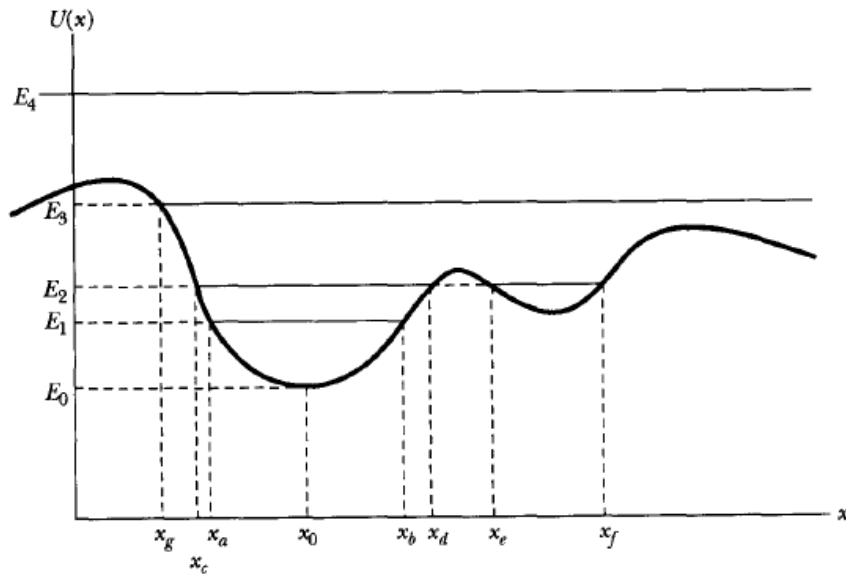


3장 진동

지난 장에서는 방정식을 세우는 부분에 집중했다면,
이번 장에서는 방정식을 푸는 부분에 집중해 봅시다.
그 중에서 자연에서 상당히 보편적으로 등장하는 현상,
즉 **진동**oscillation에 대해서 살펴봅시다.

진동은 왜 보편적일까요?



$$F(x) = F_0 + x \left(\frac{dF}{dx} \right)_0 + \frac{1}{2!} x^2 \left(\frac{d^2F}{dx^2} \right)_0 + \frac{1}{3!} x^3 \left(\frac{d^3F}{dx^3} \right)_0 + \dots$$

$$F(x) = -kx$$

일반적으로 안정적인 평형점 부근에서는 후크Hooke의 법칙과 같은 힘 법칙이 적용됩니다.

$$-kx = m\ddot{x}$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\omega_0^2 \equiv k/m$$

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t - \delta)$$

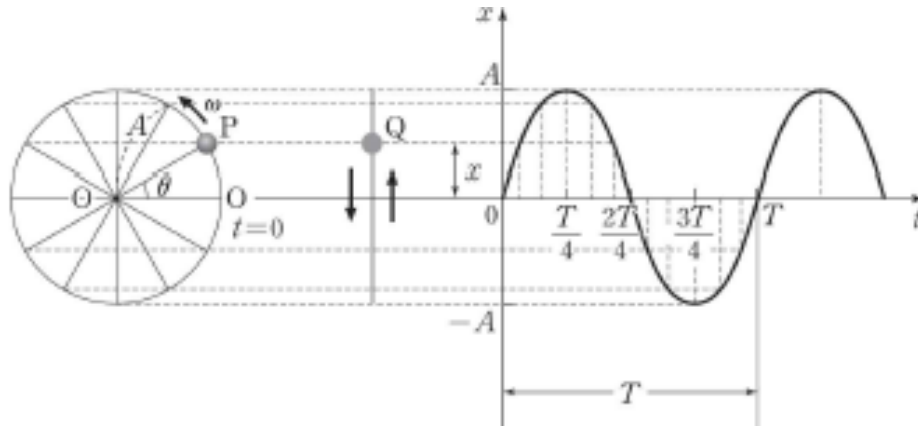
$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 \cos^2(\omega_0 t - \delta) \\ &= \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega_0 t - \delta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} k x^2 \\ &= \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega_0 t - \delta) \end{aligned}$$

$$E = T + U = \frac{1}{2} k A^2$$

에너지 보존

이 힘 법칙에 따라 운동 방정식을 적을 수 있습니다.
이러한 계를 단진자simple harmonic oscillator라고 합니다.

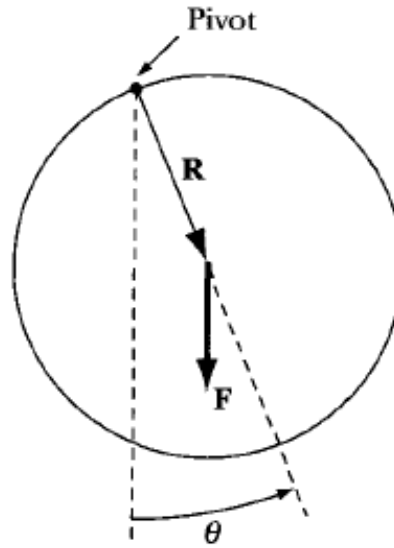


$$x(t) = A \sin(\omega_0 t - \delta)$$

$$\omega_0 = 2\pi\nu_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\nu_0 = \frac{1}{\tau_0} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

진동의 성질을 나타내기 위해 위와 같이
각진동수, 진동수, 주기를 정의합시다.



$$\ddot{\theta} + \frac{Rmg}{I}\theta = 0 \quad \text{토크 방정식}$$

예제 3.1: 물리 진자

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + \omega_0^2 x &= 0 \\ \ddot{y} + \omega_0^2 y &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= A \cos(\omega_0 t - \alpha) \\ y(t) &= B \cos(\omega_0 t - \beta) \end{aligned} \right\}$$

