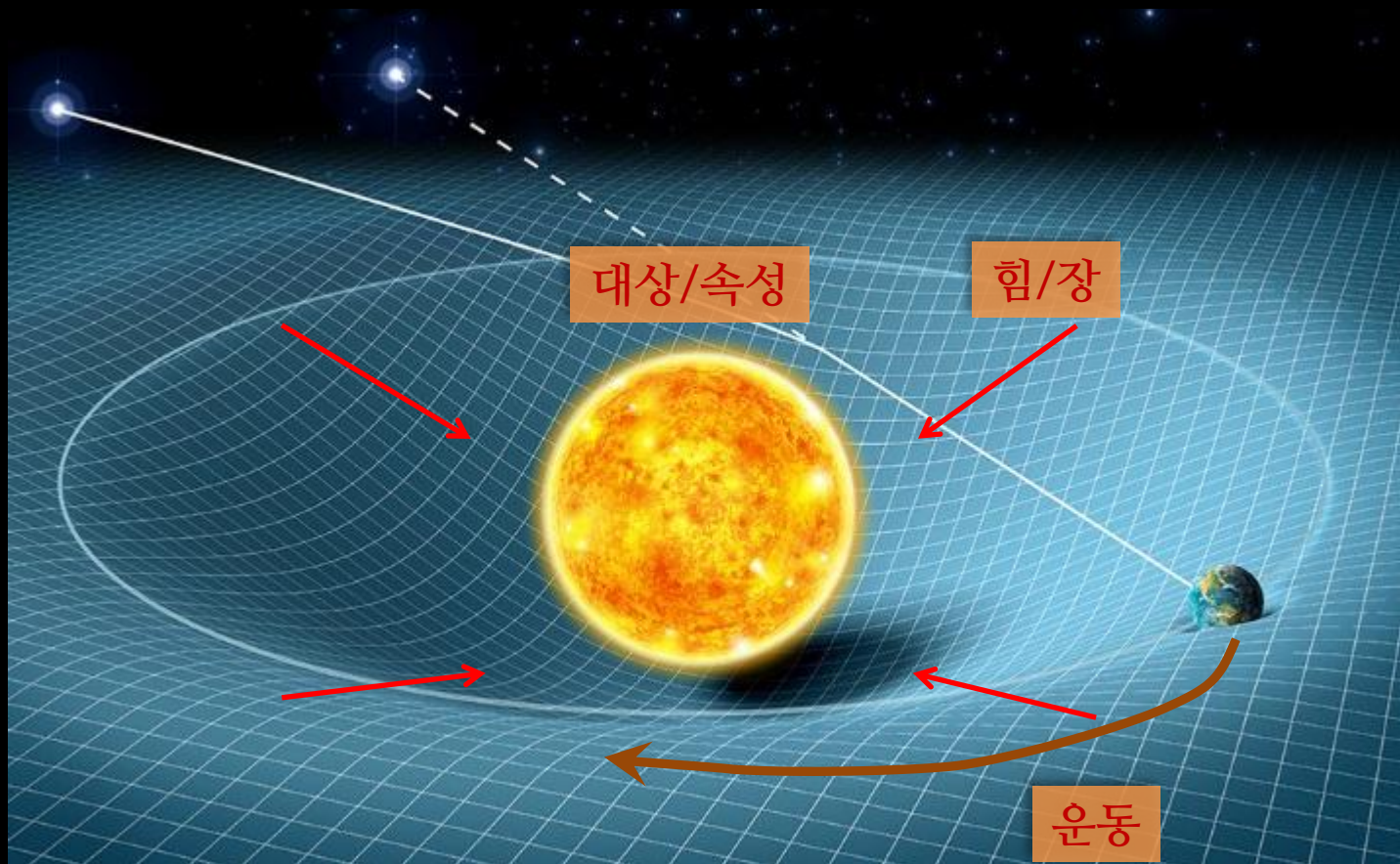


5장 만유인력

지난 시간까지는 운동 방정식을 세우고
푸는 과정에 대해서 살펴보았습니다.
이번에는 운동 방정식을 적기 위해서 필요한
장 방정식을 다루어보겠습니다.
그 중에서 가장 중요한 예는 바로
만유인력이 되겠습니다.



대상

object/source

힘/장

force/field

운동

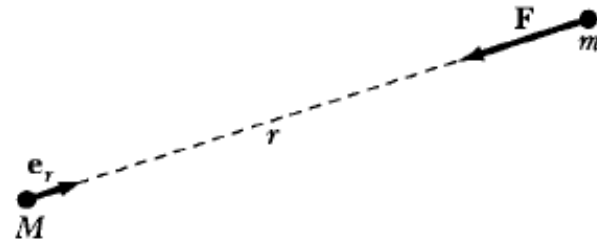
motion

장 방정식
field equation

운동 방정식
equation of motion

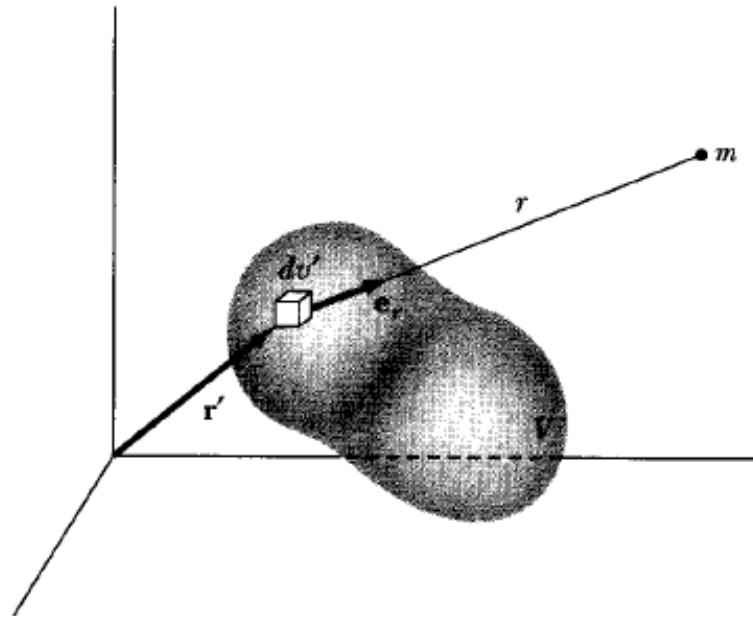


$$\mathbf{F} = -G \frac{mM}{r^2} \mathbf{e}_r$$



만유인력은 중심력이며, 항상 인력으로만 작용합니다.

$$\mathbf{F} = -Gm \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}') \mathbf{e}_r}{r^2} dv'$$



중첩 원리가 적용되므로,
원천이 연속적으로 분포하고 있는 경우에는
위와 같이 표현됩니다.

$$\mathbf{g} = -G \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}') \mathbf{e}_r}{r^2} dV'$$

중력가속도

$$\Phi = -G \frac{M}{r}$$

중력 퍼텐셜

$$\mathbf{g} \equiv -\nabla\Phi$$

퍼텐셜과 중력가속도의 관계

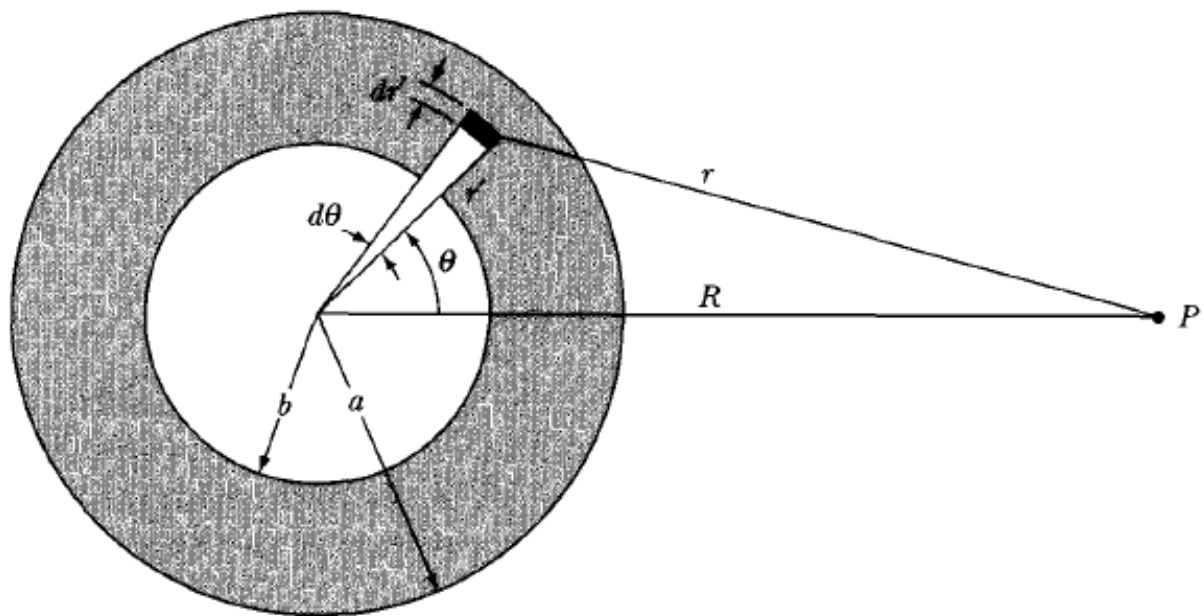
질점의 질량을 제외한 순수한 배경의 정보는
중력장 또는 중력가속도에 담겨 있습니다.
이것은 중력 퍼텐셜의 미분으로 기술됩니다.

