.

$$\boxed{\mathbf{L} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{p}} \quad \text{각운동량}$$

$$\boxed{\mathbf{N} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{F}} \quad \text{토크}$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}}$$

$$\dot{\mathbf{L}} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p}) + (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}})$$

$$\boxed{\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{N}} \quad \text{각운동량과 토크의 관계}$$

다음과 같은 조건에서 몇 가지 물리량들이 보존됩니다.

1. 힘이 0이면 선운동량 $\vec{p}$ 이 보존된다.
2. 토크가 0이면 각운동량 $\vec{L}$ 이 보존된다.
3. 보존력장에서는 역학적 에너지 E 가 보존된다.



에너지의 개념을 처음 도입한 것은 라이프니츠로 알려져 있습니다.
역사에 처음 등장한 에너지란 운동에서 보존되는 어떤 양으로
속력의 제곱에 비례하는 것을 지칭합니다.



그런데 이 에너지는 왜 중요할까요?

$$0 = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

다시 운동 방정식으로 돌아와 봅시다.
만일 힘이 존재하지 않는다면,
운동량은 보존되어야 합니다.

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

그러나 힘이 존재한다면,
운동량은 변할 수 있습니다.

$$\int_i^f d\vec{x} \cdot \vec{F} = \int_i^f d\vec{x} \cdot \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

이 식의 양변을 적분하면 위와 같이 적을 수 있습니다.

$$\int_i^f d\vec{x} \cdot \vec{F} = \frac{1}{2} m (v_f^2 - v_i^2)$$

간단하게 계산하면 식의 우변을 위와 같이 다시 적을 수 있습니다.

$$\int_i^f d\vec{x} \cdot \vec{F} = \frac{1}{2} m (v_f^2 - v_i^2)$$

이 식의 좌변은 일_{work}이라고 하고,
이 식의 우변을 운동 에너지_{kinetic energy}의 차이라고 합니다.

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

이렇게 운동 에너지는 속력의 제곱에 비례하는 양으로 정의됩니다.

$$U = - \int_i^x d\vec{x} \cdot \vec{F}$$

여기에 더해서, 일을 일종의 스칼라 함수로
표현할 수 있는 경우가 있습니다.

항상 가능한 것은 아니지만,
가능하다면 위의 에너지를 퍼텐셜 에너지 potential energy라고 합니다.

$$-U_f + U_i = K_f - K_i$$

그러면 일과 에너지의 관계를
위와 같이 적을 수 있습니다.

$$K_i + U_i = K_f + U_f$$

또는 양변을 정리해서
운동 에너지와 퍼텐셜 에너지의 합,
즉 역학적 에너지가 보존된다는 것을 볼 수 있습니다.



이렇게 부산 시내를 밤에도 아름답게 밝힐 수 있는 것은
에너지가 있기 때문입니다.
에너지는 **보존**되며, 다양한 형태로 전환됩니다.



그런데 에너지는 정말 보존되는 것일까요?

SUMMARY, LECT 4 ON CONSERVATION OF ENERGY.

TOTAL ENERGY OF WORLD NEVER CHANGES

ENERGY IS SUM OF SEVERAL "FORMS" (OR WAYS OF CALCULATING)

POTENTIAL ENERGY OF POSITION IN GRAVITY OF EARTH = $WL \cdot \text{Height}$

(Approx, Height $\ll$ Radius of Earth)

KINETIC ENERGY OF MOTION = $\frac{WL}{g} \frac{V^2}{2} = \text{MASS} \cdot V^2/2$

(approx. $V \ll$ speed of light)

에너지는 어떤 방식으로든 보존되는 것이며,
보존되지 않는 것처럼 보인다면,
뭔가 우리가 잊고 있는 것이 있음을 의미합니다.

SUMMARY, LECT 4 ON CONSERVATION OF ENERGY.

