

7장

해밀턴의 원리

라그랑주와 해밀턴 역학

이번 장에서는 변분법을 사용하여
운동 방정식을 유도해 봅시다.
그러면 여기에서 우리는 무엇을 변분해야 할까요?
그리고 이렇게 유도한 운동 방정식은
뉴턴 역학과 동등한 정보를 담고 있을까요?

$$F_i = m_i \ddot{x}_i$$

$$x_i = x_i(q_j, t)$$

뉴턴의 운동 방정식에서 출발해 봅시다.
이 방정식은 직교 좌표계에서만 잘 기술됩니다.
좀 더 일반적인 좌표계에서는
이 방정식의 수학적 형태를 유지할 수 없습니다.

$$F_i = m_i \ddot{x}_i$$

$$x_i = x_i(q_j, t)$$

일반화 좌표계generalized coordinates에서도 운동 방정식의 형태를
공변적이 되도록 하려면
운동 방정식을 어떻게 적어야 할까요?

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2$$

$$p_j \equiv \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$$

다음과 같이 정의되는 일반화 운동량generalized momentum에서
출발해 봅시다.

일반화 운동량은 운동 에너지의 미분으로 정의 됩니다.

$$\dot{p}_j = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right)$$

이제 일반화 운동량의 미분을 전개해 봅시다.

$$\dot{p}_j = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \sum_i m_i \dot{x}_i^2 \right)$$

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2$$

$$\begin{aligned}
 \dot{p}_j &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \sum_i m_i \dot{x}_i^2 \right) \\
 &= \sum_i \frac{d}{dt} \left(m_i \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} \right)
 \end{aligned}$$

$$\dot{p}_j = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \sum_i m_i \dot{x}_i^2 \right)$$

$$= \sum_i \frac{d}{dt} \left(m_i \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} \right)$$

$$= \sum_i \frac{d}{dt} \left(m_i \dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right)$$

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial x_i}{\partial q_j}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{p}_j &= \sum_i \frac{d}{dt} \left(m_i \dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) \\
 &= \sum_i \left(m_i \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + m_i \dot{x}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{p}_j &= \sum_i \frac{d}{dt} \left(m_i \dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) \\
 &= \sum_i \left(m_i \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + m_i \dot{x}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) \\
 &= \sum_i \left(m_i \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + m_i \dot{x}_i \sum_k \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k + m_i \dot{x}_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j \partial t} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{p}_j &= \sum_i \frac{d}{dt} \left(m_i \dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) \\
 &= \sum_i \left(m_i \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + m_i \dot{x}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) \\
 &= \sum_i \left(m_i \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + m_i \dot{x}_i \sum_k \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k + m_i \dot{x}_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j \partial t} \right) \\
 &= \sum_i \left(F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + m_i \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j} \right)
 \end{aligned}$$

$F_i = m_i \ddot{x}_i$

$$\dot{p}_j = \sum_i F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \sum_i m_i \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j}$$

일반화 힘

$$\dot{p}_j = \sum_i F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \sum_i m_i \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j}$$

일반화 힘



달랑베르의 원리:

“구속력의 가상 변위에 대한 일은 0이다.”

$$\delta W = \sum_j (F_j - \dot{p}_j) \delta x_j = 0$$

가상 일

$$\dot{p}_j = \sum_i F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \sum_i m_i \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j}$$

$$= -\frac{\partial U}{\partial q_j} + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$$

가상 변위를 제외한 힘에 대한 퍼텐셜



달랑베르의 원리:

“구속력의 가상 변위에 대한 일은 0이다.”

$$\delta W = \sum_j (F_j - \dot{p}_j) \delta x_j = 0$$

가상 일

$$\dot{p}_j = \sum_i F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \sum_i m_i \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j}$$

$$= -\frac{\partial U}{\partial q_j} + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$$

$$= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right)$$

$$\dot{p}_j = \sum_i F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \sum_i m_i \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j}$$

$$= -\frac{\partial U}{\partial q_j} + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$$

$$= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial (T - U)}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial (T - U)}{\partial q_j} = 0$$

$$\begin{aligned}
 \dot{p}_j &= \sum_i F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \sum_i m_i \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} \\
 &= -\frac{\partial U}{\partial q_j} + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \\
 &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right)
 \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial (T - U)}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial (T - U)}{\partial q_j} = 0$$

단, 퍼텐셜 에너지가 q_j 와 t 에만 의존한다고 가정함

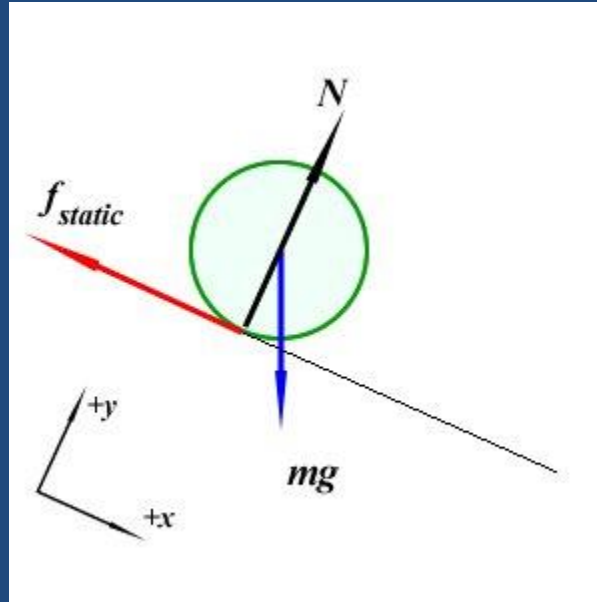
$$\begin{aligned}
 L &= T(\dot{x}_{\alpha,i}) - U(x_{\alpha,i}) \\
 &= T(q_j, \dot{q}_j, t) - U(q_j, t)
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, s$$

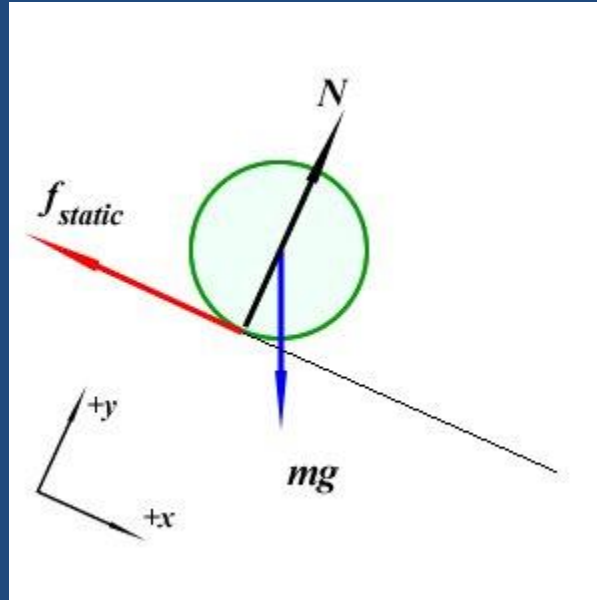
라그랑지안을 위와 같이 정의하면,
 운동 방정식을 일반적으로 위와 같이 적을 수 있습니다.
 이것을 **오일러-라그랑주 방정식**이라고 부릅니다.

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

에너지는 스칼라입니다.
그리고 오일러-라그랑주 방정식은
스칼라를 사용해서 표현되고 있습니다.