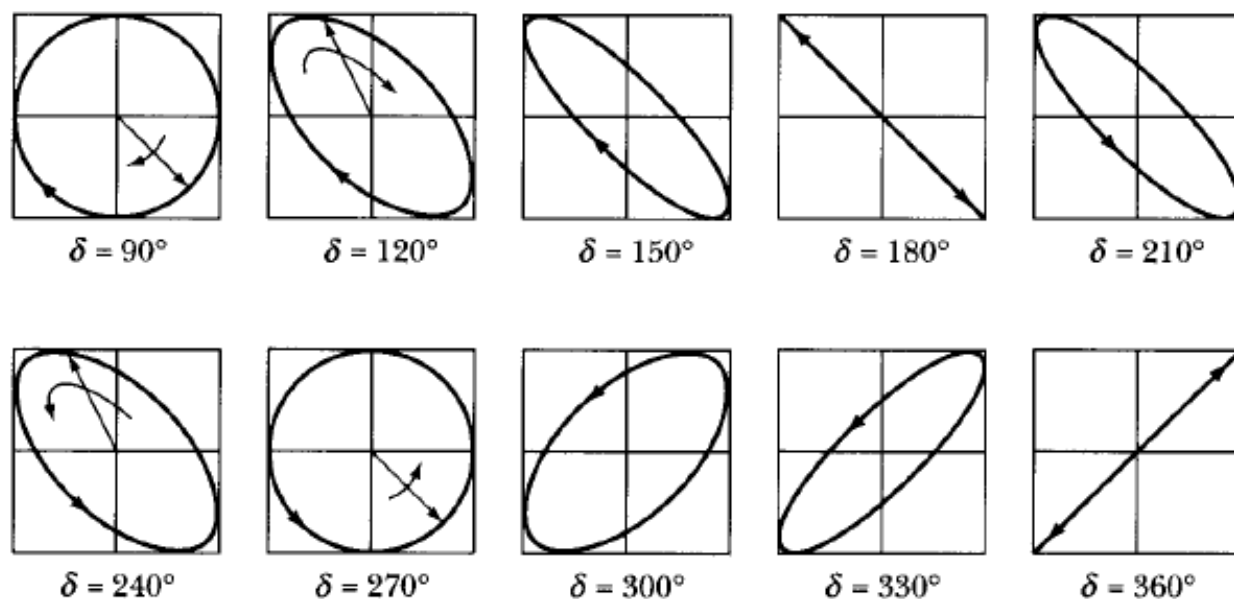
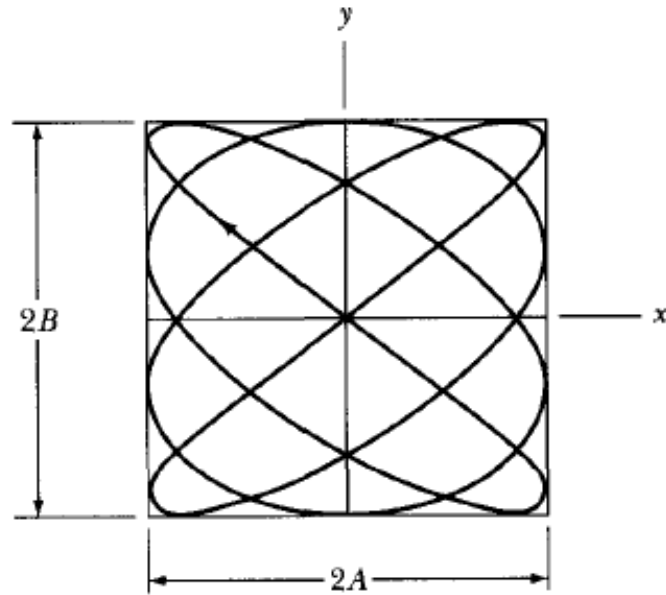


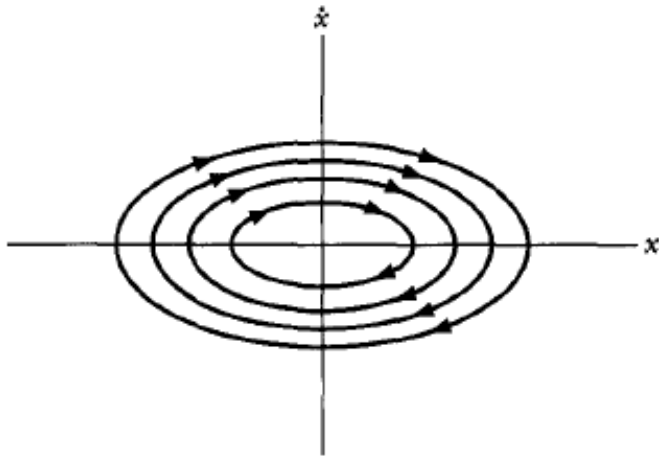
FIGURE 3-2 Two-dimensional harmonic oscillation motion for various phase angles $\delta = \alpha - \beta$.

2차원 단진자 운동

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= A \cos(\omega_x t - \alpha) \\ y(t) &= B \cos(\omega_y t - \beta) \end{aligned} \right\}$$



두 축의 각진동수가 다른 경우: 리사주Lissajous 도형



$$x(t) = A \sin(\omega_0 t - \delta)$$

$$\dot{x}(t) = A\omega_0 \cos(\omega_0 t - \delta)$$

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{\dot{x}^2}{A^2\omega_0^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{2E/k} + \frac{\dot{x}^2}{2E/m} = 1$$

위상도phase diagram는 운동을 분석하는 중요한 도구입니다.
 운동 방정식은 2차 미분 방정식이므로, 2개의 상수가 필요합니다.
 즉, 특정한 순간에서의 위치와 속력이
 물체의 운동을 결정해주는 것입니다.

현실적인 진동 운동의 경우
단진동과 같이 무한히 진동하지는 않습니다.
진동 운동에 감쇠 효과를 고려하면 어떻게 될까요?

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\beta \equiv b/2m$$

$$\omega_0 = \sqrt{k/m}$$

$$x(t) = e^{-\beta t} [A_1 \exp(\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t) + A_2 \exp(-\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t)]$$