TOTAL ENERGY OF WORLD NEVER CHANGES

ENERGY IS SUM OF SEVERAL "FORMS" (OR WAYS OF CALCULATING)

POTENTIAL ENERGY OF POSITION IN GRAVITY OF EARTH = $Wt \cdot \text{Height}$

(Approx, Height $\ll$ Radius of Earth)

KINETIC ENERGY OF MOTION = $\frac{Wt}{g} \frac{V^2}{2} = \text{MASS} \cdot V^2/2$

(approx. $V \ll$ speed of light)

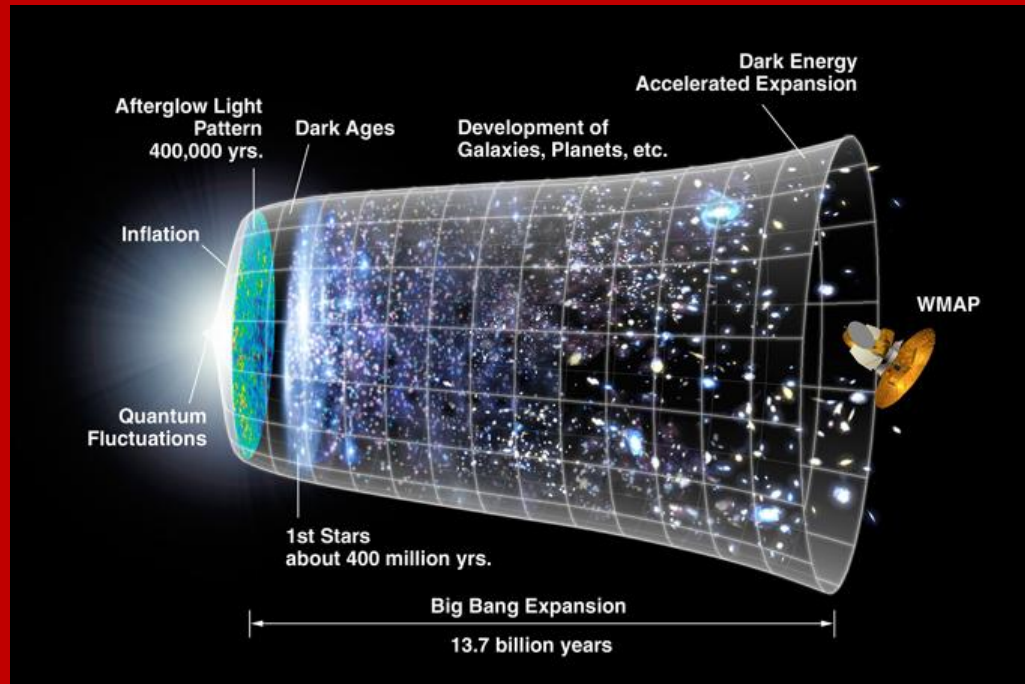
왜 이렇게 자신 있게 강제할 수 있을까요?



에너지가 보존되는 가장 근본적인 이유는
전체 계가 고립되어 있기 때문에 그렇습니다.



즉, 계 내부의 구성 요소 사이에는 변화가 있을지 모르지만
전체 계는 시간이 지나도 변하지 않는다는 전제 하에서
에너지의 보존을 확신할 수 있는 것입니다.



그러나 시간이 지남에 따라 전체 계가 커지거나 작아지게 된다면
에너지의 총량이 증가할 수도 있습니다.
그러나 물론 어떤 경우에도
국소적으로는 에너지가 반드시 보존되게 됩니다.

$$\boxed{W_{12} \equiv \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}} \quad \text{일work}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} dt \\ &= \frac{m}{2} \frac{d}{dt} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) dt = \frac{m}{2} \frac{d}{dt} (v^2) dt = d \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) \end{aligned}$$