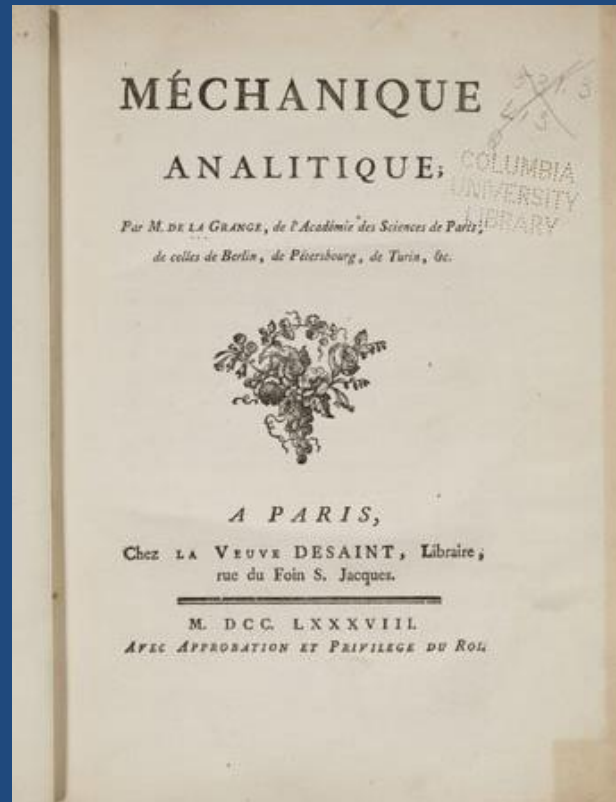
사실 역학 문제에서 가장 어려운 점은
힘의 방향을 분해해서 성분 별로 방정식을 적는 것입니다.
대부분의 학생들이 여기에서 실수를 합니다.



이것은 힘이 벡터량이기 때문입니다.
그러나 스칼라를 사용해서 문제를 풀 수 있다면,
이러한 고민을 하지 않아도 될 것입니다.



18세기의 위대한 수학자이자 물리학자인 오일러와 라그랑주는
일반적인 좌표를 사용해 적은 스칼라량으로부터
운동 방정식을 적는 방법을 고민합니다.



이러한 방식으로부터 탄생한 역학을 해석 역학이라고 합니다.

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{x_1}^{x_2} f\{y, y'; x\} dx$$

$$y(\alpha, x) = y(0, x) + \alpha \eta(x)$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial \alpha} \right) dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d\eta}{dx} \right) dx$$

$$\text{부분 적분} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \eta(x) - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \eta(x) \right] dx$$

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$$

경계 조건

$$= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \eta(x) dx$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} = 0$$

Euler's equation

다른 한 편, 우리는 변분법을 사용해서
오일러 방정식을 유도하는 것을 지난 시간에 살펴보았습니다.

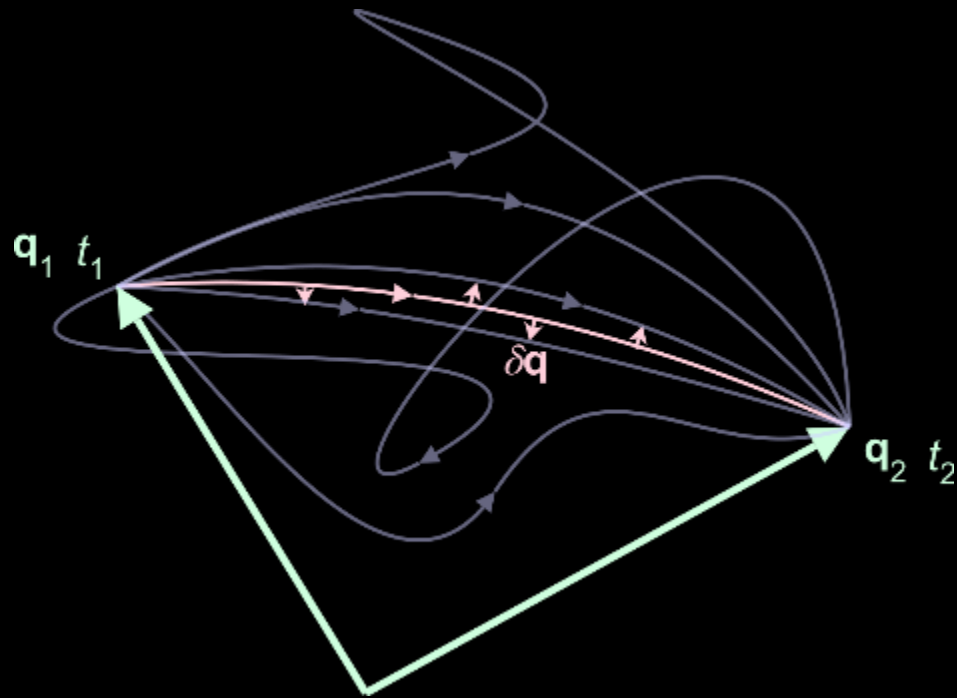
$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_j, \dot{q}_j, t) dt = 0$$



따라서 오일러-라그랑주 운동 방정식은
위와 같은 **작용**을 변분한 것으로 해석하는 것도 가능합니다.
이것을 **해밀턴의 원리**라고 합니다.

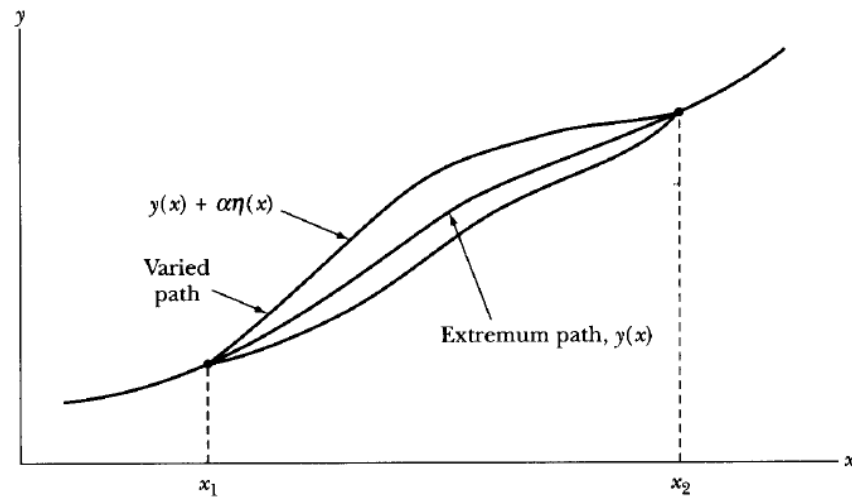
즉, 오일러-라그랑주 방정식은
뉴턴의 운동 방정식과 동등하며,
또한 해밀턴의 원리로부터 변분법으로 유도할 수도 있습니다.

여기에 약간의 수학적 전제 조건이 필요하지만,
대부분의 물리학적 상황에서
위의 세 접근 방식은 모두 동일하다고 볼 수 있습니다.



해석 역학의 가장 중요한 개념인 변분법이란
다양한 경로 중에서 특정한 물리량을
최적화(최대화 또는 최소화)하는 경로를 찾는 작업입니다.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_j, \dot{q}_j, t) dt = 0$$



해밀턴의 원리에서 사용하는 변분은
시작점과 끝점의 시간과 변수를 고정시키고
그 안에서 작용의 극값을 주는 경로를 찾는 것입니다.