$$\Phi = -G \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{r} dv'$$

$$\Phi = -G \int_S \frac{\rho_s}{r} da'$$

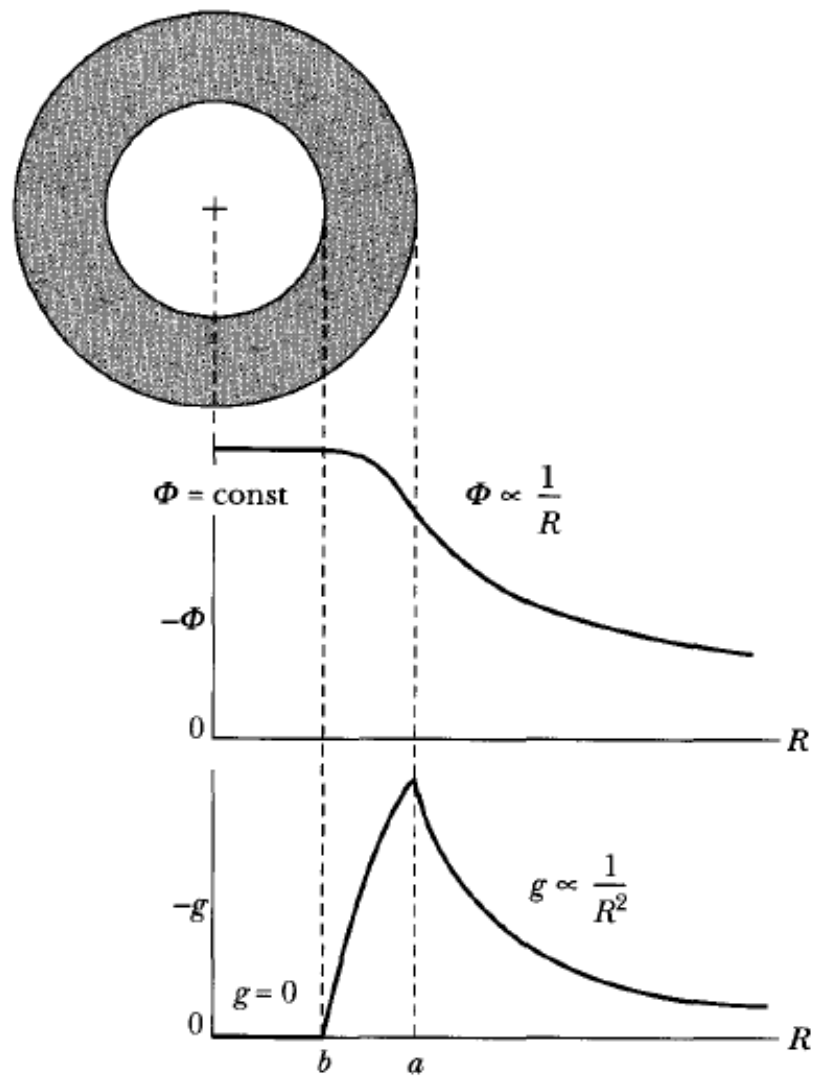
$$\Phi = -G \int_F \frac{\rho_l}{r} ds'$$

중력 퍼텐셜은 원천 적분으로 기술될 수 있습니다.

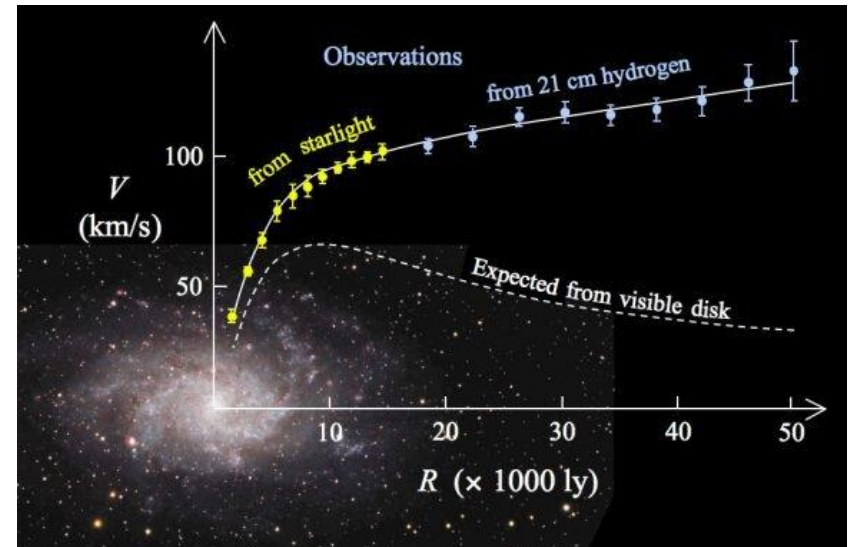
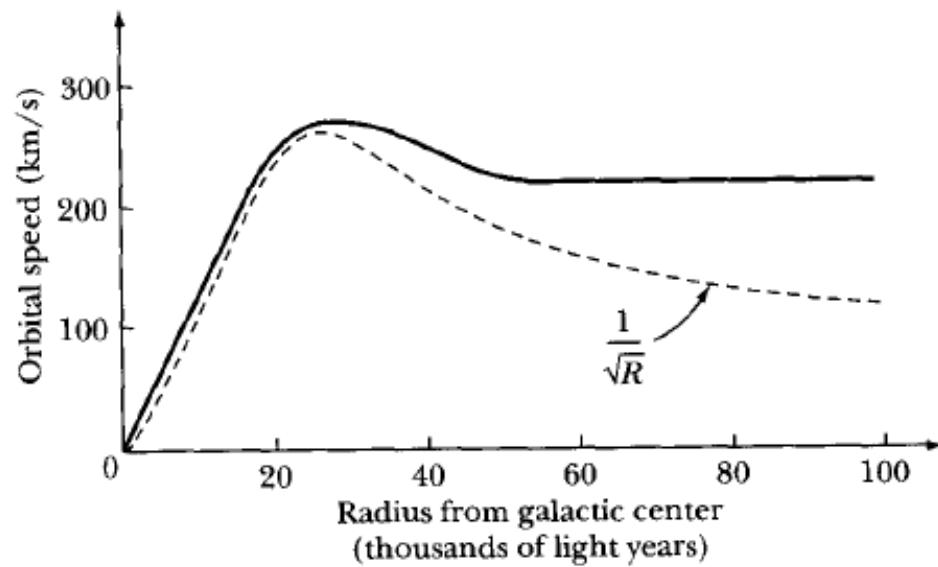


$$\Phi(R > a) = - \frac{GM}{R}$$

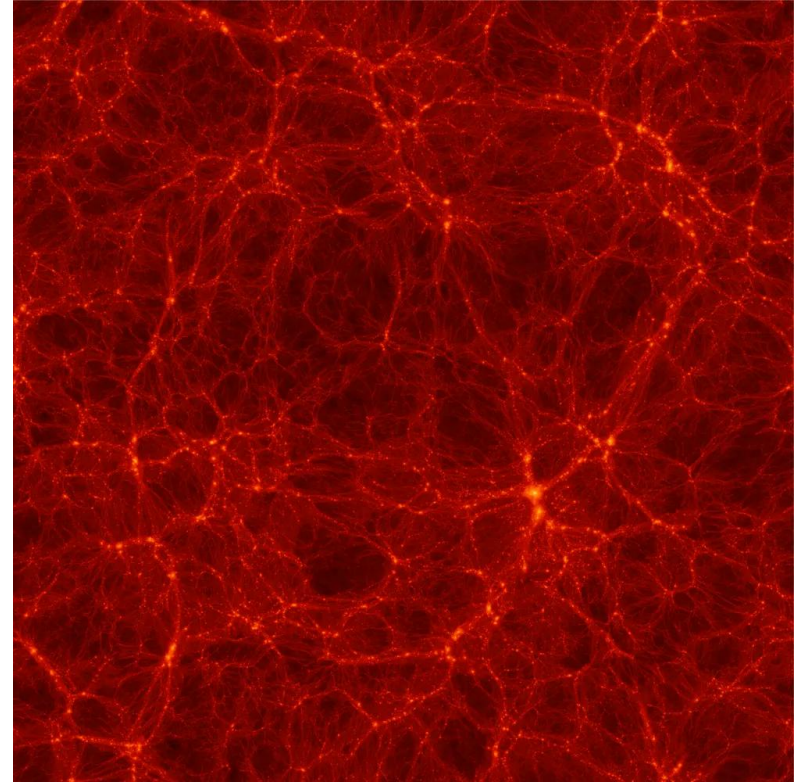
예제 5.1: 구각 정리



예제 5.1: 구각 정리

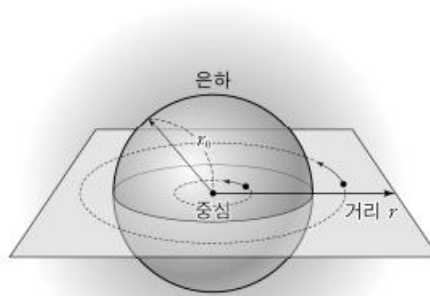


예제 5.2: 암흑 물질과 은하 회전 곡선



예제 5.2: 암흑 물질의 증거

4. 그림은 구면 대칭의 질량 분포를 가지는 은하와 은하 주위를 운동하는 물체를 나타낸 것이다. 은하의 질량 분포는 은하 중심으로부터의 거리 r 에 따라 변하고, 물체는 은하 중심을 지나는 평면상에서 등속 원운동한다.



은하 중심으로부터 거리 r 만큼 떨어진 물체의 속력 v 는

$$v(r) = \begin{cases} \frac{v_0}{r_0} r, & r < r_0 \\ v_0, & r \geq r_0 \end{cases}$$

이다. $M(r)$ 가 반지름 r 인 구면 내부의 질량일 때, 은하의 질량 밀도는 $\rho(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{dM(r)}{dr}$ 이다.

<자료>를 참고하여 $r < r_0$ 과 $r \geq r_0$ 에 대한 은하의 질량 밀도 $\rho(r)$ 를 각각 구하시오. (단, v_0 , r_0 은 상수이다.) [2점]

<자 료>

○ 은하 중심으로부터 r 만큼 떨어진 물체의 등속 원운동 관계식은

$$\frac{v^2(r)}{r} = \frac{GM(r)}{r^2} \text{ 이고, } G \text{는 중력 상수이다.}$$

2023년 임용 기출

사실 역제곱 법칙과 중첩 원리라는 두 성질은
정전기학에서도 성립합니다.

따라서 만유인력과 정전기력은 수학적으로 상당히 유사합니다.

이러한 성질을 이해하기 위해 여기에서 잠시
장의 미분과 적분에 대해서 살펴봅시다.

미분의 경우 우리는

스칼라 및 벡터의

상미분과 편미분을

고려해야 합니다.

미분의 경우 우리는

스칼라 및 벡터의

상미분과 편미분을

고려해야 합니다.