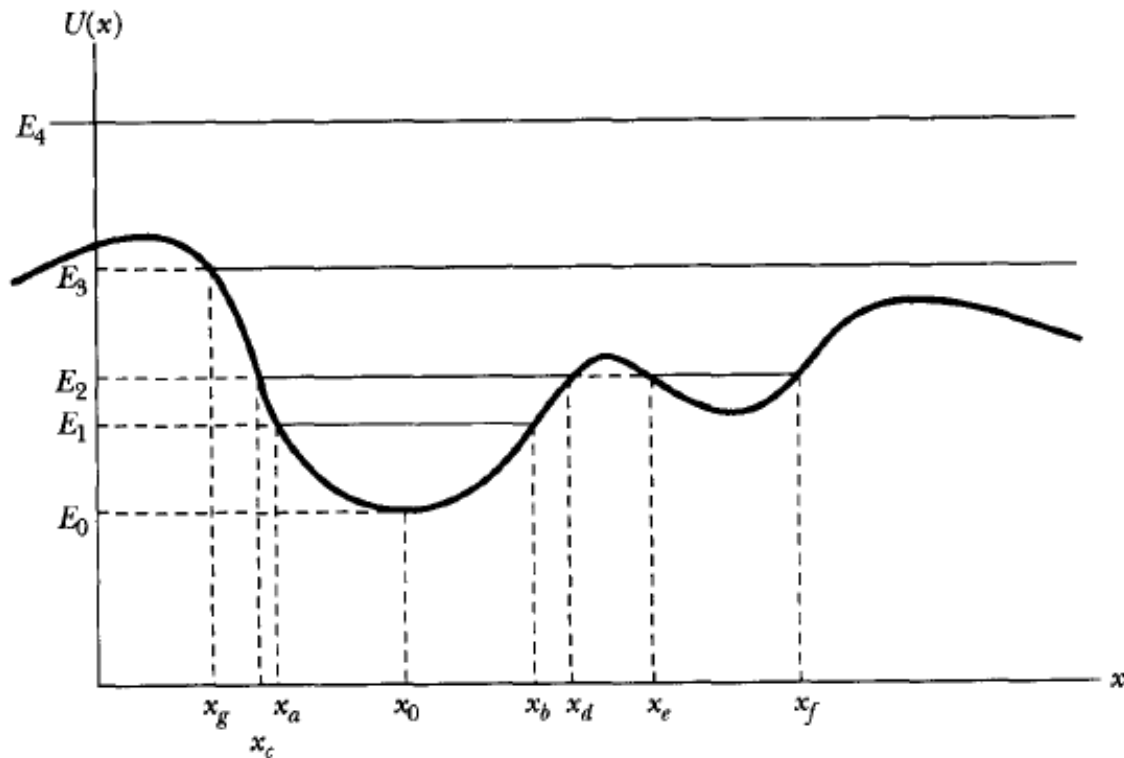
$$W_{12} = \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) \Big|_1^2 = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2) = T_2 - T_1 \quad \text{일-운동 에너지 정리}$$

$$\int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \equiv U_1 - U_2 \quad \text{퍼텐셜 에너지potential energy}$$

$$\boxed{\mathbf{F} = -\text{grad } U = -\nabla U} \quad \text{보존력장, 또는 퍼텐셜 에너지가 잘 정의되는 조건}$$

$$\int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_1^2 (\nabla U) \cdot d\mathbf{r} = - \int_1^2 dU = U_1 - U_2$$