사실 이러한 변분이 아주 유일한 방식은 아닙니다.
예를 들어서, 모페르튀이는 시작과 끝에서의 변수는 고정시키지만
시간은 고정시키지 않고 변분을 취합니다.
이 경우에는 반드시 에너지가 보존될 것을 요청합니다.



$$\Delta \int_{q_i}^{q_f} p dq = 0$$

모페르튀이는 위와 같은 **축약된 작용**을 변분할 것을 요청합니다.
이것을 최소 작용의 원리, 또는 모페르튀이의 원리라고 합니다.
이것은 해밀턴의 원리의 특수한 사례가 됩니다.

$$\Delta (t_2 - t_1) = 0$$

$$dt = \frac{ds}{v} = \frac{nds}{c}$$

에너지가 보존될 뿐만 아니라 퍼텐셜이 존재하지 않는 경우에는
 모페르튀이의 축약된 작용은 **시간 차이**가 됩니다.
 빛의 경우에는 이 시간 차이가 **광경로**에 비례합니다.



$$\Delta (t_2 - t_1) = 0$$

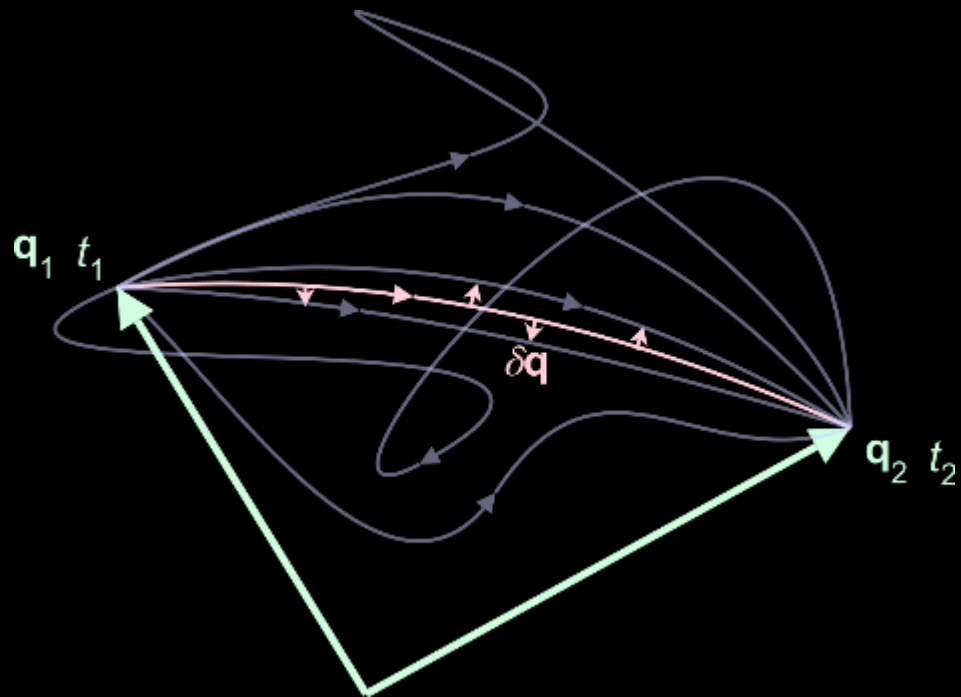
$$dt = \frac{ds}{v} = \frac{nds}{c}$$

빛이 진행하는 경우, 광경로를 최소화한다는 원리를
페르마의 원리라고 합니다.

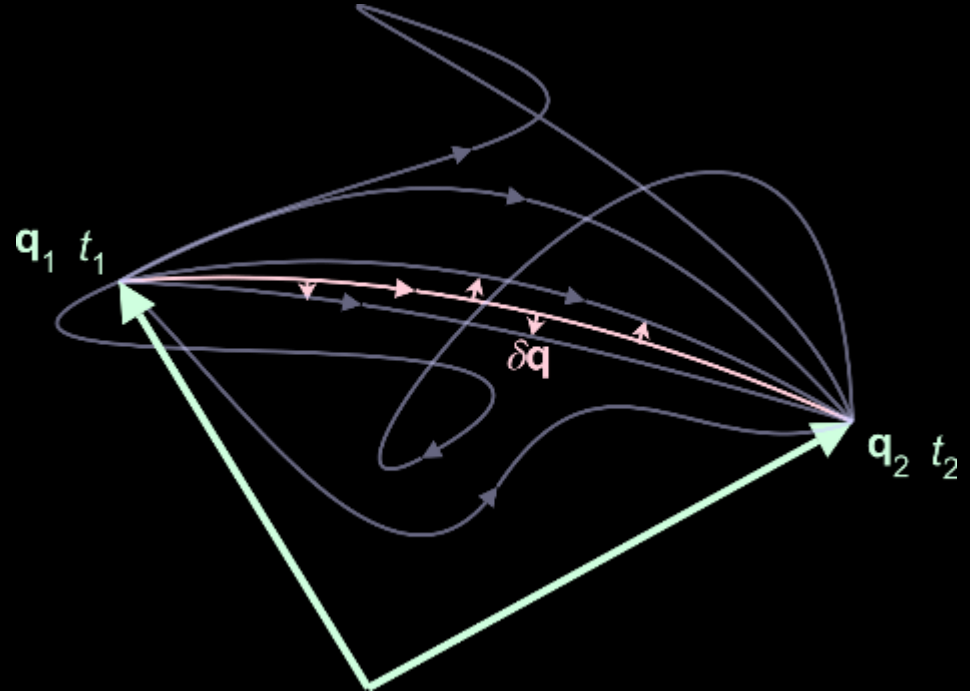
즉, 페르마의 원리는 모페르튀이의 원리의 특별한 사례가 됩니다.



본래 뉴턴 역학에서는 초기 조건을 정하면
그 이후의 모든 운동이 방정식에 의해 결정되기 때문에
철학적으로 **기계론**적인 관점이라고 말할 수 있겠습니다.



그러나 변분법을 사용해서
처음과 마지막 조건을 결정한 상태에서
최적화 되는 경로를 찾는다고 한다면
이러한 관점은 다분히 **목적론**적으로 보입니다.



이렇게 모페르튀이는 기계론적인 관점이 아니라
목적론적인 관점을 통해 역학을 살펴보고자 했습니다.

A pair of sneakers, likely Adidas, is shown from a top-down perspective. The shoes are dark-colored with light-colored laces and soles. They are positioned on a dark, textured surface. The title '목적론' is overlaid on the image in a large, white, sans-serif font.

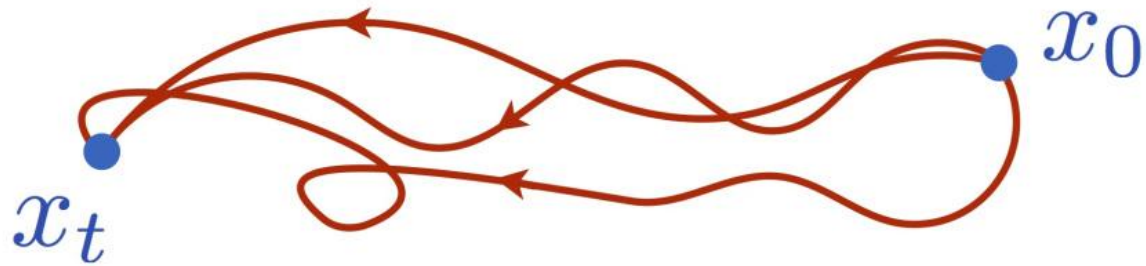
목적론

目的論

모든 사물은 목적에 의하여 규정되고 목적을 실현하기 위하여 존재한다는
이론.