미분의 경우 우리는

스칼라 및 벡터의

상미분과 편미분을



특정한 미분의 방향이 주어짐
(매개변수)



가능한 모든 방향에 대해
미분할 수 있음

고려해야 합니다.

$$\frac{df}{dt}$$

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{dA_x}{dt} \hat{x} + \frac{dA_y}{dt} \hat{y} + \frac{dA_z}{dt} \hat{z}$$

스칼라와 벡터의 상미분은 위와 같습니다.

$$\nabla \equiv \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}$$

편미분은 위와 같은 기울기 gradient 연산자를 사용해서
모든 방향으로 미분해보면 됩니다.

$$\nabla \equiv \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}$$

물론 3차원의 한 방향으로 미분할 수도 있겠지만
이러한 특정 방향의 편미분은 좌표 의존성을 갖게 됩니다.
우리는 최대한 편미분이 좌표변환에 대해
공변적으로 표현되는 미분 연산의 조합을 찾고자 합니다.

$$\nabla f \equiv \hat{x} \frac{\partial f}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial f}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial f}{\partial z}$$

스칼라 함수에 기울기 연산자를 적용하면
스칼라의 **기울기**gradient를 얻게 됩니다.

$$\nabla \equiv \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

기울기 연산자 자체가 벡터이기 때문에,
벡터 함수에 대해서는 두 가지 방법으로 적용이 가능합니다.

$$\nabla \equiv \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}$$

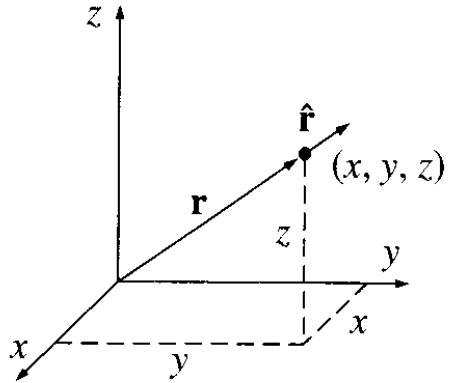
발산 divergence

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

회전 curl

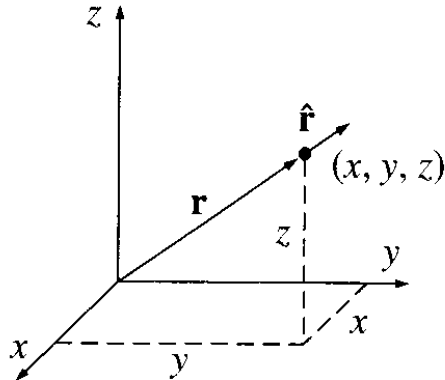
$$\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

기울기 연산자와의 내적을 발산divergence이라고 부르고,
기울기 연산자와의 외적을 회전curl이라고 부릅니다.



$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$

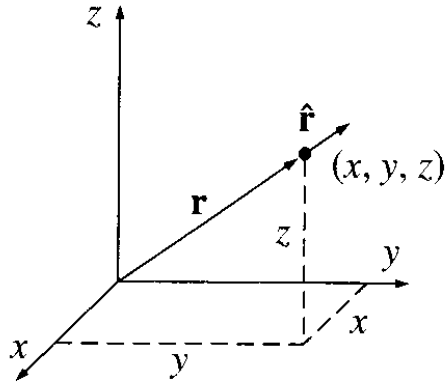
특히 위치를 나타내는 벡터는 위와 같습니다.



$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

방향을 나타내는 단위벡터도 정의할 수 있습니다.

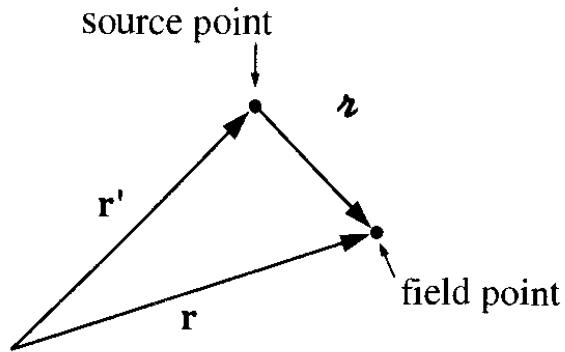


$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$d\vec{r} = dx \hat{x} + dy \hat{y} + dz \hat{z}$$

위치 벡터에 대한 미소 길이도 정의할 수 있습니다.



$$\vec{r} - \vec{r}'$$

$$\widehat{\vec{r} - \vec{r}'} = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

많은 경우 **원천점**source point과 **관찰점**field point 사이의 상대적인 위치벡터를 사용하기도 합니다.

미분 연산을 두 번 하면 다음과 같은 조합이 가능합니다.

$$\nabla \cdot (\nabla f) \equiv \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

라플라시안

미분 연산을 두 번 하면 다음과 같은 조합이 가능합니다.

$$\nabla \cdot (\nabla f) \equiv \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

라플라시안

$$\nabla^2 \vec{A} = (\nabla^2 A_x) \hat{x} + (\nabla^2 A_y) \hat{y} + (\nabla^2 A_z) \hat{z}$$

미분 연산을 두 번 하면 다음과 같은 조합이 가능합니다.

$$\nabla \cdot (\nabla f) \equiv \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

라플라시안

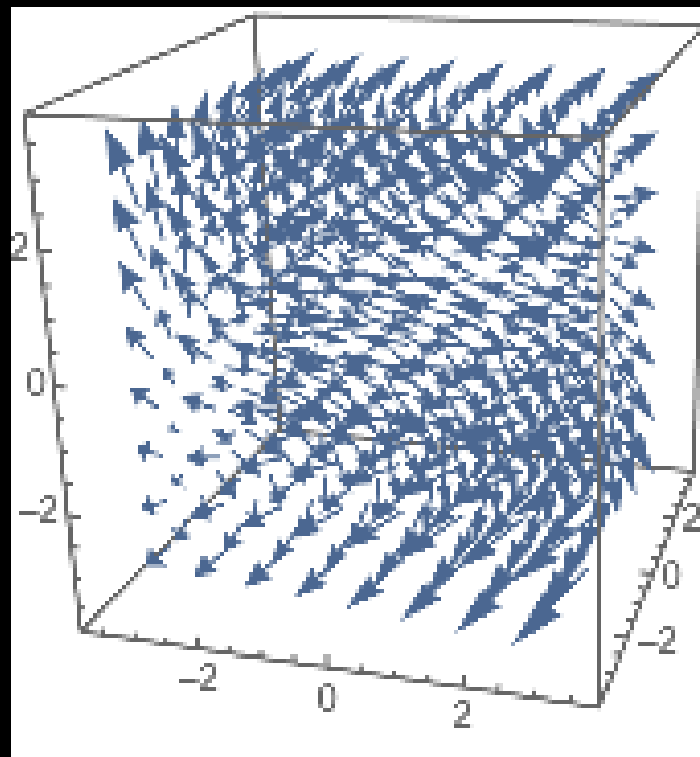
$$\nabla^2 \vec{A} = (\nabla^2 A_x)\hat{x} + (\nabla^2 A_y)\hat{y} + (\nabla^2 A_z)\hat{z}$$

그리고 아래의 두 식은 아주 중요한 **항등식**입니다.

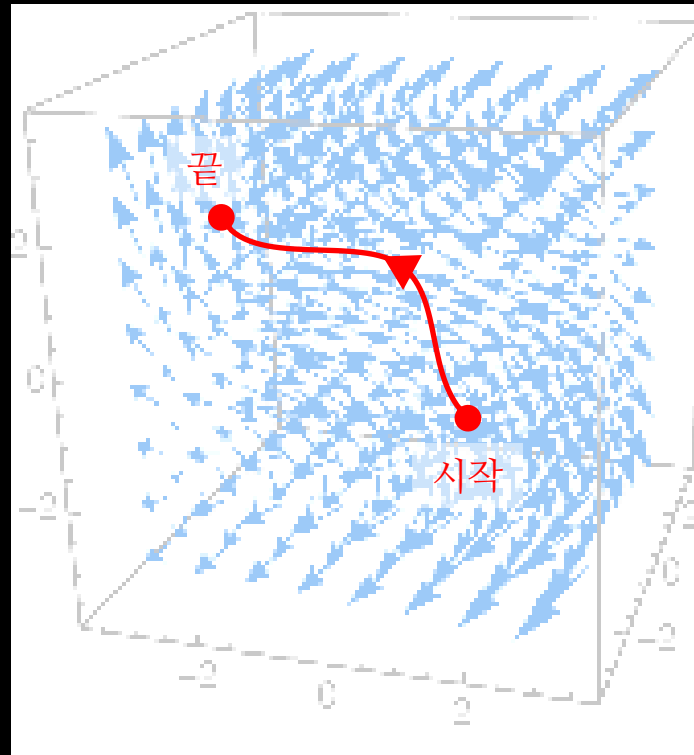
$$\nabla \times \nabla f = 0$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$$

적분의 경우 우리는
스칼라 및 벡터의
선적분, 면적분 및 부피적분을
고려해야 합니다.

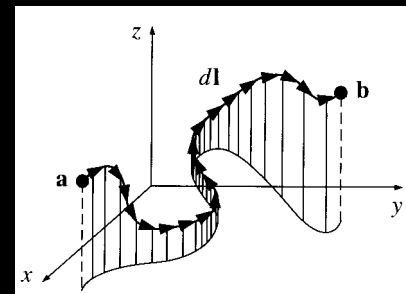


선, 면 및 부피 적분에 대해 생각하기 위해,
먼저 벡터장을 생각해봅시다.