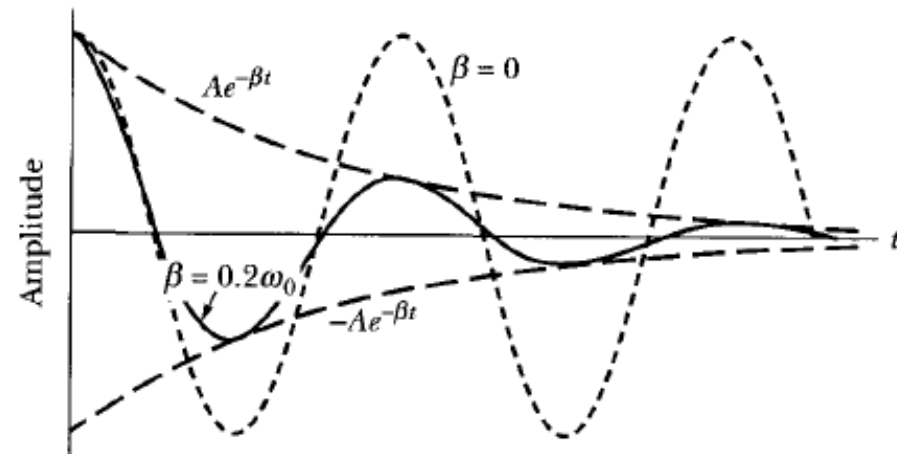
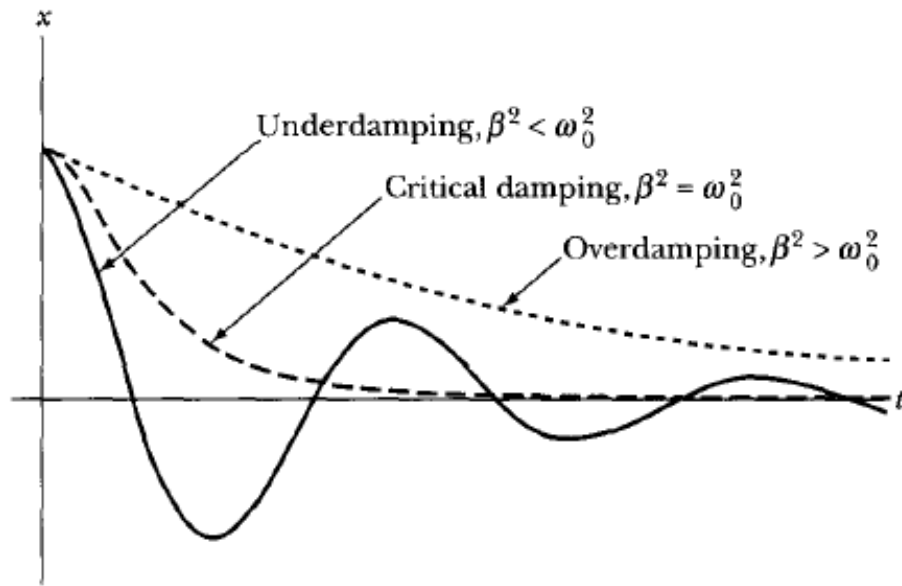
$$\left. \begin{aligned} r_1 &= -\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \\ r_2 &= -\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \end{aligned} \right\}$$

2차 선형 동차 상미분 방정식의 일반해:
 선형 독립 linearly independent인 2개의 해의
 선형 중첩으로 표현된다.

속력에 비례하는 감쇠 효과를 고려하면
 위와 같은 미분 방정식을 얻게 됩니다.
 이것은 2차 선형 동차 상미분 방정식입니다.

$$x(t) = e^{-\beta t} [A_1 \exp(\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t) + A_2 \exp(-\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t)]$$

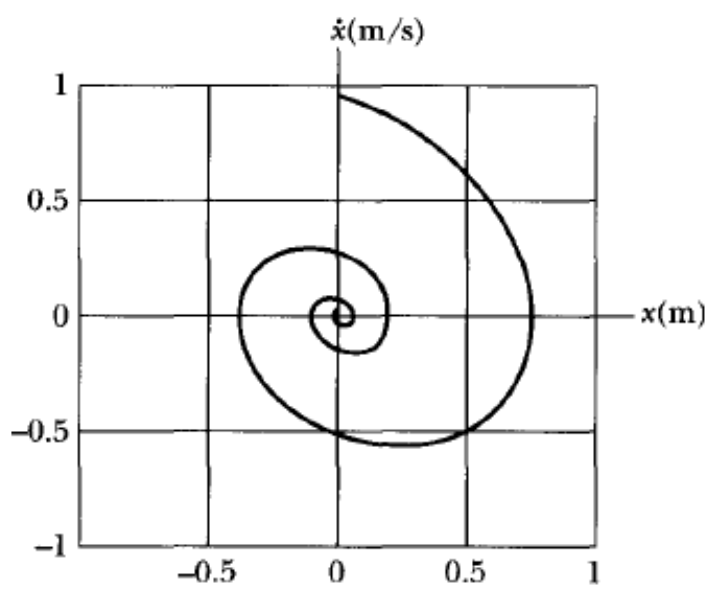
$\omega_0^2 > \beta^2$	과소감쇠 underdamping
$\omega_0^2 = \beta^2$	임계감쇠 critical damping
$\omega_0^2 < \beta^2$	과대감쇠 overdamping



제공된 안의 부호에 따라
앞의 일반해는 다음과 같이 분류될 수 있습니다.

$$\omega_1^2 \equiv \omega_0^2 - \beta^2$$

$$\omega_1^2 > 0$$



$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\beta t} [A_1 e^{i\omega_1 t} + A_2 e^{-i\omega_1 t}] \\ &= A e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t - \delta) \end{aligned}$$