$$\boxed{E \equiv T + U} \quad \text{역학적 에너지 보존}$$

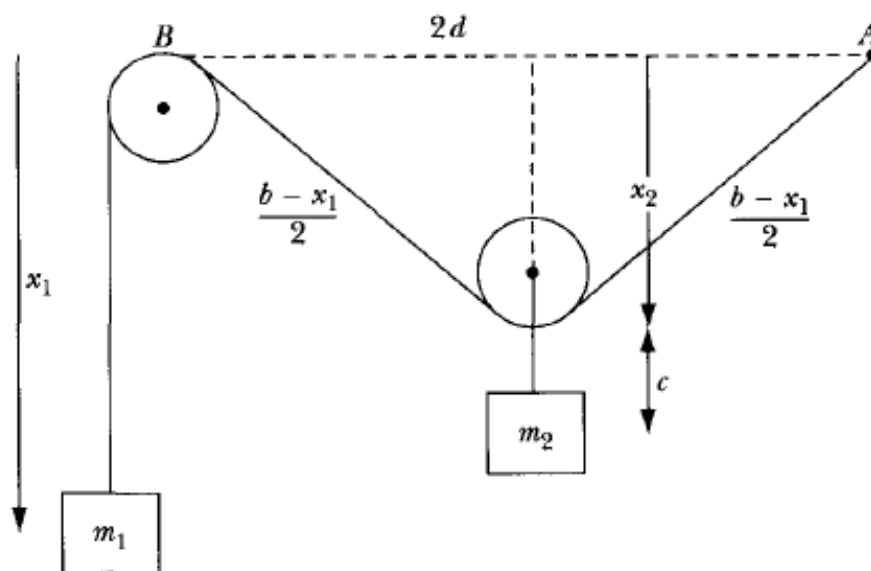


$$E = T + U = \frac{1}{2}mv^2 + U(x)$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]}$$

$$t - t_0 = \int_{x_0}^x \frac{\pm dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]}}$$

퍼텐셜 에너지는 운동을 분석하는 유용한 도구를 제공합니다.



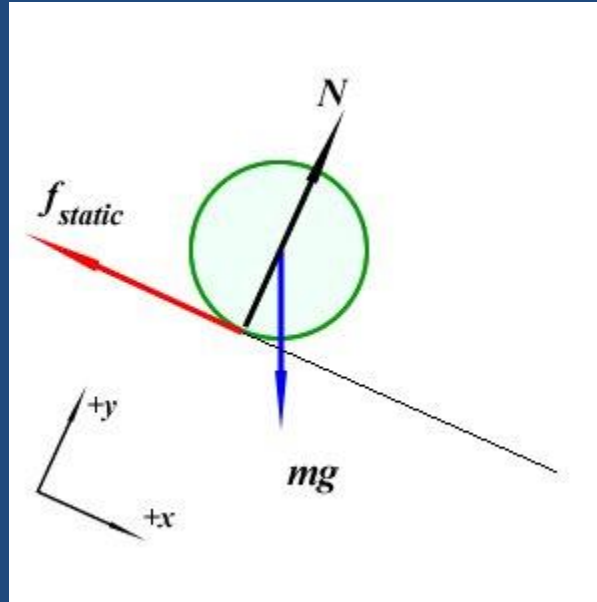
$$\left(\frac{d^2 U}{dx^2}\right)_0 > 0 \quad \text{Stable equilibrium}$$

$$\left(\frac{d^2 U}{dx^2}\right)_0 < 0 \quad \text{Unstable equilibrium}$$

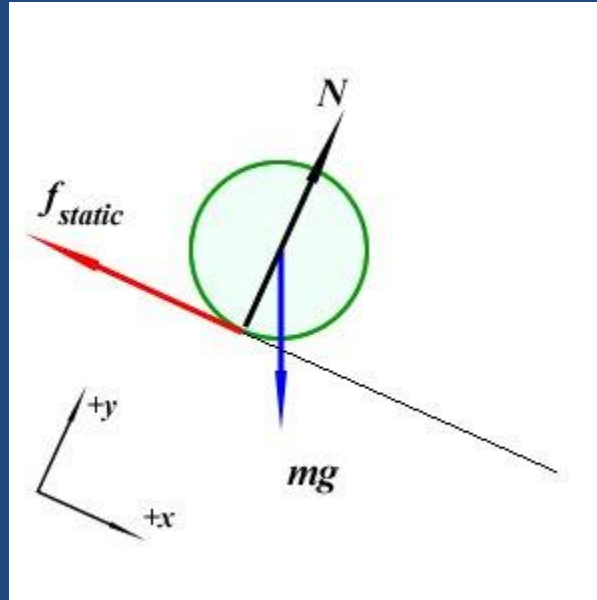
예제 2.12

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

이 에너지 개념에서 우리가 발견할 수 있는 것은 무엇일까요?
일단 에너지에는 화살표가 전혀 없다,
즉 벡터가 아니라 스칼라라는 것입니다.