공간 상에서 선적분을 하기 위해서는
먼저 시작과 끝, 그리고 그 둘을 잇는 경로를 생각해야 합니다.

$$\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{A} \cdot d\vec{s}$$



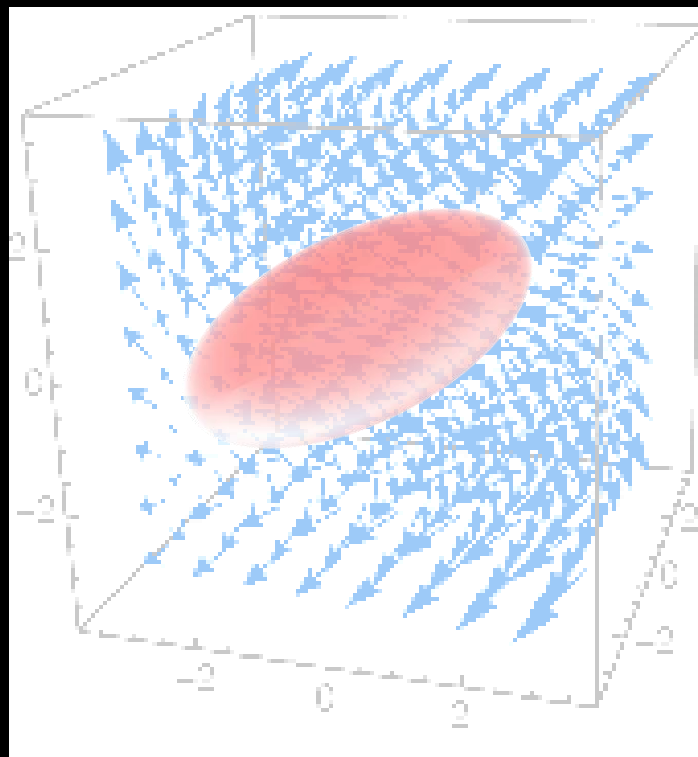
선적분은 위와 같은 방식으로 정의됩니다.
여기에서 $d\vec{s}$ 는 주어진 경로에 대한 미소 접선 벡터입니다.

$$\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int_{\tau_a}^{\tau_b} \left(\vec{A} \cdot \frac{d\vec{s}}{d\tau} \right) d\tau$$

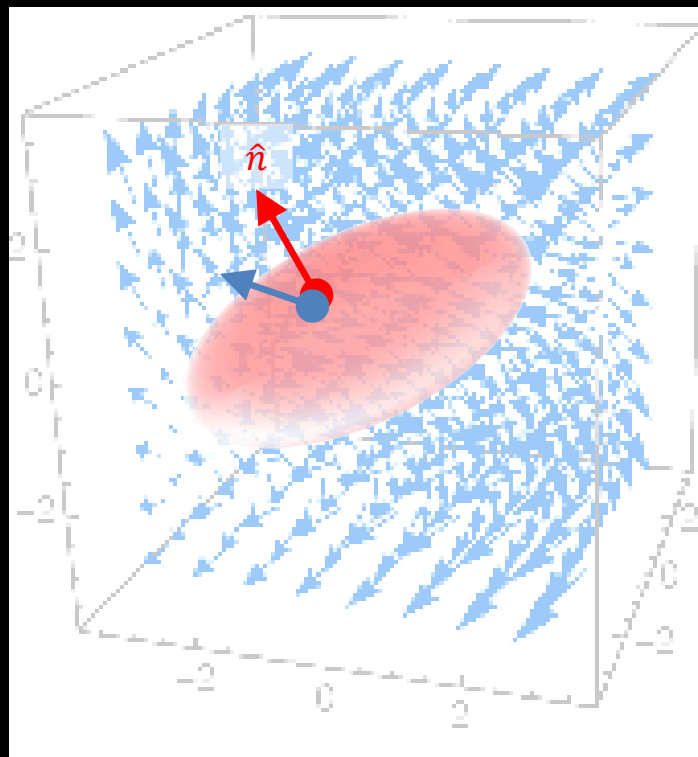
임의의 경로는 1차원 매개변수에 의해 표현이 가능합니다.
이 매개변수에 대해서 위와 같이 표현할 수 있습니다.

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{s}$$

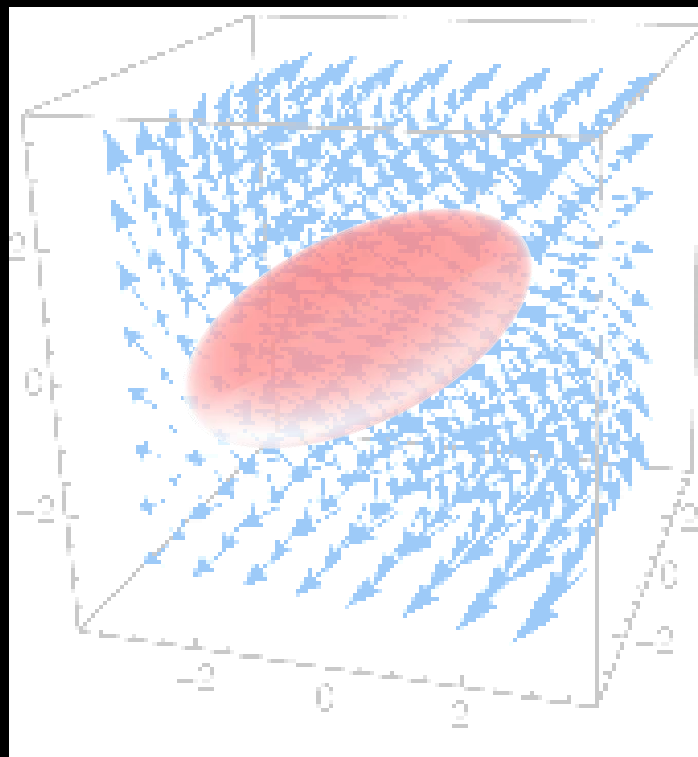
경로가 제자리로 돌아오는 경우,
즉 경로가 폐곡선인 경우는 위와 같은 방식으로
선적분을 표현합니다.



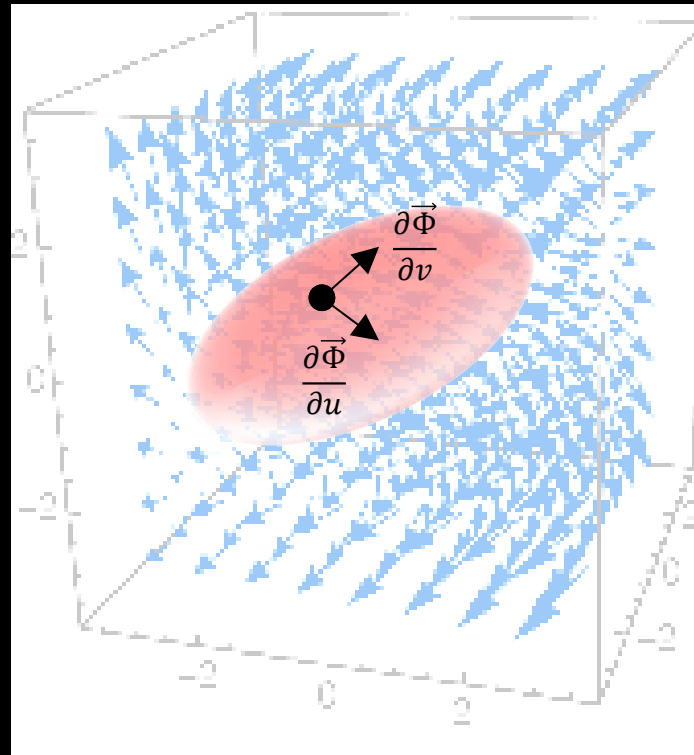
공간 상에서 면적분을 하기 위해서는
우리가 적분하고자 하는 **곡면**을 생각해야 합니다.



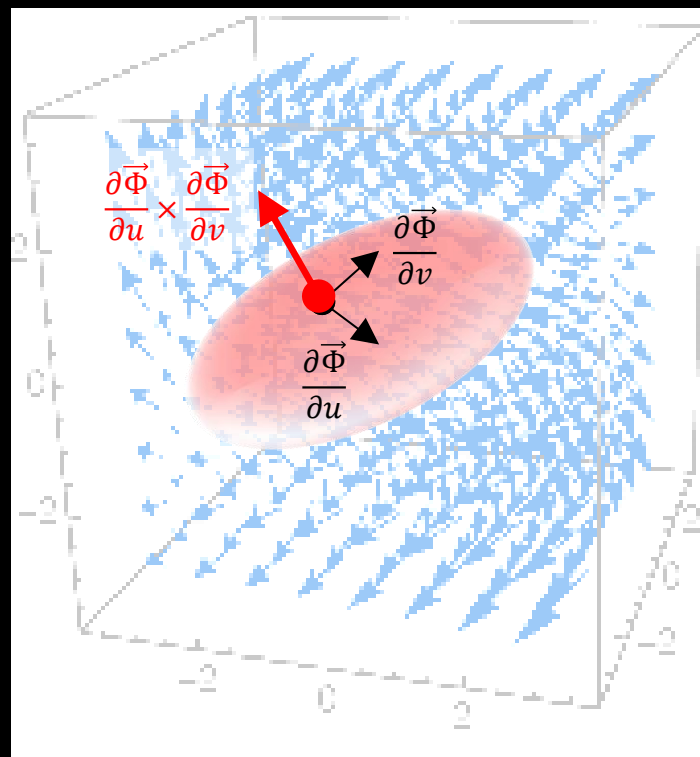
이 때, 이 곡면과 벡터장은 어떤 관계를 가져야 할까요?
예를 들어, 벡터장과 곡면이 수직으로 통과하는 성분만 골라서
적분을 계산한다고 해 봅시다.



그러면 곡면은 우리가 어떻게 정의할 수 있을까요?
곡선의 경우에 1차원 매개변수로 표현했듯이,
일반적으로 곡면은 2차원 매개변수로 표현이 가능합니다.

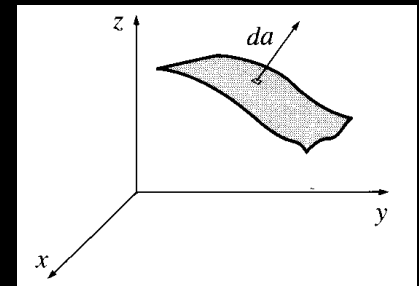


곡면의 위치를 표현하는 벡터를 $\vec{\Phi}(u, v)$ 라고 하고,
 u 와 v 를 이 곡면의 매개변수라고 합시다.
그러면 이 벡터를 u 와 v 로 미분함으로써
곡면에 접하는 두 개의 벡터를 얻을 수 있습니다.