과소감쇠

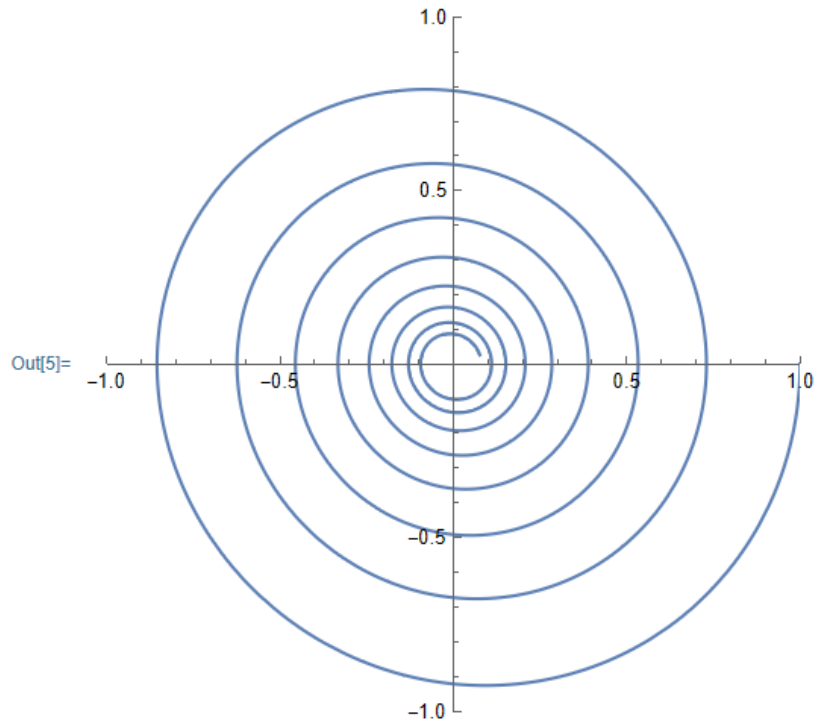
$$\omega_0^2 > \beta^2$$

```

In[ ]:= Quit[];

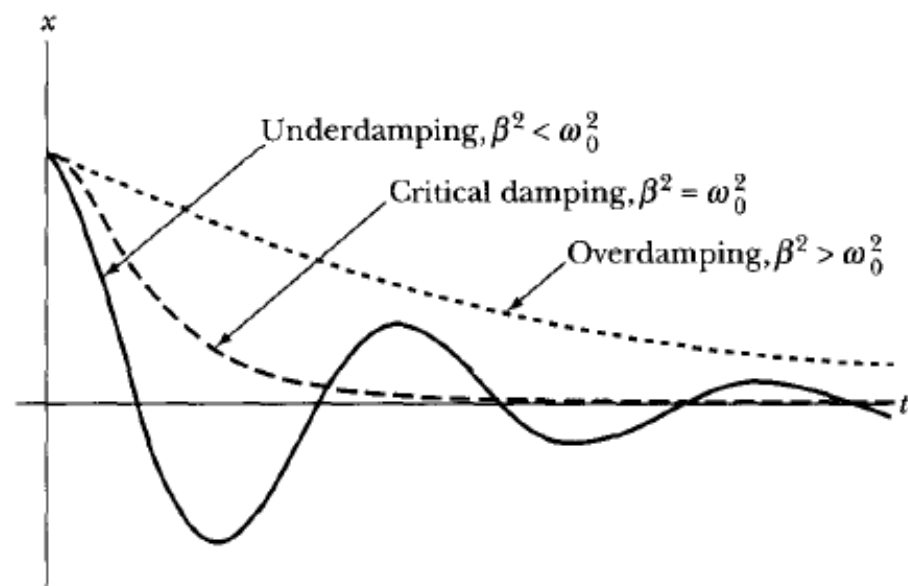
In[1]:=  $\beta = 0.1$ ;  $\omega = 1$ ;
x0 = 1; v0 = 0; tf = 50;
Eq[t_] := x''[t] +  $\beta$  x'[t] +  $\omega^2$  x[t];
sol = NDSolve[{Eq[t] == 0, x[0] == x0, x'[0] == v0}, x, {t, 0, tf}];
ParametricPlot[Evaluate[{x[t], x'[t]} /. sol], {t, 0, tf}, PlotRange -> {{-x0, x0}, {-x0, x0}}]

