

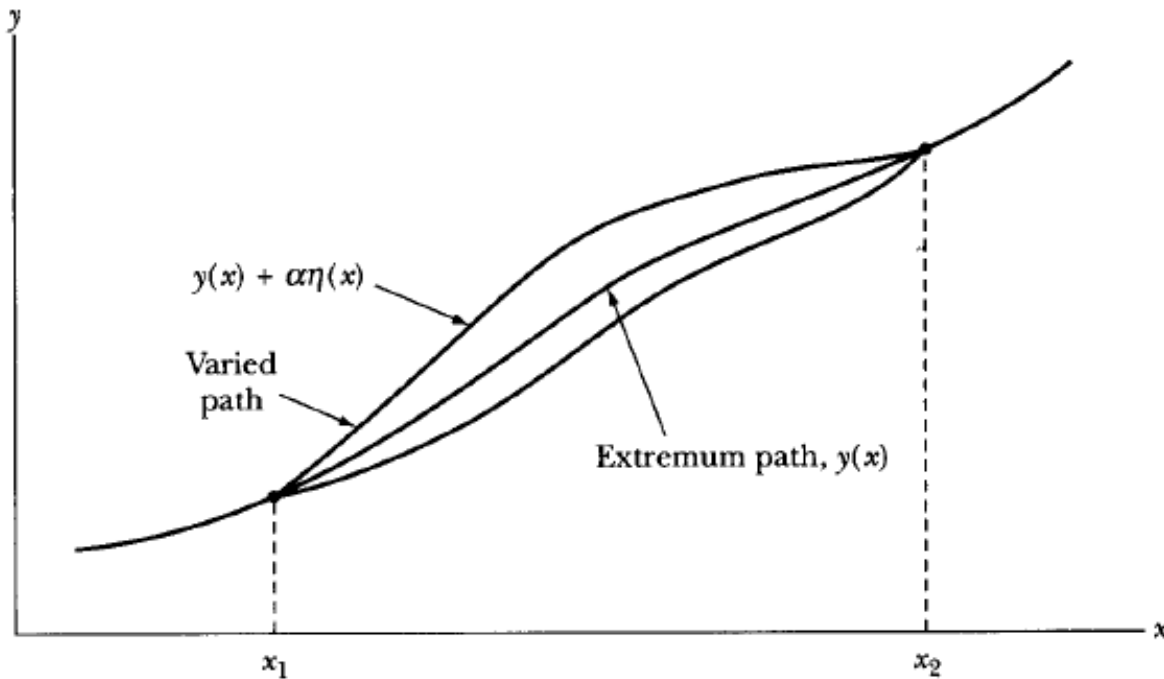
6장

## 변분법의 몇 가지 방법

이제 우리는 해석 역학의 정수인 오일러-라그랑주 방정식을  
살펴보고자 합니다.

하지만 그 전에 수학적인 훈련이 필요합니다.  
이번 장에서는 범함수functional에 대한 미분, 즉  
변분법calculus of variations에 대해서 살펴봅시다.

$$J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f\{y(\alpha, x), y'(\alpha, x); x\} dx$$