우리가 앞에서 봤듯이, 이 두 점벡터를 외적하면
크기는 이 점 근처의 미소면적이 되면서
방향은 두 점벡터와 수직한 방향을 나타내게 됩니다.

$$\int_S \vec{B} \cdot d\vec{A}$$



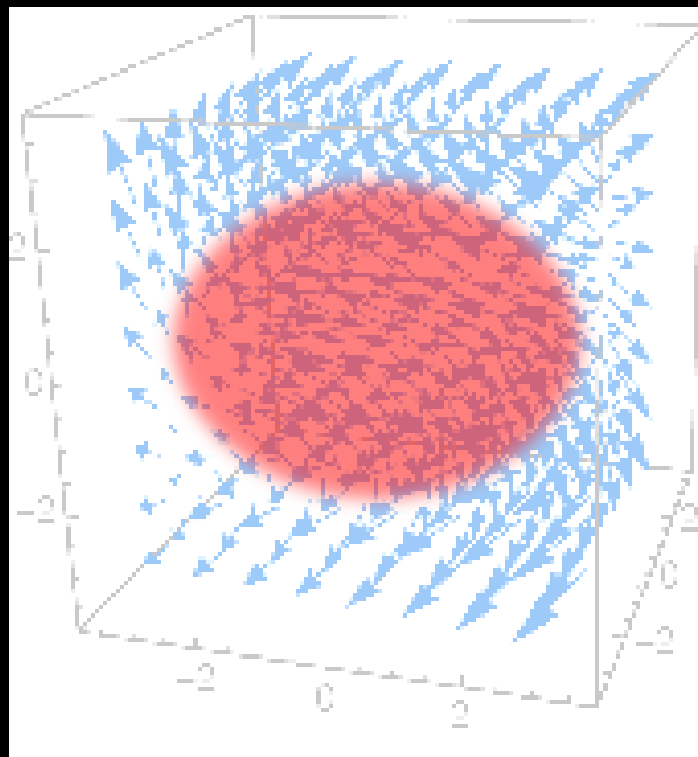
면적분은 위와 같은 방식으로 정의됩니다.
여기에서 $d\vec{A}$ 는 주어진 면에 수직인 미소 법선 벡터입니다.

$$\int_{\mathcal{S}} \vec{B} \cdot d\vec{A} = \iint_{\mathcal{S}} (\vec{B} \cdot \hat{n}) \underbrace{\left| \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial v} \right|}_{\substack{d\vec{A} \text{의} \\ \text{단위벡터} \quad d\vec{A} \text{의 크기}}} du dv$$

2차원 매개변수를 사용하면
이 적분은 위와 같이 표현될 수 있습니다.

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

곡면이 닫혀있는 경우,
즉 폐곡면인 경우는 위와 같은 방식으로
면적분을 표현합니다.



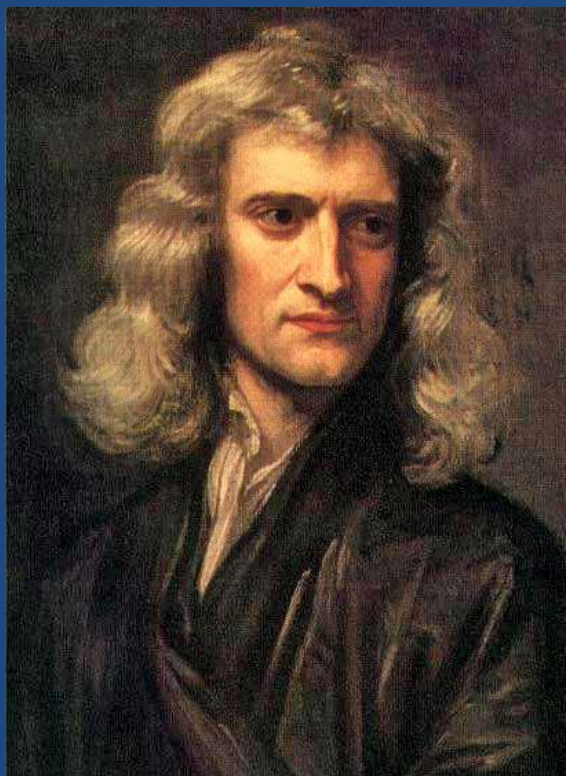
마지막으로 공간 상에서 부피적분을 한다고 생각해봅시다.
이 때는 벡터장의 각 성분을 스칼라처럼 생각하고
부피적분을 한다고 생각할 수 있습니다.

$$\int_v f dV = \int_v f dx dy dz$$

따라서 스칼라에 대한 부피적분을 생각해봅시다.
부피 영역은 3차원 매개변수로 표현이 됩니다.

$$\begin{aligned}
 \int_V f dV &= \int_V f dx dy dz \\
 &= \int_V f \left| \frac{\partial(x \ y \ z)}{\partial(x' \ y' \ z')} \right| dx' dy' dz' \\
 &\equiv \int_V f \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x'} & \frac{\partial x}{\partial y'} & \frac{\partial x}{\partial z'} \\ \frac{\partial y}{\partial x'} & \frac{\partial y}{\partial y'} & \frac{\partial y}{\partial z'} \\ \frac{\partial z}{\partial x'} & \frac{\partial z}{\partial y'} & \frac{\partial z}{\partial z'} \end{vmatrix} dx' dy' dz'
 \end{aligned}$$

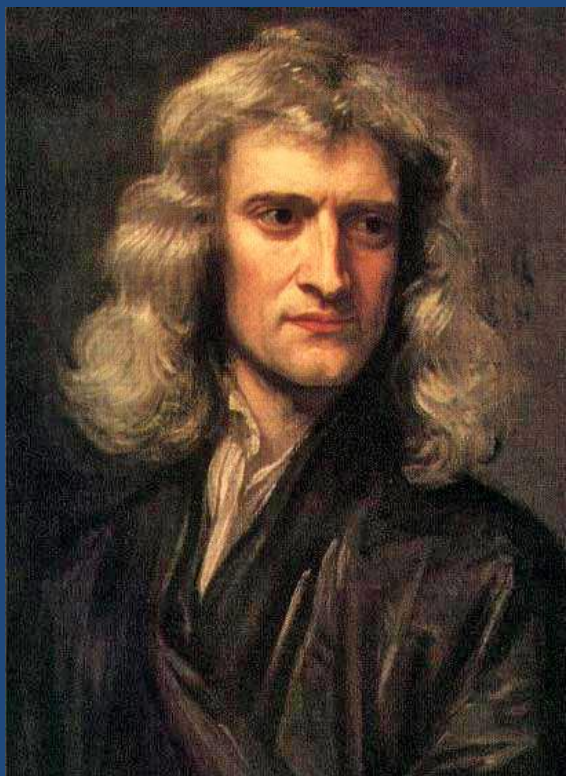
직교좌표가 아닌 다른 매개변수로 표현할 때에는
 위와 같은 좌표 변환의 인자를 고려해주어야 합니다.
 이 인자를 **야코비안**Jacobian이라고 합니다.



$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

$$F'(x) = f(x)$$

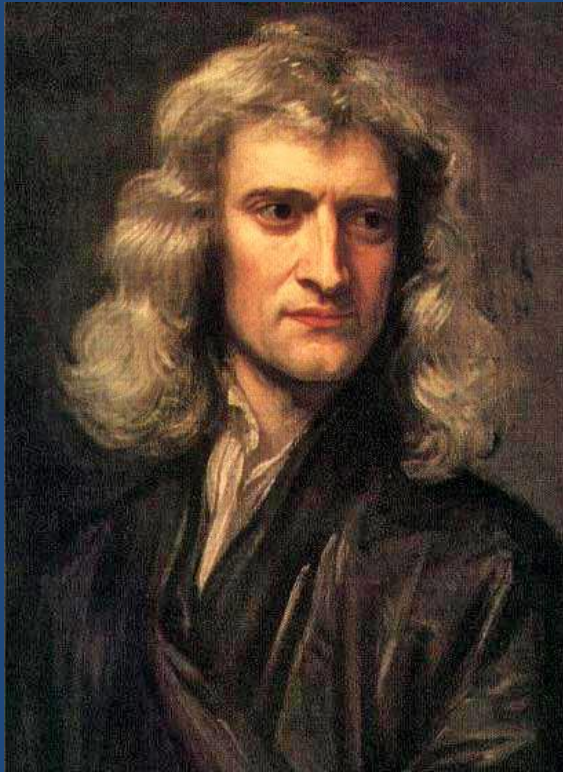
이제 미분과 적분의 연결에 대해서 알아보시다.
이것은 유명한 **미적분학의 기본정리**를
벡터에 대해서 확장하는 것과 같은 일입니다.



$$\int_a^b F'(x) dx = \underbrace{F(b) - F(a)}_{\text{경계}}$$

$$F'(x) = f(x)$$

미적분학의 기본정리는
어떤 함수의 미분의 적분은
그 함수의 경계가 결정한다는 것을 의미합니다.



$$\int_a^b F'(x) dx = \underbrace{F(b) - F(a)}_{\text{경계}}$$

$$F'(x) = f(x)$$

흥미롭게도 이러한 미적분학의 기본정리는
벡터의 경우로 확장될 수 있다는 것이 알려져 있습니다.

$$\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} (\nabla f) \cdot d\vec{s} = f(\vec{b}) - f(\vec{a})$$

먼저 스칼라의 기울기 gradient를 선적분하면
그 적분은 경로의 끝 값에 의해서 결정됩니다.

$$\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = f(\vec{b}) - f(\vec{a})$$

$$\nabla f = \vec{F}$$

따라서 어떤 벡터장 $\vec{F}$ 가 다른 스칼라 f 의 기울기가 된다면
선적분은 그 끝값에만 의존합니다.

$$\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = f(\vec{b}) - f(\vec{a})$$

$$\nabla f = \vec{F}$$

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$$

더 나아가서 이런 경우 어떤 스칼라의 기울기의 폐곡선 적분은
0이 된다는 것, 즉
보존력장이 된다는 것을 알 수 있습니다.

일반적으로 다음 진술들은 동일합니다.

$\vec{A}$ 가 보존력장이다.



$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{s} = 0$$



$\vec{A} = \nabla f$ 가 되는 f 가 존재한다.