```



과소감쇠

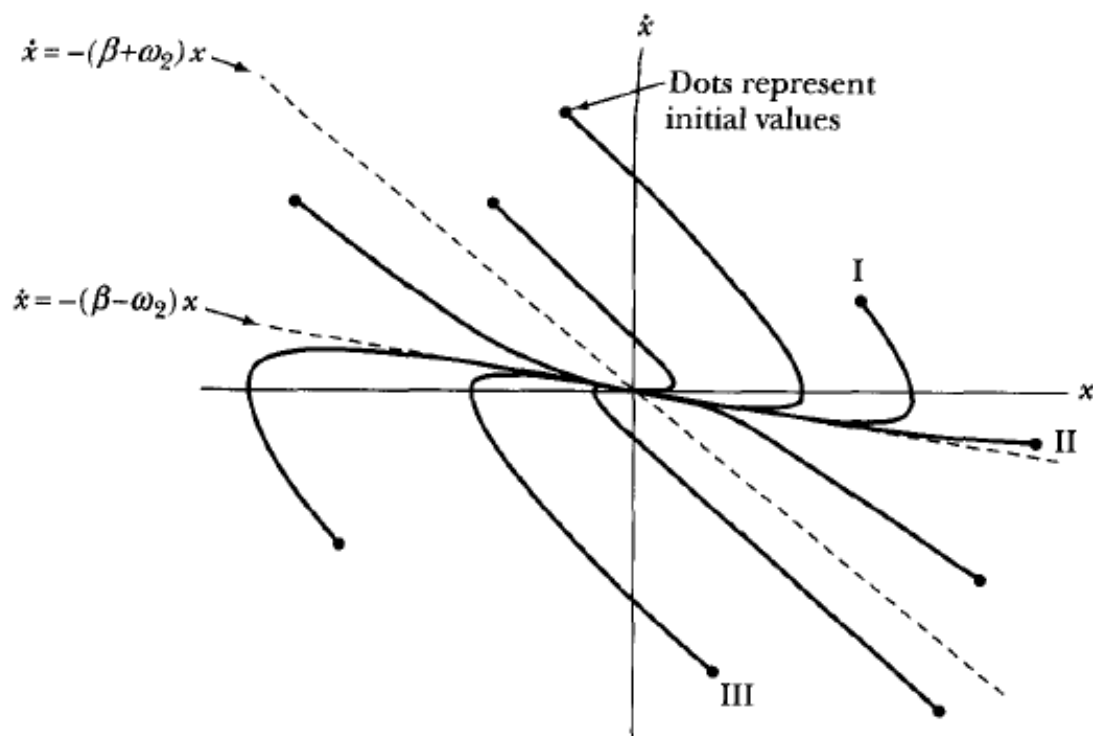
$$\omega_0^2 > \beta^2$$



$$x(t) = (A + Bt)e^{-\beta t}$$

임계감쇠

$$\omega_0^2 = \beta^2$$



$$x(t) = e^{-\beta t} [A_1 e^{\omega_2 t} + A_2 e^{-\omega_2 t}]$$

$$\omega_2 = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

과대감쇠

$$\omega_0^2 < \beta^2$$

```
In[ ]:= Quit[];
```

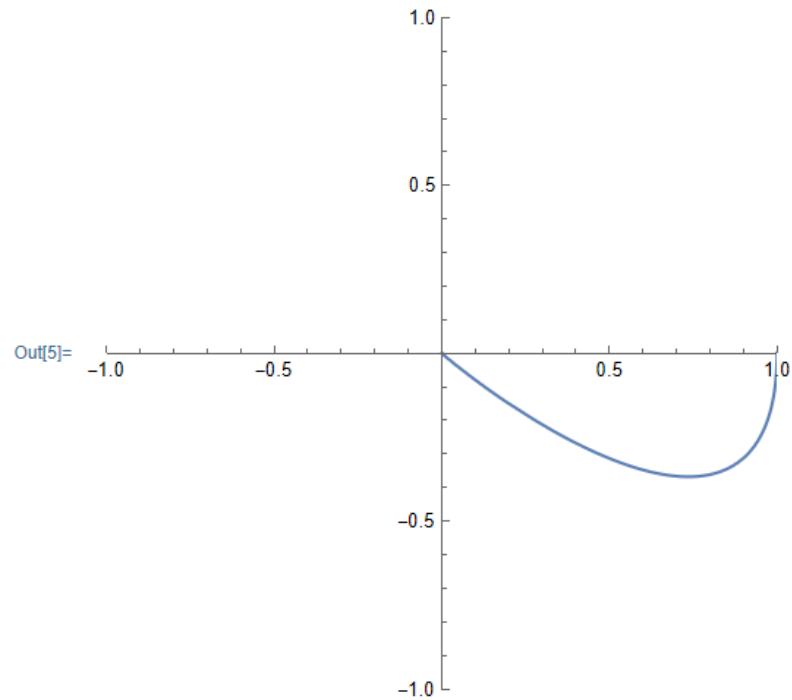
```
In[1]:=  $\beta = 2$ ;  $\omega = 1$ ;
```

```
 $x_0 = 1$ ;  $v_0 = 0$ ;  $t_f = 50$ ;
```

```
Eq[t_] :=  $x''[t] + \beta x'[t] + \omega^2 x[t]$ ;
```

```
sol = NDSolve[{Eq[t] == 0,  $x[0] == x_0$ ,  $x'[0] == v_0$ }, x, {t, 0,  $t_f$ }];
```

```
ParametricPlot[Evaluate[{ $x[t]$ ,  $x'[t]$ } /. sol], {t, 0,  $t_f$ }, PlotRange -> {{- $x_0$ ,  $x_0$ }, {- $x_0$ ,  $x_0$ }}]
```



과대감쇠

$$\omega_0^2 < \beta^2$$

이번에는 진동 운동에 외부에서 강제로 진동을 걸어주면
어떻게 반응을 하게 될까요?

먼저 사인 함수 형태의 구동력에 대해서 살펴보고,
좀 더 일반적인 구동력의 경우로 확장해 봅시다.

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t$$

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = A \cos \omega t$$

$$\beta \equiv b/2m$$

$$\omega_0 = \sqrt{k/m}$$

$$A = F_0/m$$

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t)$$

2차 선형 비동차 상미분 방정식의 일반해:

동차 방정식의 일반해와

특수해의 합으로 표현된다.

$$x_c(t) = e^{-\beta t} [A_1 \exp(\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t) + A_2 \exp(-\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t)]$$

구동력이 시간에만 의존하는 경우,
위와 같은 미분 방정식을 얻게 됩니다.
이것은 2차 선형 비동차 상미분 방정식입니다.

$$x_p(t) = D \cos(\omega t - \delta) \quad \text{시행 함수}$$

$$\begin{aligned} &\{A - D[(\omega_0^2 - \omega^2)\cos \delta + 2\omega\beta \sin \delta]\} \cos \omega t \\ &- \{D[(\omega_0^2 - \omega^2)\sin \delta - 2\omega\beta \cos \delta]\} \sin \omega t = 0 \end{aligned}$$

$$x_p(t) = \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2}} \cos(\omega t - \delta)$$

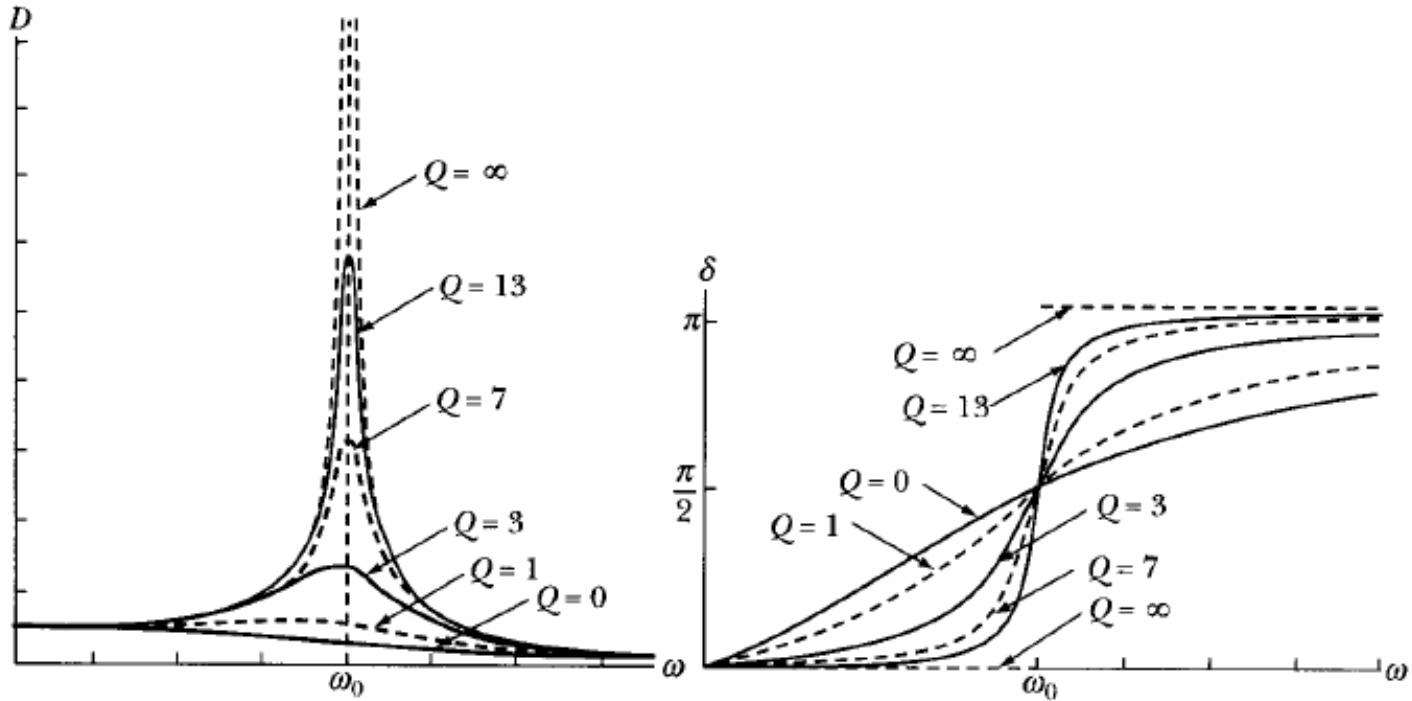
$$\begin{aligned} D &= \frac{A}{(\omega_0^2 - \omega^2)\cos \delta + 2\omega\beta \sin \delta} \\ &= \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2}} \end{aligned}$$

$$\delta = \tan^{-1}\left(\frac{2\omega\beta}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