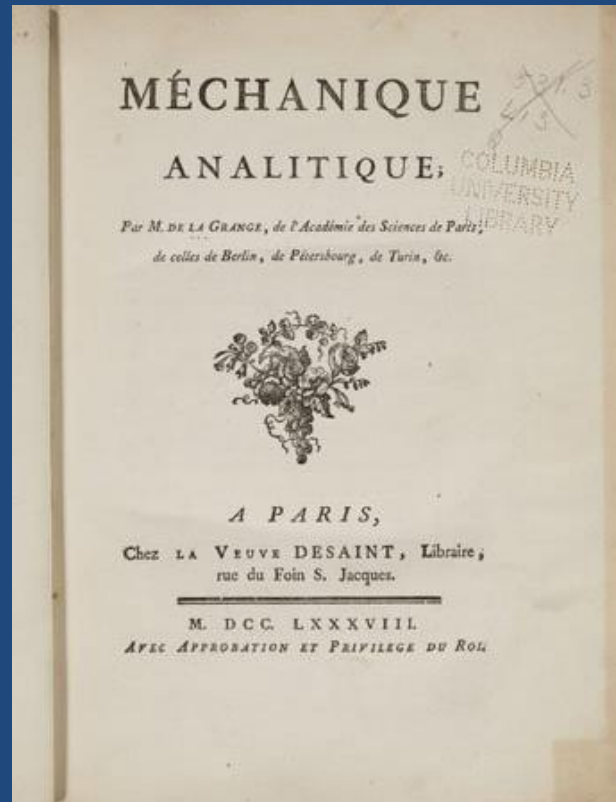
사실 역학 문제에서 가장 어려운 점은
힘의 방향을 분해해서 성분 별로 방정식을 적는 것입니다.
대부분의 학생들이 여기에서 실수를 합니다.



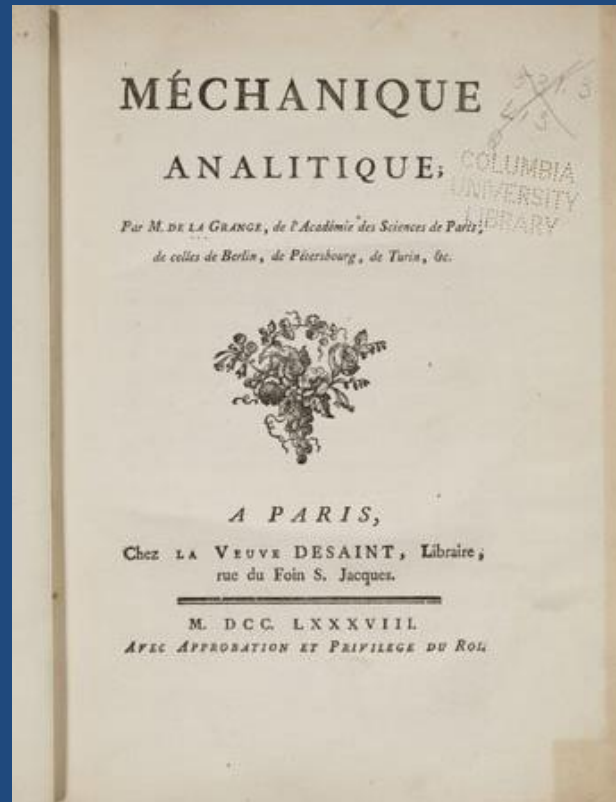
이것은 힘이 벡터량이기 때문입니다.
그러나 스칼라를 사용해서 문제를 풀 수 있다면,
이러한 고민을 하지 않아도 될 것입니다.



18세기의 위대한 수학자이자 물리학자인 오일러와 라그랑주는
일반적인 좌표를 사용해 적은 스칼라량으로부터
운동 방정식을 적는 방법을 고민합니다.



이러한 방식으로부터 탄생한 역학을 해석 역학이라고 합니다.



해석 역학에서는 **변분법** *variation method*을 사용해서
에너지 함수로부터 운동 방정식을 얻는 방법을 논의합니다.
이 주제를 다루는 것이 바로 이 과목의 가장 중요한 목표입니다.

감사합니다