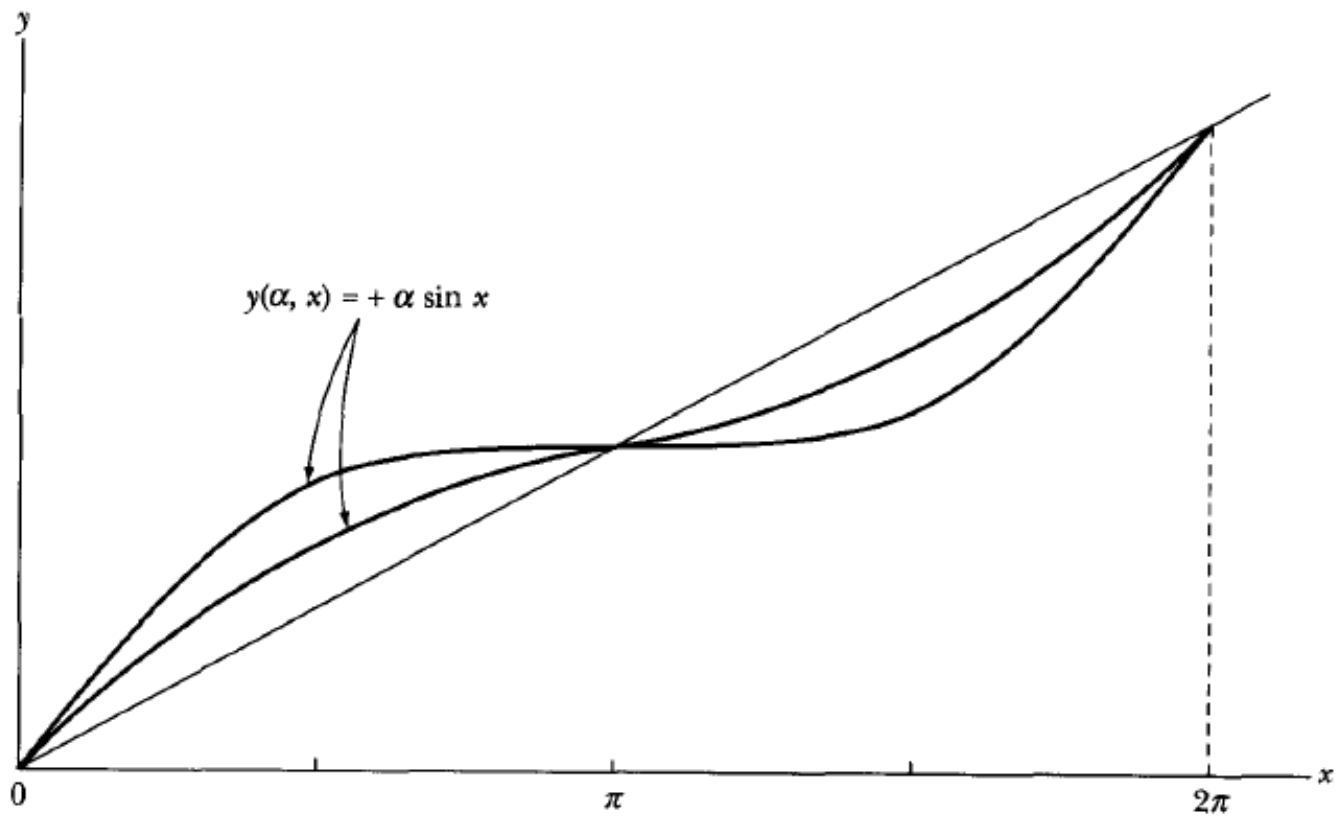


$$\left. \frac{\partial J}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = 0$$

함수를 변수로 바꾸어가며 극값을 찾는 문제에서는  
미분이 필요합니다.  
그러나 함수를 함수로 바꾸어가며 극값을 찾는 문제에서는  
변분이 필요합니다.

$$f = (dy/dx)^2$$

$$y(\alpha, x) = x + \alpha \sin x$$



예제 6.1: 변분의 예

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{x_1}^{x_2} f\{y, y'; x\} dx$$

$$y(\alpha, x) = y(0, x) + \alpha \eta(x)$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial \alpha} \right) dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d\eta}{dx} \right) dx$$

$$\text{부분 적분} = \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial f}{\partial y} \eta(x) - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \eta(x) \right] dx$$

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$$

경계 조건

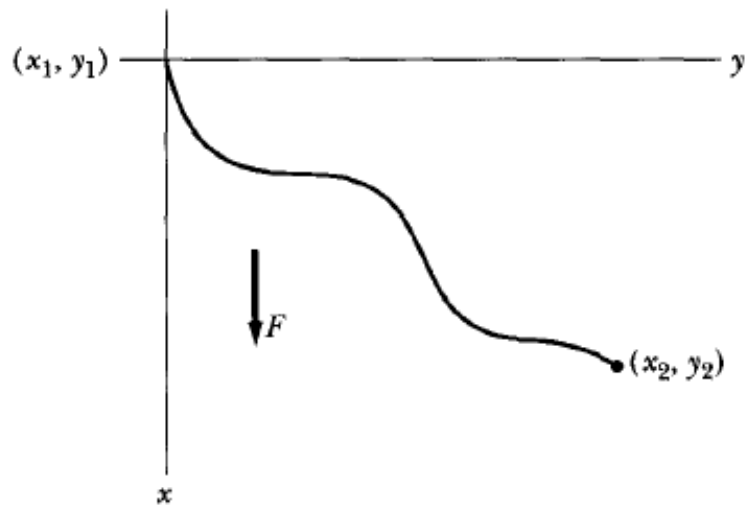
$$= \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \eta(x) dx$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} = 0$$

Euler's equation

일반적인 변분 문제에서 우리는  
오일러 방정식을 유도하게 됩니다.