시간이 충분히 지나게 되면 일반해의 효과는 사라지게 됩니다.
사인형 구동력의 특수해는 다음과 같이 구할 수 있습니다.

$$\left. \frac{dD}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_R} = 0$$

$$\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$



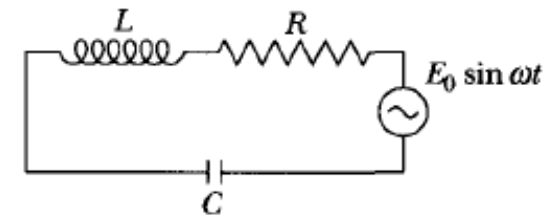
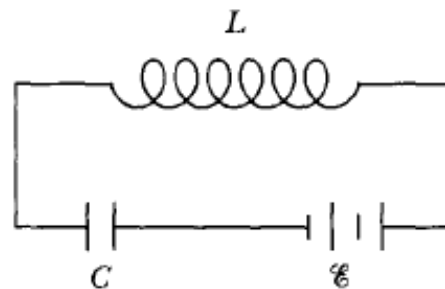
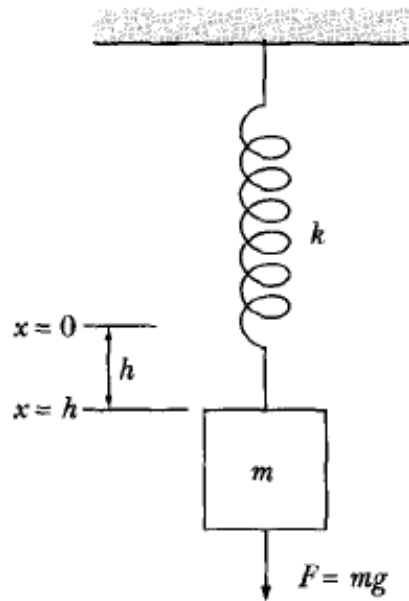
진폭이 최대가 되는 진동수

$$\left. \frac{d\langle T \rangle}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_E} = 0$$

$$\omega_E = \omega_0$$

운동 에너지 또는 속력이 최대가 되는 진동수는 위와 같습니다.
 많은 경우, 공명 진동수는 후자를 의미하는 경우가 있습니다.
 감쇠가 있는 경우, 진폭의 최대 조건과 속력의 최대 조건이
 다르다는 것을 기억하시기 바랍니다.

Mechanical		Electrical	
x	Displacement	q	Charge
$\dot{x}$	Velocity	$\dot{q} = I$	Current
m	Mass	L	Inductance
b	Damping resistance	R	Resistance
$1/k$	Mechanical compliance	C	Capacitance
F	Amplitude of impressed force	$\mathcal{E}$	Amplitude of impressed emf



예제 3.4/3.5: 전자기학의 예

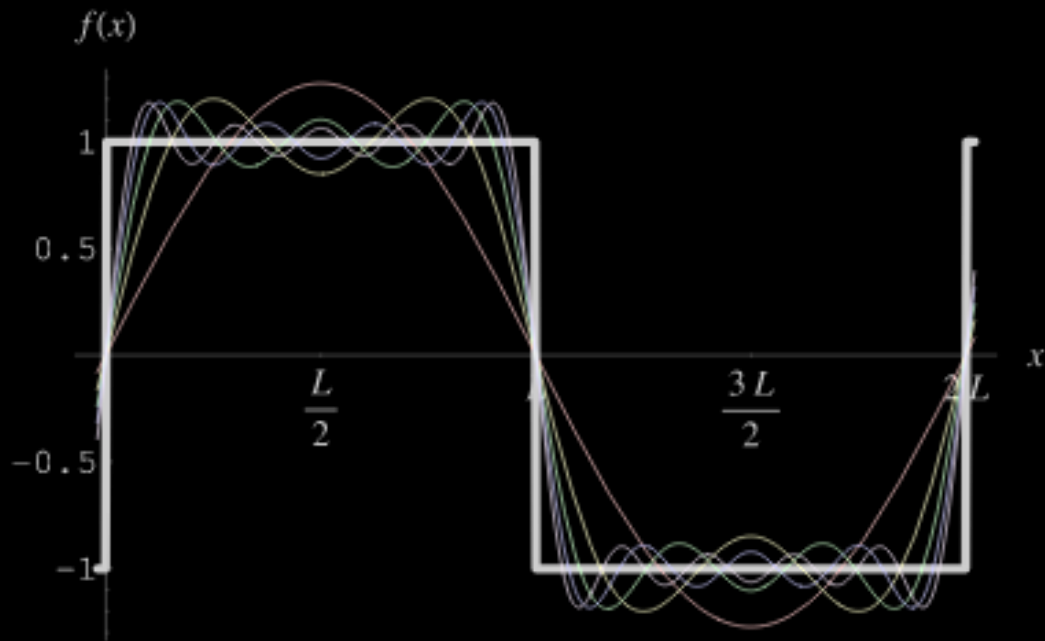
아주 일반적인 구동력의 경우,
어떻게 문제를 이해할 수 있을까요?
이 구동력이 여전히 주기 함수라면,
우리는 푸리에 해석을 활용할 수 있습니다.

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

일정 **주기**를 가지는 임의의 함수는 사인과 코사인의 조합으로
언제나 표현할 수 있습니다.

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

이것은 함수가 다양한 **모드**의 조합으로 표현된다는 것을 의미합니다.



이것은 함수가 다양한 **모드**의 조합으로 표현된다는 것을 의미합니다.