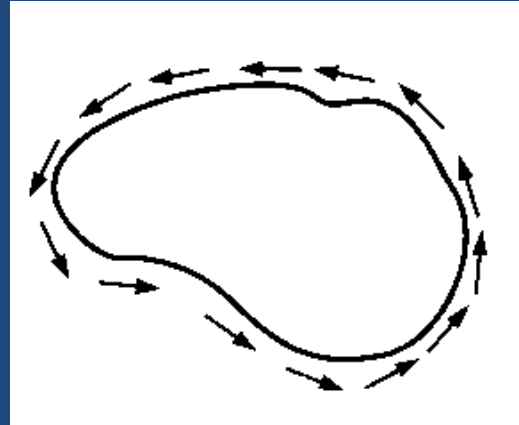
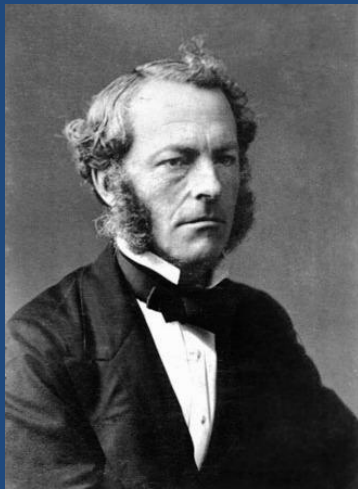


$$\nabla \times \vec{A} = 0$$

$$\int_{\mathcal{A}} (\nabla \times \vec{B}) \cdot d\vec{A} = \oint_{\partial \mathcal{A}} \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

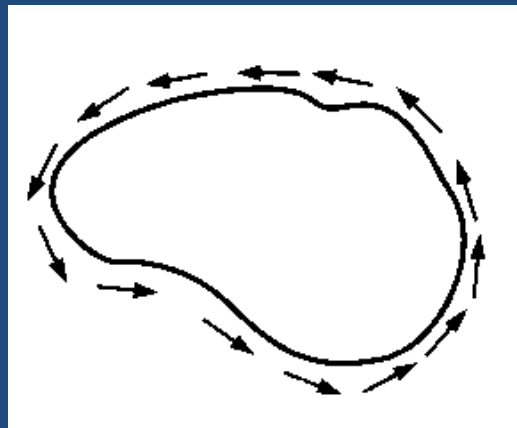
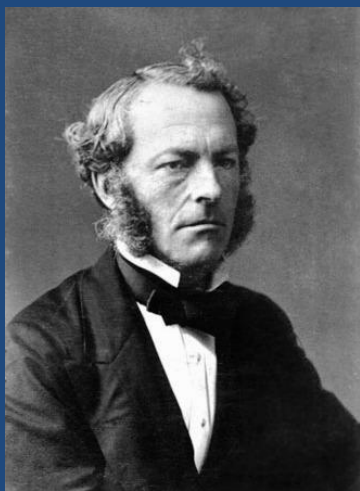
벡터의 회전_{curl}을 면적분하면
그 적분은 곡면 영역의 경계에 의해서 결정됩니다.

$$\int_{\mathcal{A}} (\nabla \times \vec{B}) \cdot d\vec{A} = \oint_{\partial \mathcal{A}} \vec{B} \cdot d\vec{s}$$



이것을 스토크스Stokes의 정리라고 합니다.

$$\int_{\mathcal{A}} (\nabla \times \vec{B}) \cdot d\vec{A} = \oint_{\partial \mathcal{A}} \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

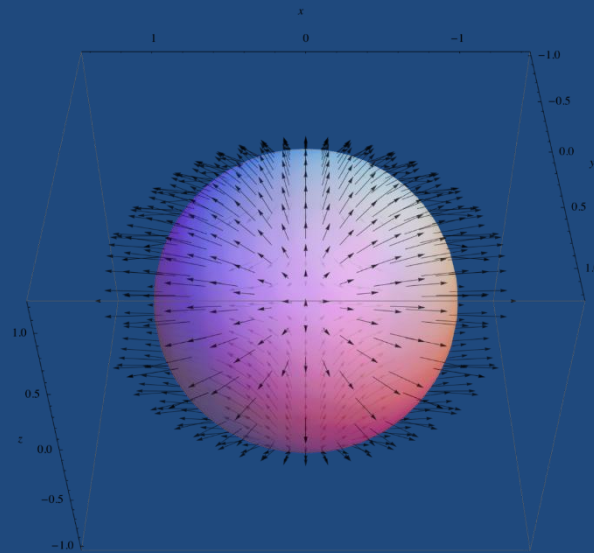


이 정리에서 한 가지 중요한 점은 $d\vec{s}$ 와 $d\vec{A}$ 의 관계는 **오른손 법칙**을 따른다는 점입니다.

$$\int_V (\nabla \cdot \vec{B}) dV = \oint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

벡터의 발산divergence을 부피적분하면
그 적분은 부피 영역의 경계에 의해서 결정됩니다.

$$\int_V (\nabla \cdot \vec{B}) dV = \oint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{A}$$



이것을 가우스Gauss의 정리라고 합니다.

$$\int_V (\nabla \cdot \vec{B}) dV = \oint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = \vec{F}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

더 나아가서 어떤 벡터의 발산이 0이 된다면
그 벡터의 임의의 폐곡면 적분은 항상 0이 되는 것을 알 수 있습니다.

일반적으로 다음 진술들은 동일합니다.

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$



$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ 가 되는 $\vec{A}$ 가 존재한다.



$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

예]:

$$\nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right) = \nabla \left(\frac{1}{r^2} \right) \cdot \hat{r} + \frac{1}{r^2} (\nabla \cdot \hat{r}) = -\frac{2}{r^3} + \frac{2}{r^3} = 0$$

예]:

$$\nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right) = \nabla \left(\frac{1}{r^2} \right) \cdot \hat{r} + \frac{1}{r^2} (\nabla \cdot \hat{r}) = -\frac{2}{r^3} + \frac{2}{r^3} = 0$$

그러나 $r = 0$ 에서 발산!

예]:

$$\nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right) = \nabla \left(\frac{1}{r^2} \right) \cdot \hat{r} + \frac{1}{r^2} (\nabla \cdot \hat{r}) = -\frac{2}{r^3} + \frac{2}{r^3} = 0$$

그러나 $r = 0$ 에서 발산!

$$\int_V \nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right) dV = \int_{\partial V} \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right) \cdot d\vec{A} = \int_{\partial V} \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right) \cdot \hat{r} r^2 d\Omega = 4\pi$$

가우스 정리

예]:

$$\nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right) = \nabla \left(\frac{1}{r^2} \right) \cdot \hat{r} + \frac{1}{r^2} (\nabla \cdot \hat{r}) = -\frac{2}{r^3} + \frac{2}{r^3} = 0$$

그러나 $r = 0$ 에서 발산!

$$\int_V \nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right) dV = \int_{\partial V} \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right) \cdot d\vec{A} = \int_{\partial V} \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right) \cdot \hat{r} r^2 d\Omega = 4\pi$$

가우스 정리

따라서 $\nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right)$ 은 $r = 0$ 을 제외한 곳에서는 0이고, 부피적분을 하면 4π 가 됩니다.

예):

$$\nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right) = \nabla \left(\frac{1}{r^2} \right) \cdot \hat{r} + \frac{1}{r^2} (\nabla \cdot \hat{r}) = -\frac{2}{r^3} + \frac{2}{r^3} = 0$$

그러나 $r = 0$ 에서 발산!

$$\int_V \nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right) dV = \int_{\partial V} \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right) \cdot d\vec{A} = \int_{\partial V} \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right) \cdot \hat{r} r^2 d\Omega = 4\pi$$

가우스 정리

따라서 $\nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right)$ 은 $r = 0$ 을 제외한 곳에서는 0이고, 부피적분을 하면 4π 가 됩니다.

$$\nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right) = 4\pi \delta^3(\vec{r})$$

중력 장을 구하는 과정에서 원천 적분이 어렵다면
미분 방정식을 직접 풀어야 할 수도 있습니다.
이 방정식은 어떤 수학적 형태를 가지고 있을까요?

그렇다면, 중력장을 결정하기 위해서는 무엇을 알아야 할까요?
헬름홀츠의 정리에 따르면,
우리가 벡터장의 회전과 발산이 무엇인지를 알게 된다면,
그 벡터장을 결정할 수 있다는 것이 알려져 있습니다.

따라서 중력장을 결정하기 위해서
중력장의 회전과 발산을 계산해보아야 합니다.

$$\vec{g}(\vec{r}) = -G \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'}) d^3r'$$

먼저 중력장의 발산은 위와 같이 전개됩니다.

$$\vec{g}(\vec{r}) = -G \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'}) d^3r'$$

$$\nabla \cdot \vec{g}(\vec{r}) = -G \int \rho(\vec{r}') \nabla_r \cdot \frac{(\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} d^3r'$$

먼저 중력장의 **발산**은 위와 같이 전개됩니다.

$$\vec{g}(\vec{r}) = -G \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'}) d^3r'$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{g}(\vec{r}) &= -G \int \rho(\vec{r}') \nabla_r \cdot \frac{(\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} d^3r' \\ &= -G \int \rho(\vec{r}') 4\pi \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') d^3r' \end{aligned}$$

먼저 중력장의 **발산**은 위와 같이 전개됩니다.

$$\vec{g}(\vec{r}) = -G \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'}) d^3r'$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{g}(\vec{r}) &= -G \int \rho(\vec{r}') \nabla_r \cdot \frac{(\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} d^3r' \\ &= -G \int \rho(\vec{r}') 4\pi \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') d^3r' \\ &= -4\pi G \rho(\vec{r}) \end{aligned}$$

먼저 중력장의 **발산**은 위와 같이 전개됩니다.

$$\int_V (\nabla \cdot \vec{g}) dV = -4\pi G \int_V \rho(\vec{r}) dV$$

이 발산을 **부피적분**하고 가우스의 정리를 적용해 봅시다.