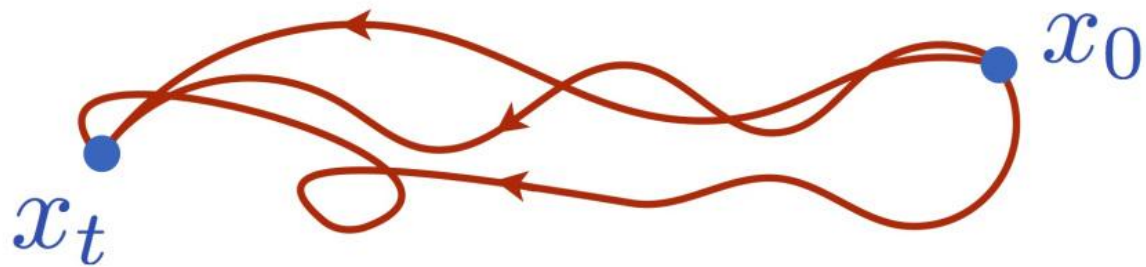
과연 이러한 목적론적 관점이 옳은 것일까요?
이러한 관점이 옳기 위해서는
최적화되지 않은 경로들도 어떤 의미를 가져야 할 것입니다.

$$\langle x_t | e^{-i\hat{H}t/\hbar} | x_0 \rangle =$$



최적화되지 않은 경로는 어떤 의미를 가질까요?
물론 고전 물리학에서는 큰 의미를 갖지 않을 것입니다.

$$\langle x_t | e^{-i\hat{H}t/\hbar} | x_0 \rangle =$$



그러나 흥미롭게도 양자 물리학에서는
최적화 되지 않은 경로도 확률에 일부 기여하게 됩니다.
이 모든 효과를 고려하는 것을 **경로 적분** path integral이라고 합니다.

$$\delta S = 0$$

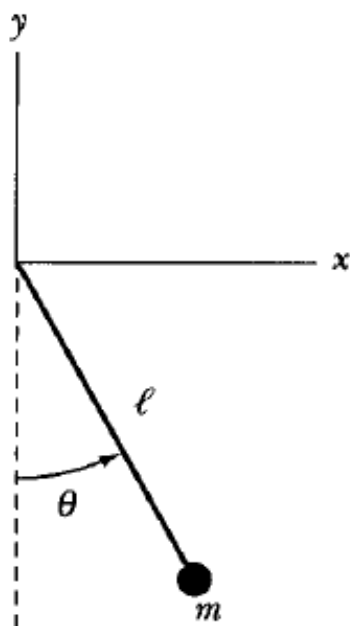
고전 물리학에서는 우리가 반영하고자 하는 모든 성질을
(작용action이라고 부르는) 스칼라 함수에 집어 넣고
이것을 변분하여 운동 방정식을 얻게 됩니다.
이 원리는 모든 역학 문제에 적용됩니다.

$$\delta S = 0$$

이것을 해밀턴의 원리Hamilton's principle라고 합니다.

$$\delta S = 0$$

더 나아가서 양자 물리학에서는
우리가 무시했던 경로들의 기여까지 고려해야 합니다.
여기서부터 고전 물리와 양자 물리가
달라지는 부분이라고 할 수 있습니다.

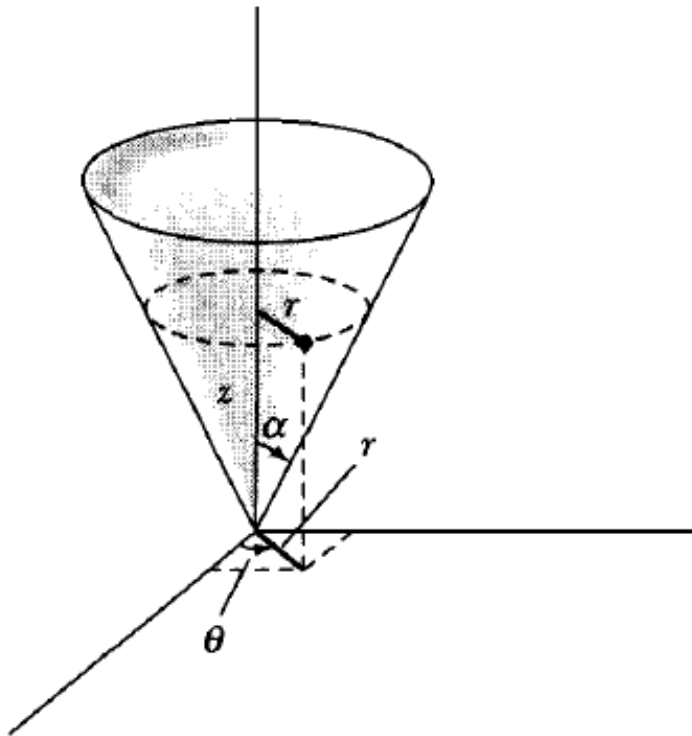


$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \dot{y}^2$$

$$U = mgy$$

$$L = T - U = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \dot{y}^2 - mgy$$