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t') \cos n\omega t' dt'$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t') \sin n\omega t' dt'$$

각 모드에 해당하는 계수는 함수 공간의 직교성에 의해
위와 같은 적분을 사용해서 구할 수 있습니다.

$$F(t) = \sum_n \alpha_n \cos(\omega_n t - \phi_n)$$

$$x(t) = \frac{1}{m} \sum_n \frac{\alpha_n}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_n^2)^2 + 4\omega_n^2 \beta^2}} \cos(\omega_n t - \phi_n - \delta_n)$$

$$\delta_n = \tan^{-1} \left(\frac{2\omega_n \beta}{\omega_0^2 - \omega_n^2} \right)$$

따라서 방정식의 선형성에 의해,
일반적인 특수해 또는
시간이 충분히 흘렀을 때의 정상 상태의 해는
다음과 같이 표현됩니다.

푸리에 급수 $\rightarrow$ 푸리에 변환

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx} dk$$

함수의 주기가 무한대가 되면,
급수가 적분으로 바뀝니다.

푸리에 급수 $\rightarrow$ 푸리에 변환

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

다시 한 번 함수 공간의 완비성에 의해,
위와 같은 역변환도 존재합니다.

만일 구동력이 주기성을 가지지 않는다면
어떻게 해야 할까요?

이 때 사용할 수 있는 훌륭한 방법으로
그린 함수 Green function를 사용하는 방법이 있습니다.
이 아이디어는 적분 변환과도 관련됩니다.

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{m} = \frac{1}{m} \int_0^\infty F(t') \delta(t - t') dt'$$

단, $t < 0$ 인 경우, $F(t) = 0$

$$\ddot{G} + 2\beta\dot{G} + \omega_0^2 G = \frac{1}{m} \delta(t - t')$$

그린 함수의 정의

우리가 다루고자 하는 미분 방정식을
일반성을 잃지 않고 위와 같은 적분 형태로 적어봅시다.
그리고 그린 함수 $G(t, t')$ 를 도입해 봅시다.

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{m} = \frac{1}{m} \int_0^\infty F(t')\delta(t-t')dt'$$

단, $t < 0$ 인 경우, $F(t) = 0$

$$\ddot{G} + 2\beta\dot{G} + \omega_0^2 G = \frac{1}{m} \delta(t-t')$$

그린 함수의 정의

$$x = \int_0^\infty F(t')G(t,t')dt'$$

그러면 일반적인 해는 위와 같은 적분으로 표현됩니다.

그린 함수만 알면, 일반적인 해를
적분 형태로 구할 수 있다는 말이 됩니다.

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \equiv F(s)$$

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{1}{m} \delta(t - t')$$



$$(s^2 + 2\beta s + \omega_0^2)X = \frac{e^{-t's}}{m} + (sx_0 + \dot{x}_0 + 2\beta x_0)$$

이제 그런 함수를 구하기 위해서
 라플라스 변환이라고 하는 적분 변환을 사용해 봅시다.
 이 적분 변환에 의해 미분 방정식이
 다항 방정식으로 변한다는 것을 알 수 있습니다.

$$x(t_0) = 0 \qquad \dot{x}(t_0) = 0$$

$$G(t, t') \equiv \begin{cases} \frac{1}{m\omega_1} e^{-\beta(t-t')} \sin \omega_1(t-t'), & t \geq t' \\ 0, & t < t' \end{cases}$$

초기 조건을 대입해서 문제를 푼 다음에
 라플라스 역변환을 취하면,
 우리가 원하는 그런 함수를 구할 수 있습니다.

$$F(t) = F_0 e^{-\gamma t}, \quad t > 0$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^t F(t') G(t, t') dt'$$

$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{F_0}{m\omega_1^2} \int_{\omega_1 t}^0 e^{-\gamma t} e^{[(\gamma-\beta)/\omega_1]z} \sin z \, dz \\ &= \frac{F_0/m}{(\gamma-\beta)^2 + \omega_1^2} \left[e^{-\gamma t} - e^{-\beta t} \left(\cos \omega_1 t - \frac{\gamma-\beta}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right) \right] \end{aligned}$$

예제 3.7: 그린 함수를 사용하는 예

이번 장에서 우리는 가장 간단한 형태의
선형 미분 방정식의 해를 풀고
이 해를 물리적으로 해석하는 연습을 하였습니다.