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{V}} (\nabla \cdot \vec{g}) dV &= -4\pi G \int_{\mathcal{V}} \rho(\vec{r}) dV \\ &= \oint_{\partial\mathcal{V}} \vec{g} \cdot d\vec{A}\end{aligned}$$

이 발산을 **부피적분**하고 **가우스의 정리**를 적용해 봅시다.

$$\begin{aligned}
 \int_V (\nabla \cdot \vec{g}) dV &= -4\pi G \int_V \rho(\vec{r}) dV \\
 &= \oint_{\partial V} \vec{g} \cdot d\vec{A} &= -4\pi GM
 \end{aligned}$$

한편 위 식의 오른쪽은 적분 영역 내의 총 질량을 의미합니다.

$$\oint_{\mathcal{A}} \vec{g} \cdot d\vec{A} = -4\pi GM$$

$$\nabla \cdot \vec{g} = -4\pi G\rho$$

이렇게 해서 우리는 중력장에 대한
이른바 **가우스의 법칙**을 얻게 됩니다.

$$\vec{g}(\vec{r}) = -G \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'}) d^3r'$$

그 다음으로 중력장의 회전 연산도 해 봅시다.

$$\vec{g}(\vec{r}) = -G \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'}) d^3 r'$$

$$\int_{\mathcal{A}} (\nabla \times \vec{g}(\vec{r})) \cdot d\vec{A} = \oint_{\partial \mathcal{A}} \vec{g} \cdot d\vec{s}$$

스토크스 정리

그 다음으로 중력장의 **회전** 연산도 해 봅시다.

$$\vec{g}(\vec{r}) = -G \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'}) d^3 r'$$

$$\int_{\mathcal{A}} (\nabla \times \vec{g}(\vec{r})) \cdot d\vec{A} = \oint_{\partial \mathcal{A}} \vec{g} \cdot d\vec{s}$$

선적분은 $\vec{r}$ 좌표에 대한 적분이므로
 $\vec{r}$ 좌표가 있는 부분만 적분에 기여함

$$= -G \int \rho(\vec{r}') \left(\oint_{\partial \mathcal{A}} \frac{(\widehat{\vec{r} - \vec{r}'}) \cdot d\vec{s}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right) d^3 r'$$

$$\vec{g}(\vec{r}) = -G \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'}) d^3 r'$$

$$\int_{\mathcal{A}} (\nabla \times \vec{g}(\vec{r})) \cdot d\vec{A} = \oint_{\partial \mathcal{A}} \vec{g} \cdot d\vec{s}$$

$$= -G \int \rho(\vec{r}') \left(\oint_{\partial \mathcal{A}} \frac{(\widehat{\vec{r} - \vec{r}'}) \cdot d\vec{s}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right) d^3 r'$$

$$= -G \int \rho(\vec{r}') \left(\oint_{\partial \mathcal{A}} \frac{d|\vec{r} - \vec{r}'|}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right) d^3 r'$$

각 원천 질량에 대해서 $d\vec{s}$ 의 원점을 $\vec{r}'$ 에 잡을 수 있고,
 이 때, $(\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})$ 과 평행한 성분만 고려하면 $d\vec{s} = (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})d|\vec{r} - \vec{r}'|$ 으로 잡을 수 있다.

$$\vec{g}(\vec{r}) = -G \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'}) d^3 r'$$

$$\int_{\mathcal{A}} (\nabla \times \vec{g}(\vec{r})) \cdot d\vec{A} = \oint_{\partial \mathcal{A}} \vec{g} \cdot d\vec{s}$$

$$= -G \int \rho(\vec{r}') \left(\oint_{\partial \mathcal{A}} \frac{(\widehat{\vec{r} - \vec{r}'}) \cdot d\vec{s}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right) d^3 r'$$

$$= -G \int \rho(\vec{r}') \left(\oint_{\partial \mathcal{A}} \frac{d|\vec{r} - \vec{r}'|}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right) d^3 r'$$

이 부분의 적분은 폐곡선에 대해서 0이 됩니다.

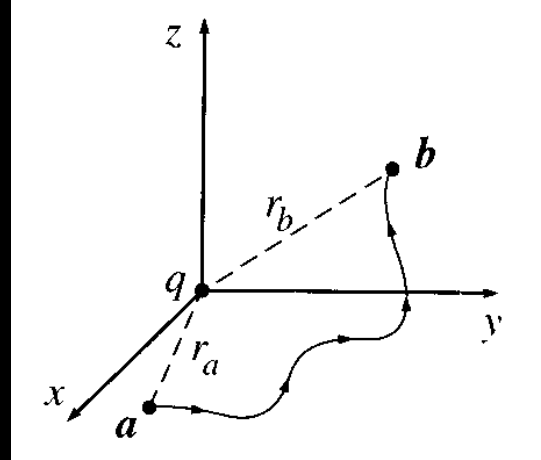
$$= 0$$

$$\oint \vec{g} \cdot d\vec{s} = 0$$

$$\nabla \times \vec{g} = 0$$

따라서 위의 두 관계식을 얻게 됩니다.

$$\Phi \equiv - \int_0^{\vec{r}} \vec{g} \cdot d\vec{s}$$



그리고 중력장의 선적분을
중력 퍼텐셜이라고 정의합니다.

$$\Phi \equiv - \int_0^{\vec{r}} \vec{g} \cdot d\vec{s}$$

중력 퍼텐셜을 좀 더 계산해 봅시다.

$$\begin{aligned}\Phi &\equiv - \int_{\mathcal{O}}^{\vec{r}} \vec{g} \cdot d\vec{s} \\ &= G \int \rho(\vec{r}') \left(\int_{\mathcal{O}}^{\vec{r}} \frac{\widehat{(\vec{r} - \vec{r}') \cdot d\vec{s}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right) d^3r'\end{aligned}$$

$$\Phi \equiv - \int_0^{\vec{r}} \vec{g} \cdot d\vec{s}$$

$$= G \int \rho(\vec{r}') \left(\int_0^{\vec{r}} \frac{\widehat{(\vec{r} - \vec{r}')} \cdot d\vec{s}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right) d^3 r'$$

각 원천 질량에 대해서 $d\vec{s}$ 의 원점을 $\vec{r}'$ 에 잡을 수 있고,
 이 때, $\widehat{(\vec{r} - \vec{r}')}$ 과 평행한 성분만 고려하면 $d\vec{s} = \widehat{(\vec{r} - \vec{r}')} d|\vec{r} - \vec{r}'|$ 으로 잡을 수 있다.

$$= G \int \rho(\vec{r}') \left(\int_0^{\vec{r}} \frac{d|\vec{r} - \vec{r}'|}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right) d^3 r'$$

$$\Phi \equiv - \int_0^{\vec{r}} \vec{g} \cdot d\vec{s}$$

$$= G \int \rho(\vec{r}') \left(\int_0^{\vec{r}} \frac{(\widehat{\vec{r} - \vec{r}'} \cdot d\vec{s})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right) d^3 r'$$

각 원천 질량에 대해서 $d\vec{s}$ 의 원점을 $\vec{r}'$ 에 잡을 수 있고,
 이 때, $(\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})$ 과 평행한 성분만 고려하면 $d\vec{s} = (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'}) d|\vec{r} - \vec{r}'|$ 으로 잡을 수 있다.

$$= G \int \rho(\vec{r}') \left(\int_{\textcircled{0}}^{\vec{r}} \frac{d|\vec{r} - \vec{r}'|}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right) d^3 r'$$

이 점을 무한대로 놓고 이 때의 퍼텐셜을 0으로 잡는다.

$$= G \int \rho(\vec{r}') \left(\frac{-1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) d^3 r'$$

$$\Phi \equiv - \int_0^{\vec{r}} \vec{g} \cdot d\vec{s}$$

$$= G \int \rho(\vec{r}') \left(\frac{-1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) d^3r'$$

$$= -G \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

$$\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} (\nabla \Phi) \cdot d\vec{s} = \Phi(\vec{b}) - \Phi(\vec{a})$$

더 나아가서 기울기에 대한 미적분의 기본정리로부터
위의 관계식을 유도할 수 있습니다.

$$\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} (\nabla \Phi) \cdot d\vec{s} = \Phi(\vec{b}) - \Phi(\vec{a})$$
$$= - \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{g} \cdot d\vec{s}$$

더 나아가서 기울기에 대한 **미적분의 기본정리**로부터
위의 관계식을 유도할 수 있습니다.

$$\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} (\nabla\Phi) \cdot d\vec{s} = \Phi(\vec{b}) - \Phi(\vec{a})$$
$$= - \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{g} \cdot d\vec{s}$$

따라서 다음 관계식을 얻을 수 있습니다.

$$\vec{g} = -\nabla\Phi$$

$$-\nabla \cdot \vec{g} = \nabla \cdot \nabla \Phi = \nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho$$

푸아송 방정식

$$-\nabla \cdot \vec{g} = \nabla \cdot \nabla \Phi = \nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho$$

푸아송 방정식

$$\nabla^2 \Phi = 0$$

라플라스 방정식

중력장에 대한 방정식들을
정전기학 및 정자기학에서의
방정식들과 비교해볼 수 있습니다.

원천

$$\rho(\vec{r}) \quad \vec{j}(\vec{r})$$

원천

$$\rho(\vec{r}) \quad \vec{j}(\vec{r})$$

퍼텐셜

$$V(\vec{r}) \quad \vec{A}(\vec{r})$$

원천

$$\rho(\vec{r}) \quad \vec{j}(\vec{r})$$

퍼텐셜

$$V(\vec{r}) \quad \vec{A}(\vec{r})$$

장

$$\vec{E}(\vec{r}) \quad \vec{B}(\vec{r})$$

원천

$$\rho(\vec{r}) \quad \vec{j}(\vec{r})$$

퍼텐셜

$$V(\vec{r}) \quad \vec{A}(\vec{r})$$

장

$$\vec{E}(\vec{r}) \quad \vec{B}(\vec{r})$$

미분

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} \end{aligned}$$

원천

$$\rho(\vec{r}) \quad \vec{j}(\vec{r})$$

퍼텐셜

$$V(\vec{r}) \quad \vec{A}(\vec{r})$$

장

$$\vec{E}(\vec{r}) \quad \vec{B}(\vec{r})$$

미분

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\nabla V \\ \vec{B} &= \nabla \times \vec{A}\end{aligned}$$

미분

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{j}\end{aligned}$$

원천

$$\rho(\vec{r}) \quad \vec{j}(\vec{r})$$

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$
$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{j} \quad \text{미분}$$

퍼텐셜

$$V(\vec{r}) \quad \vec{A}(\vec{r})$$

장

$$\vec{E}(\vec{r}) \quad \vec{B}(\vec{r})$$

$$\vec{E} = -\nabla V$$
$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad \text{미분}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$
$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad \text{미분}$$

원천

$$\rho(\vec{r}) \quad \vec{j}(\vec{r})$$

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$
$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{j} \quad \text{미분}$$

가우스 법칙

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

앙페르 법칙

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I$$

퍼텐셜

$$V(\vec{r}) \quad \vec{A}(\vec{r})$$

장

$$\vec{E}(\vec{r}) \quad \vec{B}(\vec{r})$$

미분

$$\vec{E} = -\nabla V$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

원천

$$\rho(\vec{r}) \quad \vec{j}(\vec{r})$$

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$
$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{j} \quad \text{미분}$$