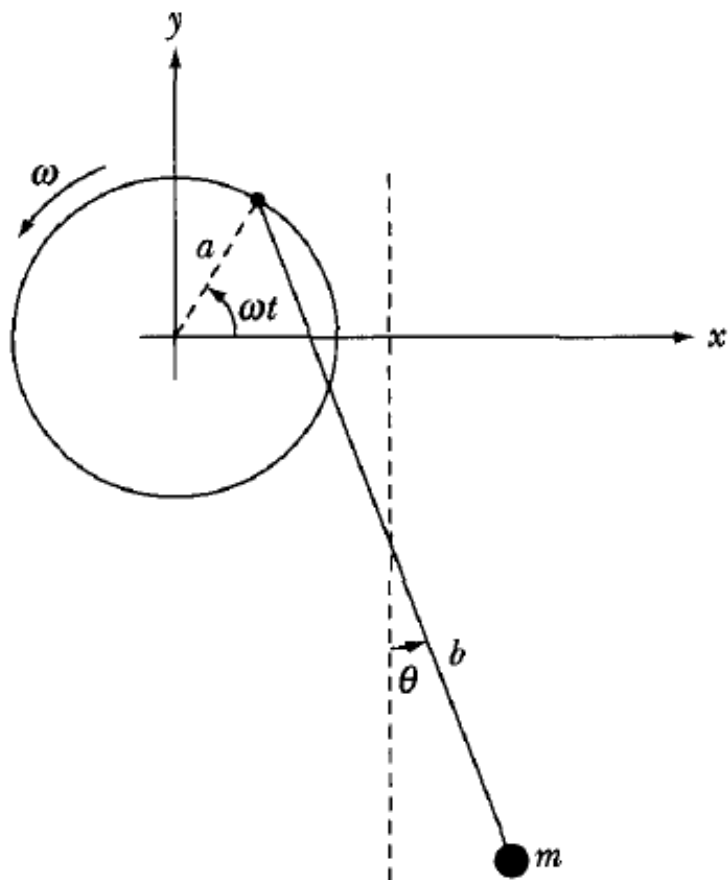
예제 7.2: 진자



구속 조건

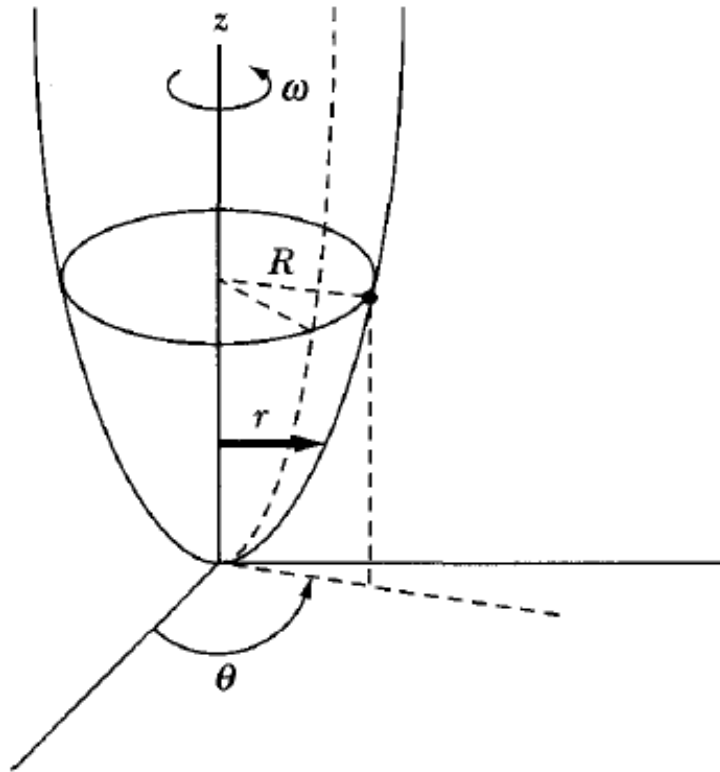
$$z = r \cot \alpha$$

예제 7.4



$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos \omega t + b \sin \theta \\ y &= a \sin \omega t - b \cos \theta \end{aligned} \right\}$$

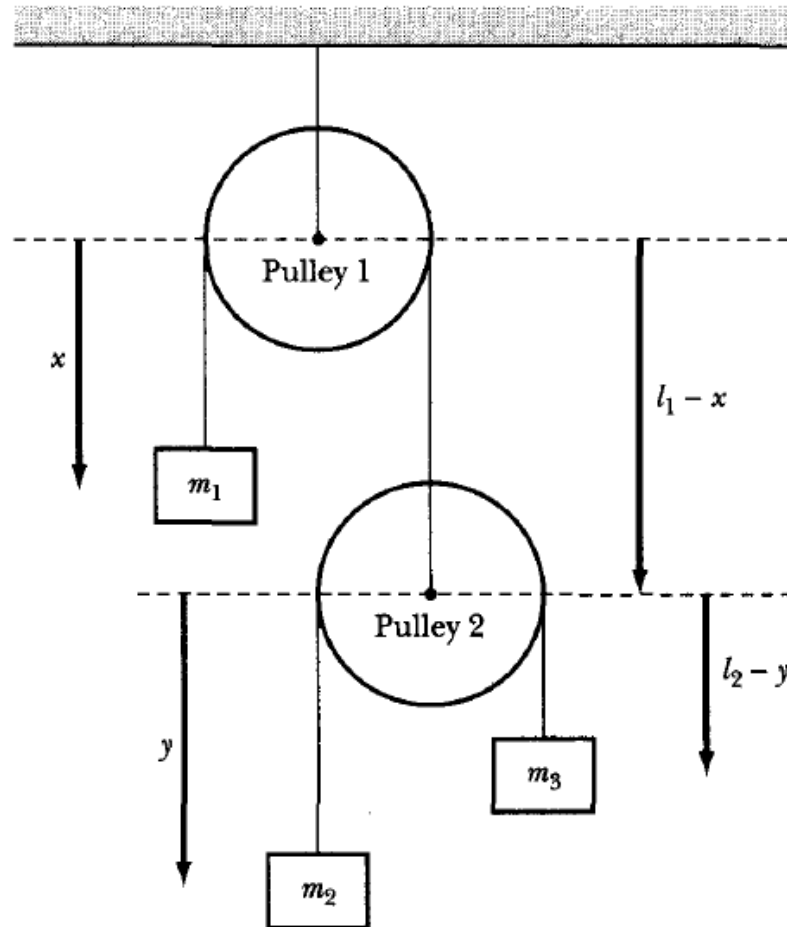
예제 7.5



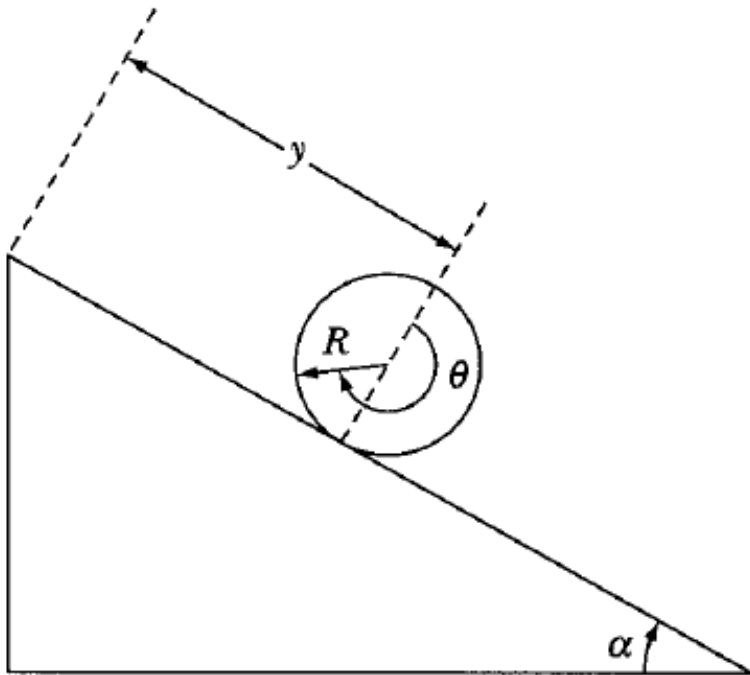
구속 조건

$$z = cr^2$$

예제 7.7: 철사에 구속되어 강제 회전하는 질점의 운동



예제 7.8: 2중 도르래 시스템



구속 조건

$$f(x_{\alpha,i}, \dot{x}_{\alpha,i}, t) = 0$$

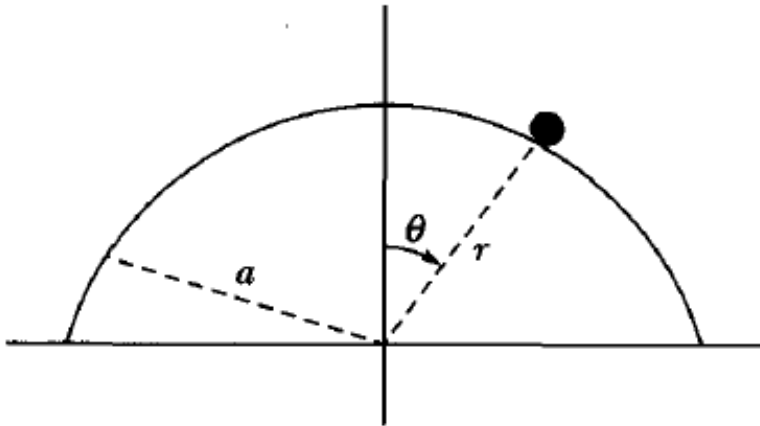
라그랑주 승수법

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} + \sum_k \lambda_k(t) \frac{\partial f_k}{\partial q_j} = 0$$