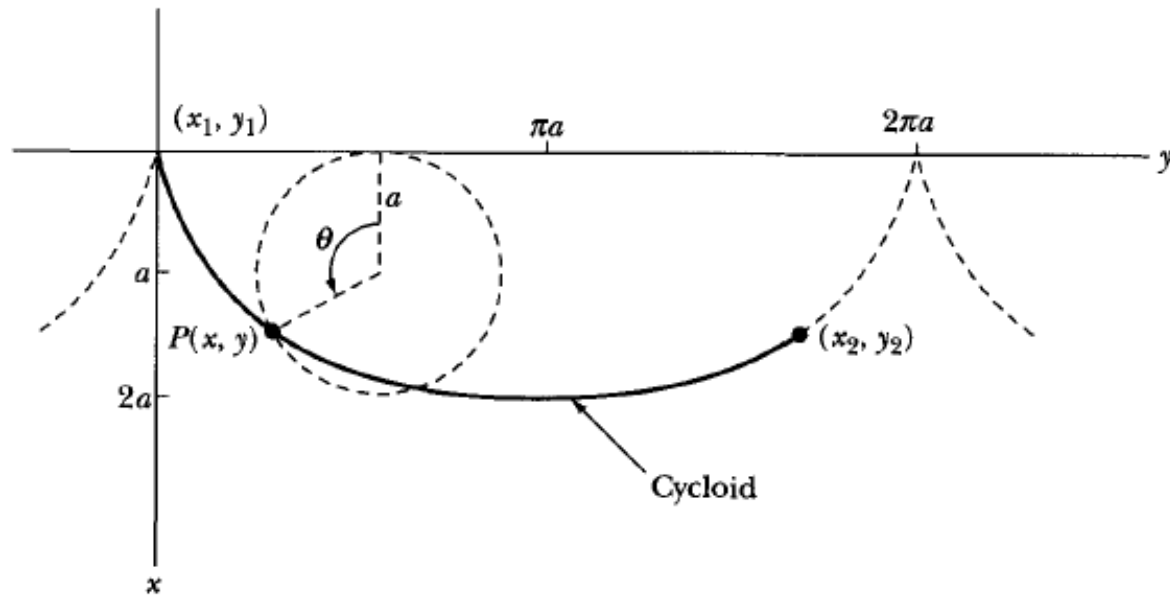
변분법에 의해서 해결된  
역사적으로 중요한 문제들을 살펴 봅시다.