퍼텐셜

$$V(\vec{r}) \quad \vec{A}(\vec{r})$$

장

$$\vec{E}(\vec{r}) \quad \vec{B}(\vec{r})$$

$$\vec{E} = -\nabla V$$
$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad \text{미분}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$
$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad \text{미분}$$

원천

$$\rho(\vec{r}) \quad \vec{j}(\vec{r})$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

적분

퍼텐셜

$$V(\vec{r}) \quad \vec{A}(\vec{r})$$

장

$$\vec{E}(\vec{r}) \quad \vec{B}(\vec{r})$$

미분

$$\vec{E} = -\nabla V$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

원천

$$\rho(\vec{r}) \quad \vec{j}(\vec{r})$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

적분

퍼텐셜

$$V(\vec{r}) \quad \vec{A}(\vec{r})$$

쿨롱 법칙

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3r'$$

비오-사바르 법칙

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3r'$$

적분

장

$$\vec{E}(\vec{r}) \quad \vec{B}(\vec{r})$$

미분

$$\vec{E} = -\nabla V$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

원천

$$\rho(\vec{r}) \quad \vec{j}(\vec{r})$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

적분

쿨롱 법칙

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3r'$$

비오-사바르 법칙

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3r'$$

적분

퍼텐셜

$$V(\vec{r}) \quad \vec{A}(\vec{r})$$

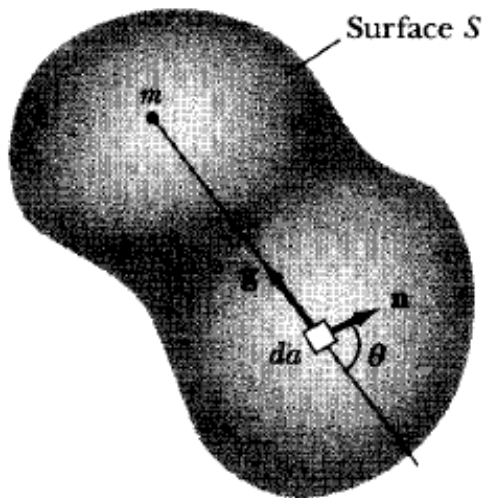
장

$$\vec{E}(\vec{r}) \quad \vec{B}(\vec{r})$$

적분

$$V = - \int \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{E} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3r'$$

$$\vec{A} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{B} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3r'$$



중력 선속

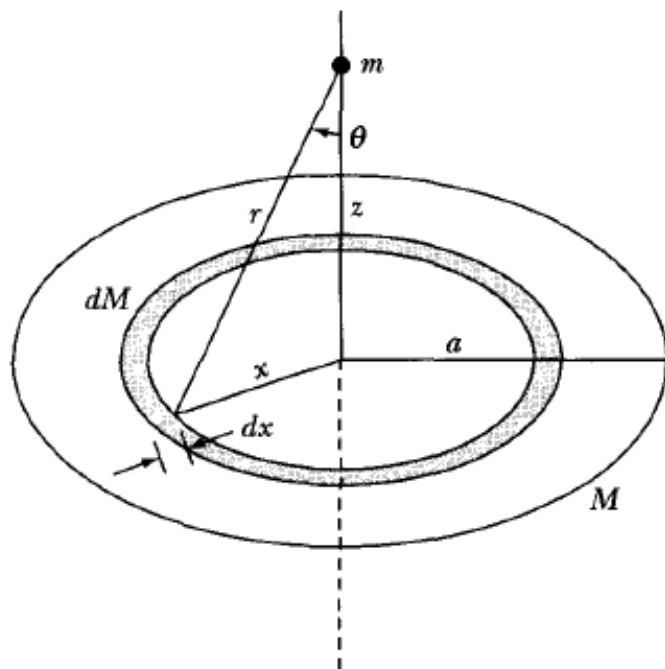
$$\Phi_m = \int_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{g} \, da = -4\pi Gm$$

$$\nabla \cdot \mathbf{g} = -4\pi G\rho$$

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G\rho$$

푸아송 방정식

정전기학에서와 유사하게 가우스 법칙이 성립합니다.
여기에 가우스 정리를 적용하면
미분 형태의 방정식을 얻게 됩니다.



$$d\Phi = -G \frac{dM}{r}$$

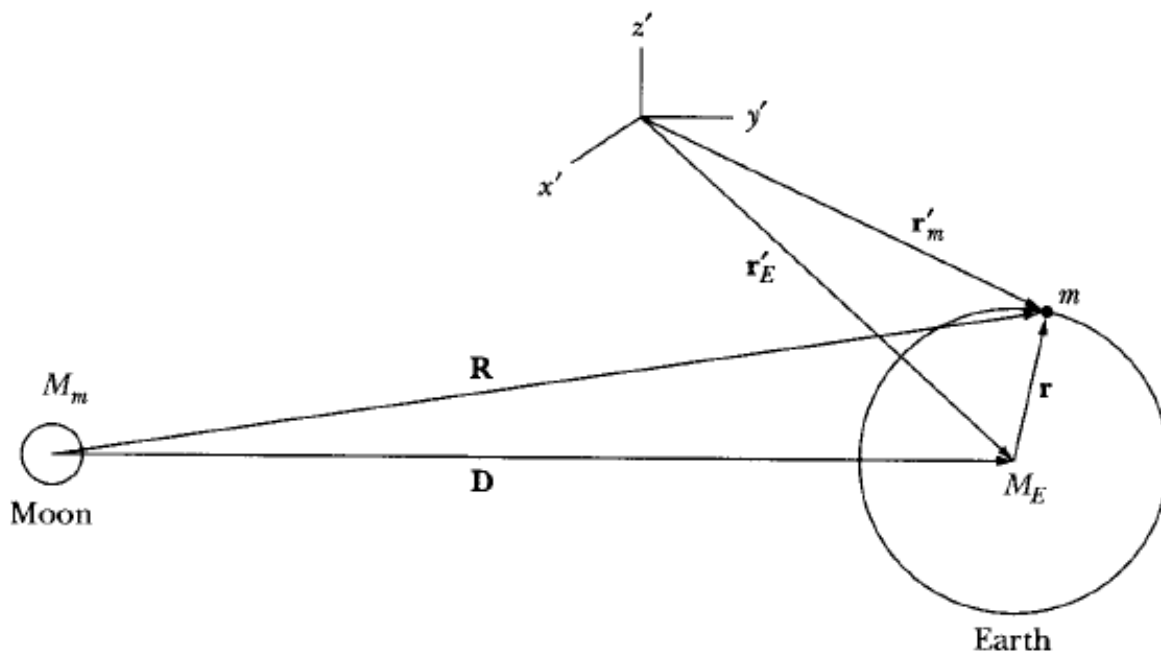
$$dM = \rho dA = \rho 2\pi x dx$$

$$d\Phi = -2\pi\rho G \frac{x dx}{r} = -2\pi\rho G \frac{x dx}{(x^2 + z^2)^{1/2}}$$

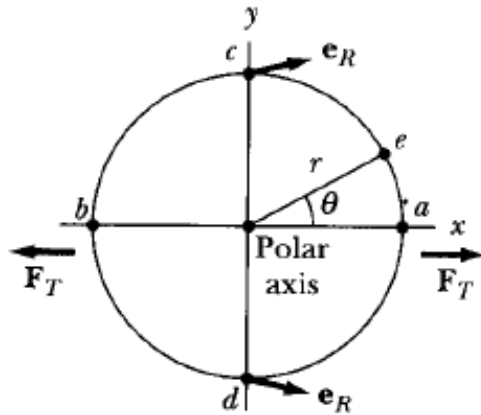
$$\mathbf{F} = -\nabla U = -m\nabla\Phi$$

예제 5.4

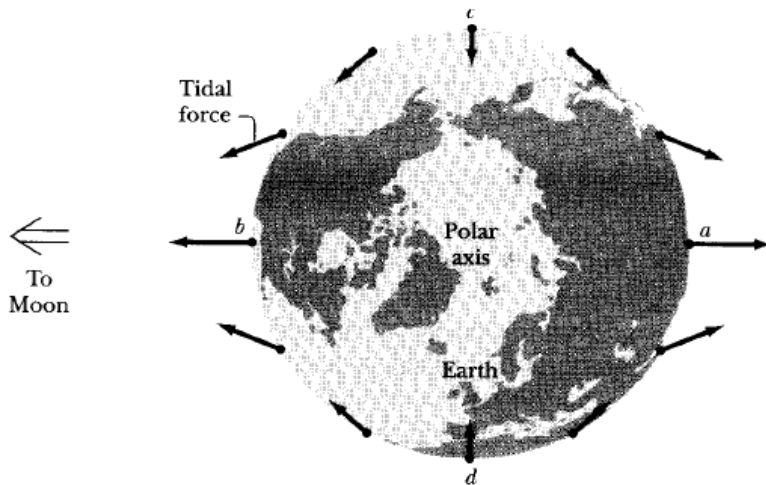
마지막으로 바다의 조석 현상을 살펴봅시다.



조석 현상은 달과 태양의 인력때문에 생기는 현상입니다.
 먼저 관성계에서 힘을 구하고,
 그 좌표를 지구의 중심(비관성계)으로 옮겨 봅시다.



$$\begin{aligned}
 \ddot{\mathbf{r}} &= \ddot{\mathbf{r}}'_m - \ddot{\mathbf{r}}'_E = \frac{m \ddot{\mathbf{r}}'_m}{m} - \frac{M_E \ddot{\mathbf{r}}'_E}{M_E} \\
 &= -\frac{GM_E}{r^2} \mathbf{e}_r - \frac{GM_m}{R^2} \mathbf{e}_R + \frac{GM_m}{D^2} \mathbf{e}_D \\
 &= -\frac{GM_E}{r^2} \mathbf{e}_r - GM_m \left(\frac{\mathbf{e}_R}{R^2} - \frac{\mathbf{e}_D}{D^2} \right)
 \end{aligned}$$



흥미롭게도 우리는 여기에서 조석 현상을 설명할 수 있습니다.
조석력은 한 쪽으로 쏠리게 하는 힘이 아니라
잡아당기는 효과를 나타냅니다.

감사합니다