구속력

$$Q_j = \sum_k \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial q_j}$$

예제 7.9: 라그랑주 승수법과 구속력



구속 조건

$$f(x_{\alpha,i}, \dot{x}_{\alpha,i}, t) = 0$$

라그랑주 승수법

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} + \sum_k \lambda_k(t) \frac{\partial f_k}{\partial q_j} = 0$$

구속력

$$Q_j = \sum_k \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial q_j}$$

예제 7.10: 라그랑주 승수법과 구속력

라그랑지안은 일반화 좌표와 일반화 속력의 범함수입니다.
이것을 일반화 좌표와 일반화 운동량의 범함수로
표현하는 것이 가능할까요?

이것을 위해서는 소위 르장드르 변환이라고 하는 것을
사용해야 합니다.
이 변환을 통해 우리는 해밀토니안이라고 하는
다른 종류의 에너지 함수를 얻게 됩니다.

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

일반화 운동량은 위와 같습니다.

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

$$H(q_j, p_j; t) \equiv \sum_j p_j \dot{q}_j - L(q_j, \dot{q}_j; t)$$

이제 위와 같이 소위 르장드르 변환을 적용해 봅시다.
 라그랑지안은 일반화 좌표와 속력의 범함수였다면,
 새로운 범함수는 일반화 좌표와 운동량의 범함수가 됩니다.

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

$$H(q_j, p_j; t) \equiv \sum_j p_j \dot{q}_j - L(q_j, \dot{q}_j; t)$$

이제 위와 같이 소위 르장드르 변환을 적용해 봅시다.
 라그랑지안은 일반화 좌표와 속력의 범함수였다면,
 새로운 범함수는 일반화 좌표와 운동량의 범함수가 됩니다.

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

$$H(q_j, p_j; t) \equiv \sum_j p_j \dot{q}_j - L(q_j, \dot{q}_j; t)$$

이 새로운 범함수를 해밀토니안이라고 합니다.

$$H(q_j, p_j; t) \equiv \sum_j p_j \dot{q}_j - L(q_j, \dot{q}_j; t)$$

$$dH(q_j, p_j; t)$$

$$= \sum_j \left(\dot{q}_j dp_j + p_j d\dot{q}_j - \frac{\partial L}{\partial q_j} dq_j - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} d\dot{q}_j \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

해밀토니안으로부터 유도할 수 있는 운동 방정식은 어떻게 될까요?

$$H(q_j, p_j; t) \equiv \sum_j p_j \dot{q}_j - L(q_j, \dot{q}_j; t)$$

$$dH(q_j, p_j; t)$$

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

$$= \sum_j \left(\dot{q}_j dp_j + p_j d\dot{q}_j - \frac{\partial L}{\partial q_j} dq_j - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} d\dot{q}_j \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

$$= \sum_j (\dot{q}_j dp_j - \dot{p}_j dq_j) - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

$$\dot{p}_j = \frac{\partial L}{\partial q_j}$$

$$H(q_j, p_j; t) \equiv \sum_j p_j \dot{q}_j - L(q_j, \dot{q}_j; t)$$

$$dH(q_j, p_j; t)$$

$$= \sum_j \left(\dot{q}_j dp_j + p_j d\dot{q}_j - \frac{\partial L}{\partial q_j} dq_j - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} d\dot{q}_j \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

$$= \sum_j (\dot{q}_j dp_j - \dot{p}_j dq_j) - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

$$= \sum_j \left(\frac{\partial H}{\partial p_j} dp_j + \frac{\partial H}{\partial q_j} dq_j \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}$$

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}$$

$$-\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

정준 방정식

여기에서 위와 같은 관계식을 유도할 수 있습니다.
특히 앞의 두 방정식을 정준 방정식canonical equation이라고 합니다.

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}$$

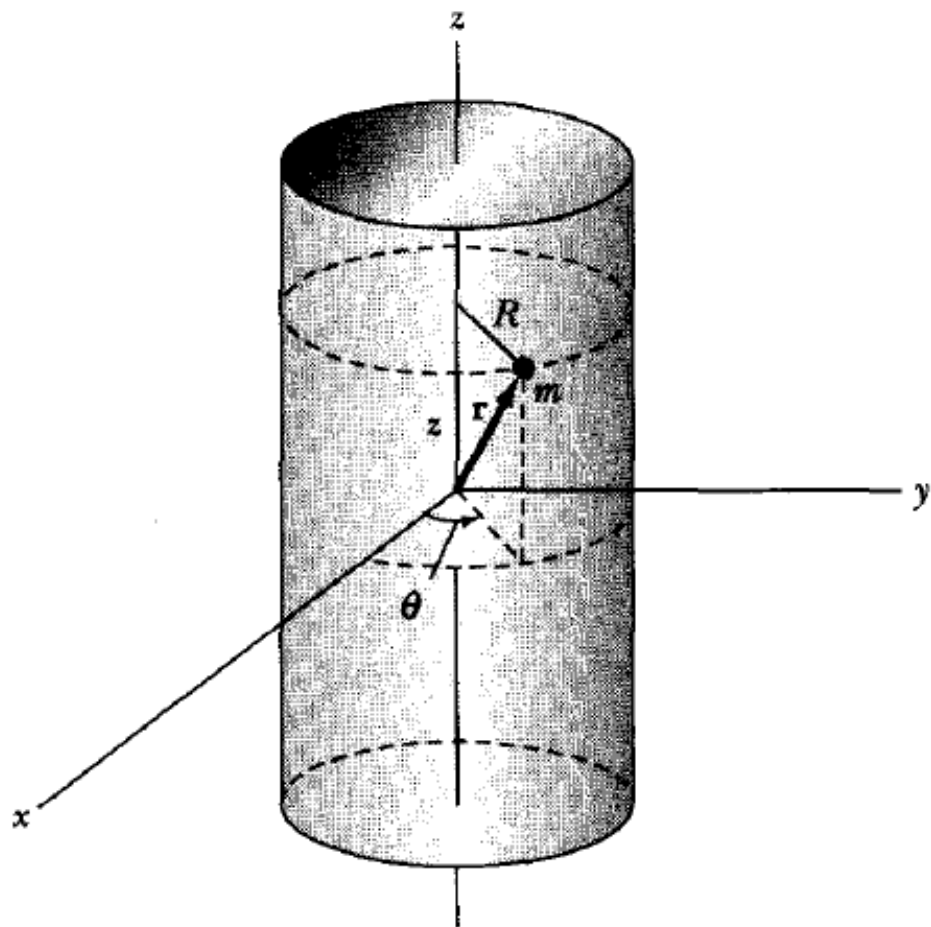
$$\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}$$

$$-\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

정준 방정식

각 입자에 대해

오일러-라그랑주 방정식은 1개의 2차 미분 방정식이라면,
정준 방정식은 2개의 1차 미분 방정식이라는 특징이 있습니다.