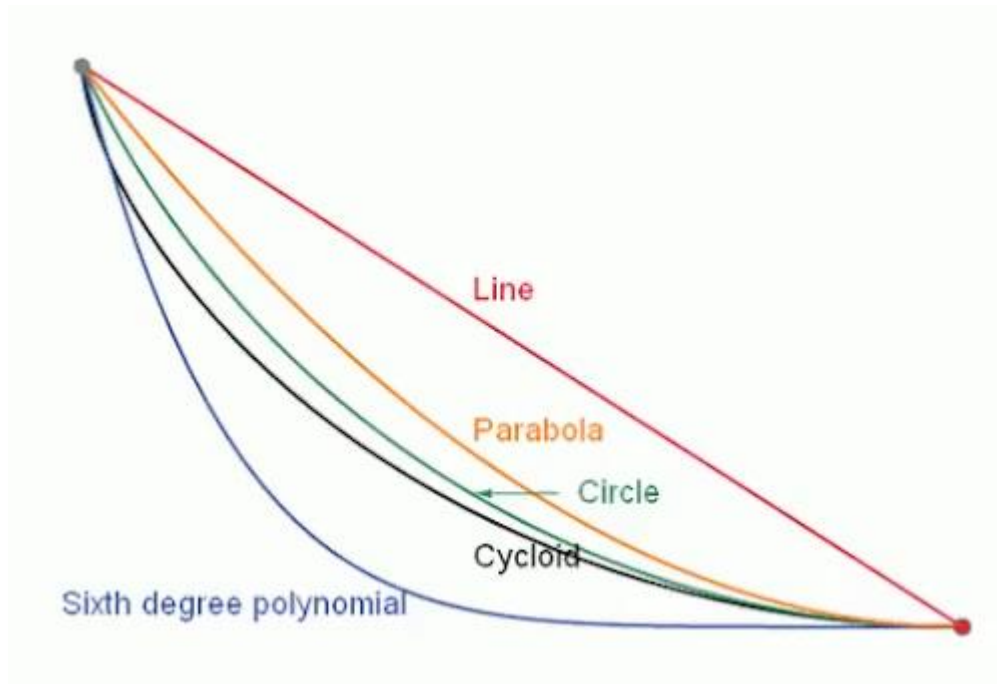
$$v = \sqrt{2gx}$$

$$t = \int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} \frac{ds}{v}$$

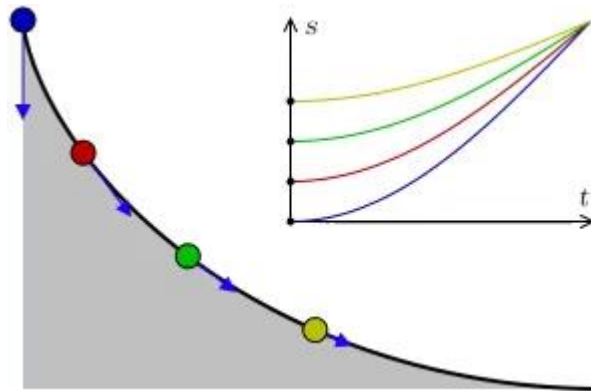
예제 6.2: 최속강하선 brachistochrone 문제



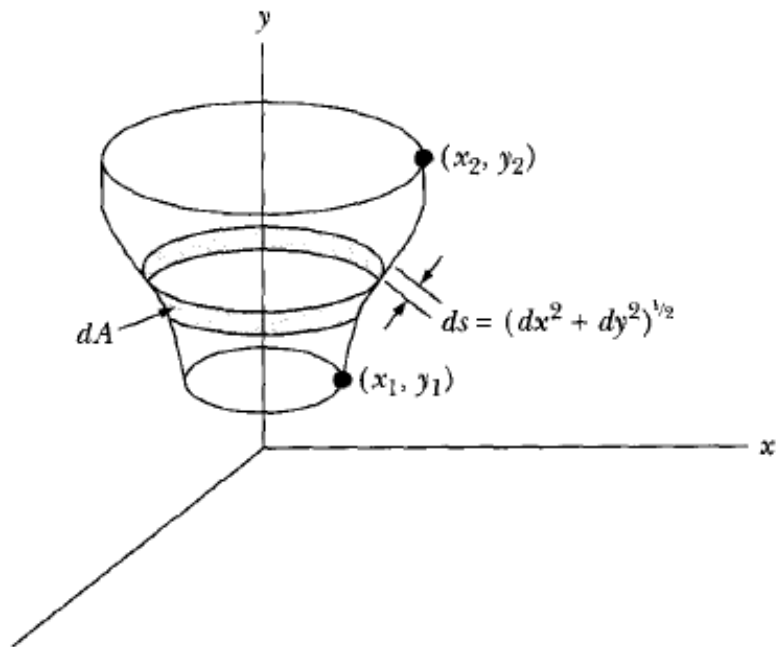
예제 6.2: 최속강하선 brachistochrone 문제



예제 6.2: 최속강하선brachistochrone 문제



사이클로이드는 최속강하선 문제 뿐만 아니라  
등시곡선 문제의 답이 되기도 합니다.



$$A = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} x(1 + y'^2)^{1/2} dx$$

예제 6.3: 현수선catenary

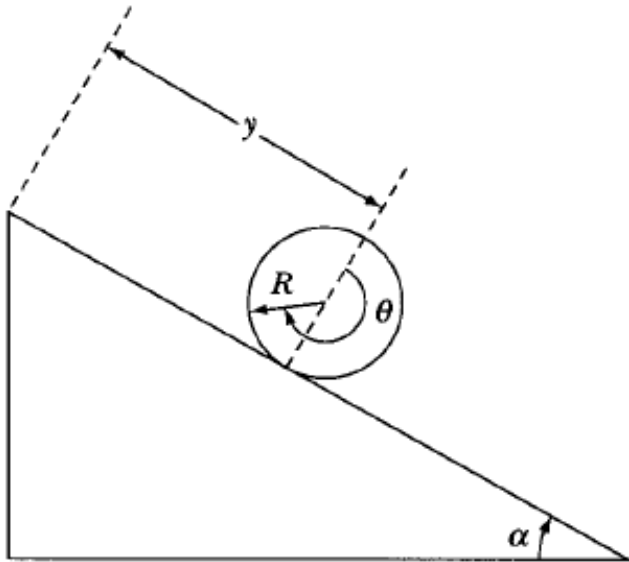


예제 6.3: 현수선catenary

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'_i} + \sum_j \lambda_j(x) \frac{\partial g_j}{\partial y_i} = 0$$

$$g_j\{y_i; x\} = 0$$

구속 조건이 있는 경우,  
우리는 라그랑주 승수법을 사용해서  
극값에 해당하는 경로를 찾을 수 있습니다.



$$y = R\theta$$

$$g(y, \theta) = y - R\theta = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial g}{\partial \theta} = -R$$

예제 6.5: 미끄러지지 않고 구르기

구속 조건은 해석 역학에서 아주 중요한 부분입니다.  
구속 조건이 좌표 사이의 대수적 관계식으로 표현되면  
홀로노믹holonomic하다고 합니다.

그리고 구속 조건이 명시적인 시간의 함수가 아니면  
스클러노믹sclernomic,

명시적인 시간의 함수가 되면  
레오노믹rheonomic이라고 합니다.

비홀로노믹한 구속 조건에 대해서  
일반적으로 문제를 푸는 것은 알려져 있지 않습니다.  
앞으로 우리는 홀로노믹한 구속 조건을 다루는 방법에 대해  
살펴보게 될 것입니다.

감사합니다