동차 방정식의 일반해가 **선형 중첩**으로 표현된다는 것,
그리고 주기성을 가지는 함수에 대해 **푸리에 전개**를,
비주기성을 가지는 함수에 대해 **적분 변환**을 취하는 전략은
앞으로 미분 방정식을 다루는 많은 문제에서
자주 만나게 될 것입니다.

```

In[ ]:= Quit[];

In[1]:= (* nonlinear forced motion *)

$$\beta = 0.1; \omega = 1; \text{tf} = 100; x0 = 1; v0 = 0; r0 = 0.1; \text{tstep} = \text{tf} / \text{jmax}; \text{jmax} = 1000; \text{kmax} = 100;$$


$$\text{Eq}[t\_ ] := \underline{x''[t] + \beta x'[t] + \omega^2 \text{Sin}[x[t]] - 0.75 \text{Cos}[t];}$$

방정식 부분

For[k = 0, k < kmax,
  xini[k] = x0 + r0 RandomReal[]; vini[k] = v0 + r0 RandomReal[];
  sol[k] = NDSolve[{Eq[t] == 0, x[0] == xini[k], x'[0] == vini[k]}, x, {t, 0, tf}];
  k++;
];

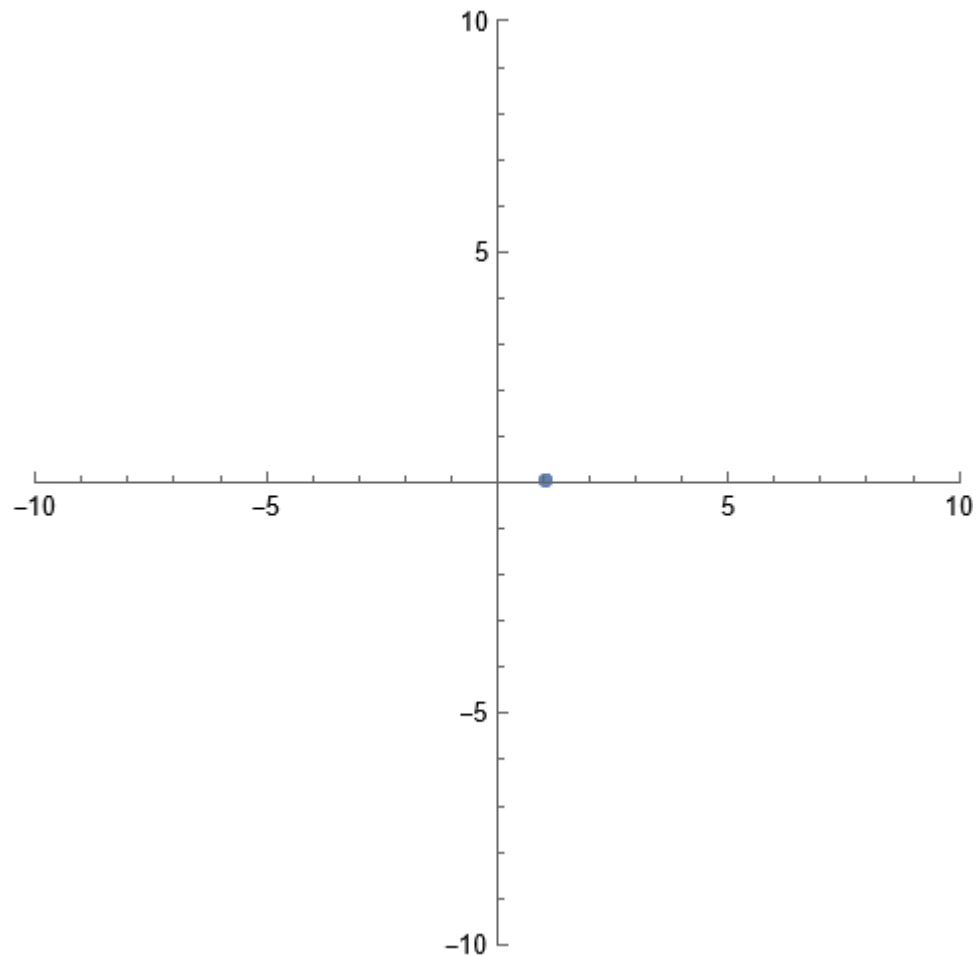
For[j = 0, j < jmax,
  array[j] = {};
  For[k = 0, k < kmax,
    array[j] = Join[array[j], {{Evaluate[x[j tstep] /. sol[k]][[1]], Evaluate[x'[j tstep] /. sol[k]][[1]]}}];
    k++;
  ];
  j++;
];

plot[j_] := ListPlot[array[j], PlotRange → {{-10 x0, 10 x0}, {-10 x0, 10 x0}}, AspectRatio → 1];

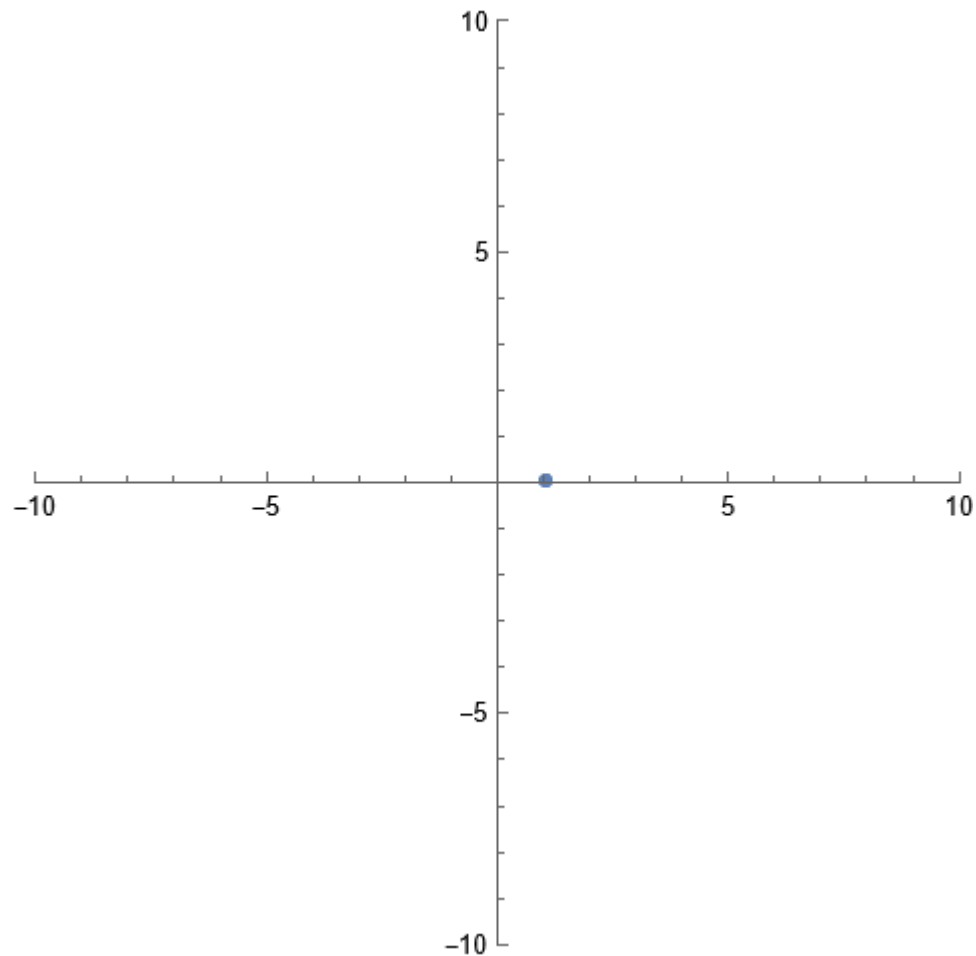
ListAnimate[Table[plot[j], {j, 0, jmax - 1}], AnimationRate → 2]
frames = Table[plot[j], {j, 0, jmax - 1}];
Export["myAnimation2.gif", frames]

```

다음과 같이 매스매티카에서 코딩하여
위상 공간에서 초기 조건의 의존성에 대해서 살펴봅시다.



선형 시스템의 경우 초기 조건에 약간의 불확실성이 있어도
그 효과가 위상 공간 안에서 확산되지 않는 것을 볼 수 있습니다.



비선형 시스템의 경우 초기 조건의 불확실성이
위상 공간으로 확산되는 것이 가능합니다.

이러한 현상이 바로 **복잡계 현상**입니다.
우리가 살고 있는 세상의 역학 법칙은 시간에 대해 **가역적**이지만
우리의 경험은 시간에 대해 **비가역적**입니다.
복잡계 현상은 이러한 질문에 대해서 답을 하는데
일정 부분 도움을 줄 수 있을 것입니다.

감사합니다