외력

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{r}$$

구속 조건

$$x^2 + y^2 = R^2$$

예제 7.11

$$[g, h] \equiv \sum_k \left(\frac{\partial g}{\partial q_k} \frac{\partial h}{\partial p_k} - \frac{\partial g}{\partial p_k} \frac{\partial h}{\partial q_k} \right)$$

$$\frac{dg}{dt} = [g, H] + \frac{\partial g}{\partial t}$$

$$\dot{q}_j = [q_j, H]$$

$$\dot{p}_j = [p_j, H]$$

이번에는 위와 같이 푸아송 괄호Poisson brackets라는 것을
정의해 봅시다.

그러면 임의의 함수의 시간 미분과 정준 방정식은
위와 같이 간단하게 표기됩니다.

$$[g, h] \equiv \sum_k \left(\frac{\partial g}{\partial q_k} \frac{\partial h}{\partial p_k} - \frac{\partial g}{\partial p_k} \frac{\partial h}{\partial q_k} \right)$$

$$[q_i, p_j] = \delta_{ij}$$

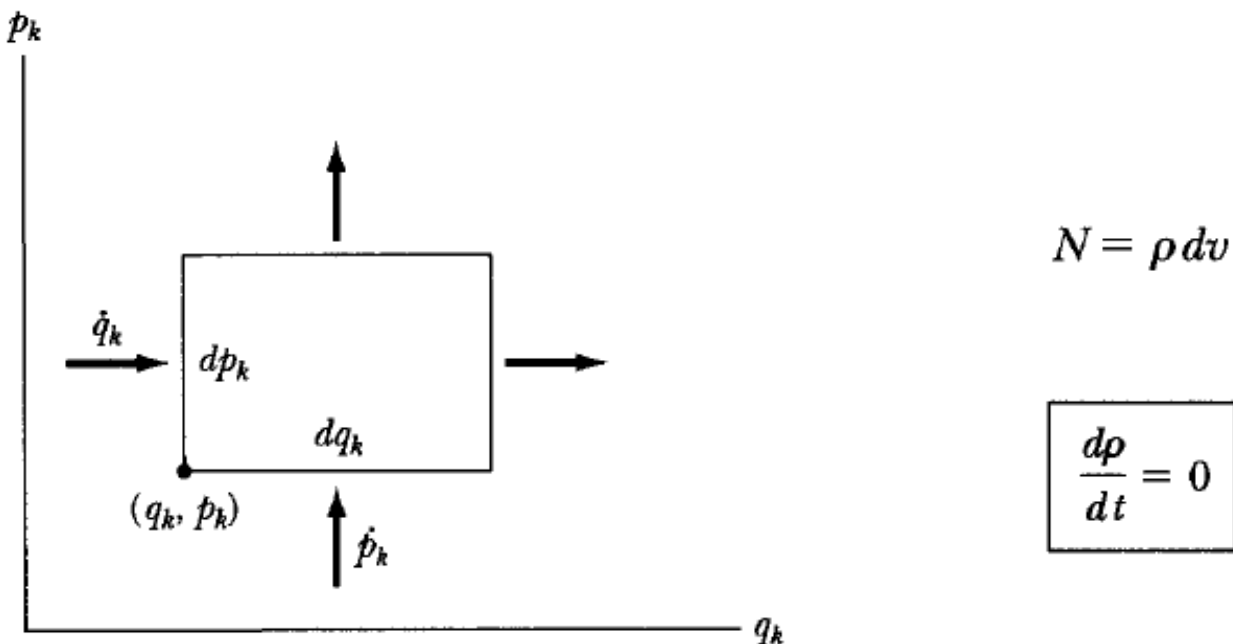
그리고 이 때, 일반화 좌표와 일반화 운동량 사이에는
위와 같은 관계가 있습니다.

이러한 조건이 만족될 때, 좌표와 운동량은 서로
정준 공역canonical conjugate이라고 부릅니다.

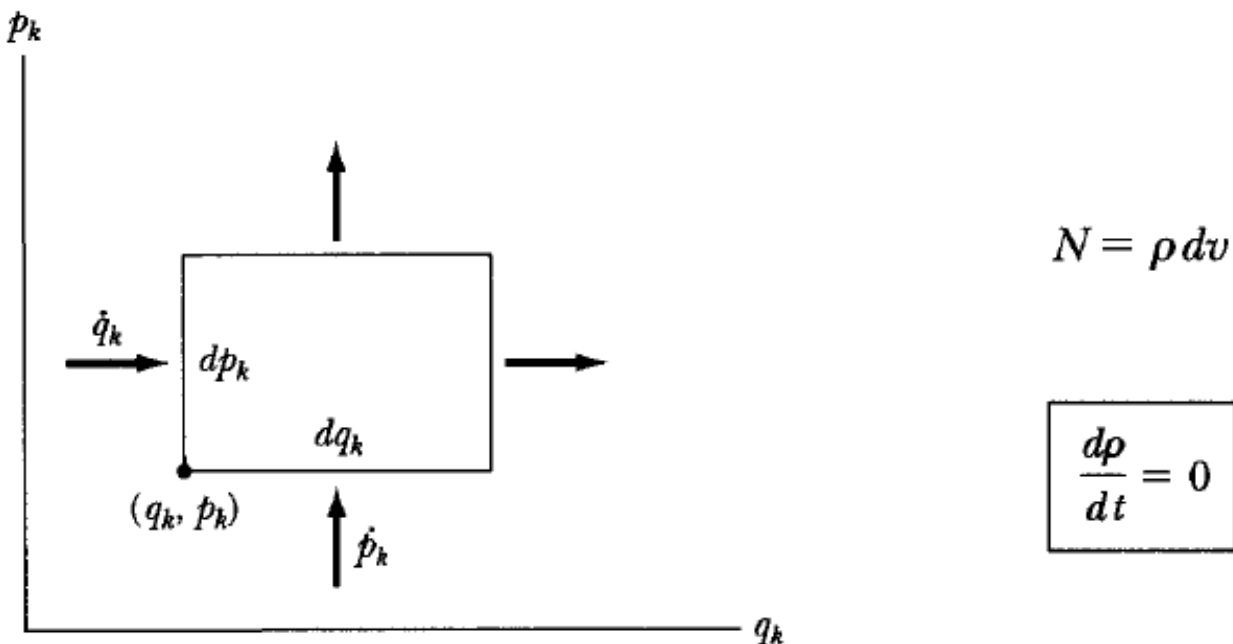
$$[g, h] \equiv \sum_k \left(\frac{\partial g}{\partial q_k} \frac{\partial h}{\partial p_k} - \frac{\partial g}{\partial p_k} \frac{\partial h}{\partial q_k} \right)$$

$$[q_i, p_j] = \delta_{ij}$$

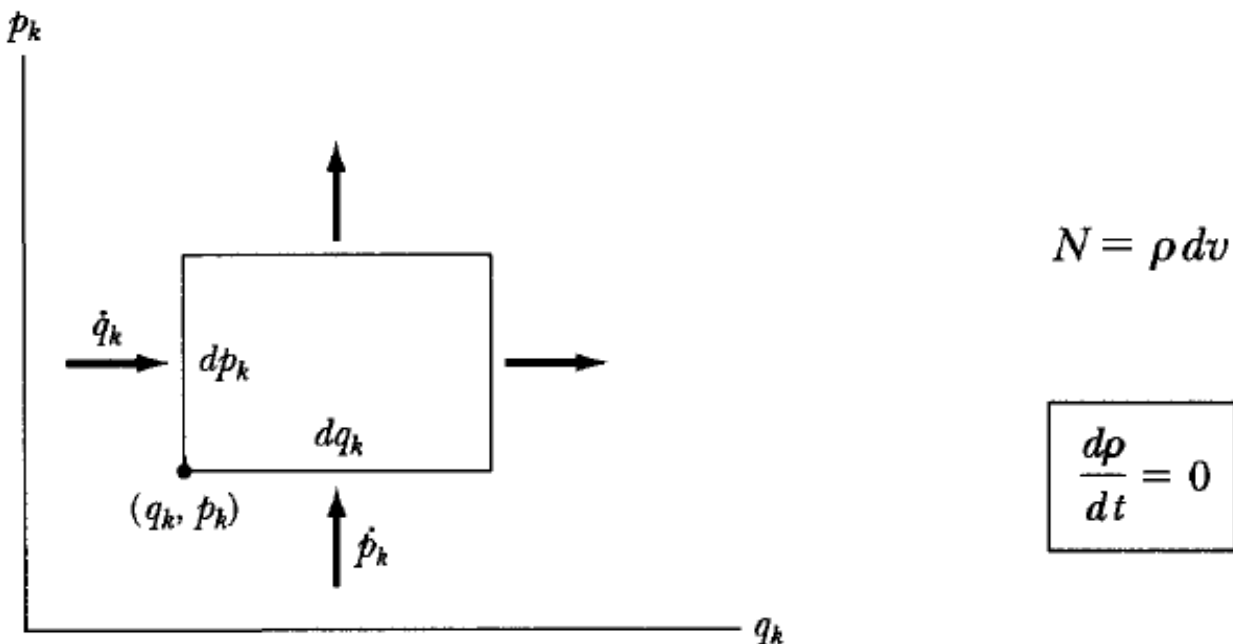
변수나 운동량을 다시 정의하더라도
 정준 방정식의 형태가 유지가 된다면
 이러한 변환을 정준 변환canonical transformation이라고 합니다.



이를테면, 시간에 따른 운동은 정준 변환입니다.
 따라서 일반화 좌표와 운동량으로 표현되는 위상 공간의 밀도는
 시간에 따라 변하지 않습니다.
 이것이 바로 리우빌의 정리Liouville's theorem입니다.



사실 푸아송 괄호라는 것은 부피 적분에서의 야코비안과 같습니다.
 푸아송 괄호가 정준 변환에 대해서 불변이라면
 미소 부피의 변화도 불변이 되며,
 따라서 위상 밀도도 불변이어야 합니다.



리우빌의 정리에 의하면
 위상 공간에서 자유도의 수는 시간에 따라 변하지 않습니다.
 따라서 위상 공간에서만 확률 해석이 가능합니다.

고전 물리학에서는
라그랑지안에 의한 기술이나 해밀토니안에 의한 기술이
모두 동등합니다.

그러나 확률적 또는 통계적 해석을 해야하는
양자 역학 또는 통계 역학에서는
위상 공간을 사용해서 기술해야만 합니다.
따라서 해밀토니안에 의한 기술 방식이 좀 더 자연스럽게 됩니다.
이것이 해밀턴 역학이 가지는 물리적 중요성입니다.

마지막으로 라그랑주 및 해밀턴 역학의 관점에서
보존과 대칭성의 관계에 대해서 다시 살펴봅시다.

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

계가 **닫힌** 계라면,
라그랑지안은 시간에 명시적으로 의존하지 않습니다.
이것은 어떤 의미를 가지고 있을까요?

$$\frac{dL(q_j, \dot{q}_j; t)}{dt} = \sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial t}$$

이번에는 이 경우에 라그랑지안을 전미분해 봅시다.

$$\frac{dL(q_j, \dot{q}_j; t)}{dt} = \sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial t}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

$$= \sum_j \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j$$

$$\frac{dL(q_j, \dot{q}_j; t)}{dt} = \sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial t}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

$$= \sum_j \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j$$

$$= \sum_j \frac{d}{dt} \left(\dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(L - \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) = 0 = -\frac{dH}{dt}$$

따라서, **닫힌 계**의 경우
 위와 같은 관계를 유도할 수 있습니다.
 사실 이것은 해밀토니안이
 시간에 따라 변하지 않는다는 말과 같습니다.

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(L - \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) = 0 = -\frac{dH}{dt}$$

따라서 닫힌 계의 경우 해밀토니안이 보존됩니다.

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 = \sum_{j,k} a_{j,k} \dot{q}_j \dot{q}_k$$

$$\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2 \sum_{j,k} a_{j,k} \dot{q}_j \dot{q}_k = 2T$$

좌표가 스칼라노믹한 구속 조건을 만족하는 경우,
즉 일반화 좌표가 직교 좌표의 시간 미분에 의존하지 않는 경우,
위와 같이 적을 수 있습니다.

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 = \sum_{j,k} a_{j,k} \dot{q}_j \dot{q}_k$$

$$\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2 \sum_{j,k} a_{j,k} \dot{q}_j \dot{q}_k = 2T$$

$$H = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - L = 2T - L = T + U$$

여기에 추가로 퍼텐셜이 일반화 속력에 의존하지 않으면
해밀토니안은 위와 같이 표현됩니다.

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 = \sum_{j,k} a_{j,k} \dot{q}_j \dot{q}_k$$

$$\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2 \sum_{j,k} a_{j,k} \dot{q}_j \dot{q}_k = 2T$$

$$H = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - L = 2T - L = T + U = E$$

즉, 스칼라노믹하고 퍼텐셜이 속력에 의존하지 않는 경우
해밀토니안은 에너지가 됩니다.

따라서 **고립계**인 경우
(라그랑지안이 시간에 명시적으로 의존하지 않는 경우)
해밀토니안이 보존됩니다.

그리고 일반화 좌표가 **스클러노믹**하고
퍼텐셜 에너지가 속력에 의존하지 않으면
해밀토니안은 **에너지**가 됩니다.

두 상황이 동시에 일어나면
에너지가 보존됩니다.

$$\frac{dp_j}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

더 나아가서, 오일러-라그랑주 방정식으로부터
라그랑지안이 어떤 특정 변수에 의존하지 않으면
일반화 운동량이 보존됨을 알 수 있습니다.

$$\frac{dp_j}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

다시 말하면, 이 계가 어떤 변수에 대한 **대칭성**을 가지고 있으면
거기에 대응되는 **보존량**이 존재한다는 것을 보여줍니다.

$$\frac{dp_j}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

Characteristic of inertial frame	Property of Lagrangian	Conserved quantity
Time homogeneous	Not explicit function of time	Total energy
Space homogeneous	Invariant to translation	Linear momentum
Space isotropic	Invariant to rotation	Angular momentum

여기에서 자연스럽게 공간에 대한 대칭성은 선운동량의 보존을,
 각도에 대한 대칭성은 각운동량의 보존을
 보여준다고 해석할 수 있습니다.

감사합니다