

8장

중심력에 의한 운동

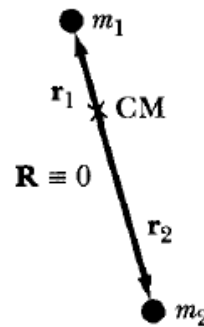
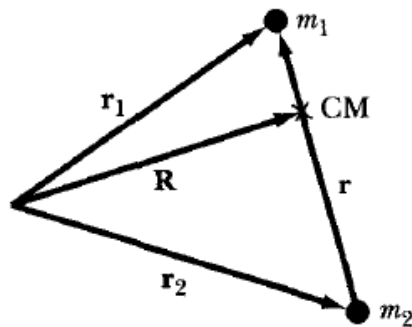
우리는 지금까지 뉴턴 역학 및 해석 역학과 관련한
기본적인 주제들을 학습했습니다.

이제 이러한 방법들을 구체적인 물리 문제에 적용해 봅시다.
그 중 첫 번째로, **중심력**central force에 의한 운동을 다루어 봅시다.

$$L = \frac{1}{2}m_1|\dot{\mathbf{r}}_1|^2 + \frac{1}{2}m_2|\dot{\mathbf{r}}_2|^2 - U(r)$$

위와 같은 2체 문제를 생각해 봅시다.
이러한 라그랑지안에 의해 기술되는 힘을 중심력장이라고 합니다.

$$L = \frac{1}{2}m_1|\dot{\mathbf{r}}_1|^2 + \frac{1}{2}m_2|\dot{\mathbf{r}}_2|^2 - U(r)$$



$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \\ \mathbf{r}_2 &= -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \end{aligned} \right\}$$

$$L = \frac{1}{2}\mu|\dot{\mathbf{r}}|^2 - U(r)$$

$$\mu \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

이 문제를 질량 중심의 좌표로 다시 기술하면
유효한 1체 문제로 환원되는 것을 알 수 있습니다.
이 때 우리는 환산 질량을 도입하게 됩니다.

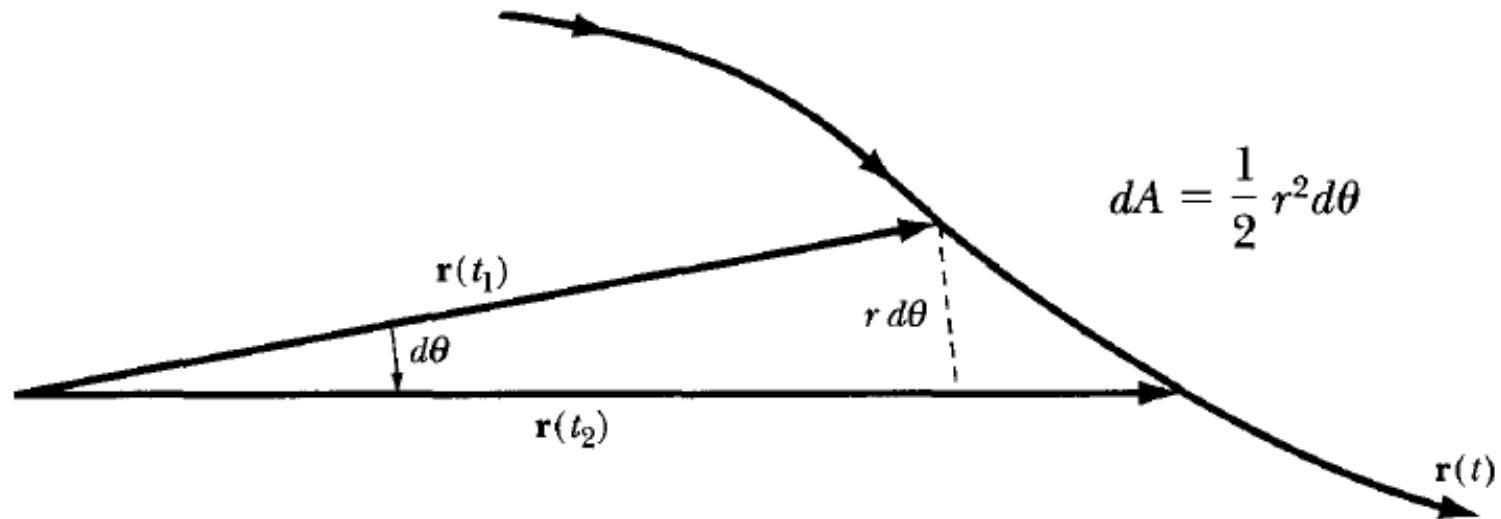
$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \text{constant}$$

$$L = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - U(r)$$

$$p_{\theta} \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \mu r^2 \dot{\theta} = \text{constant}$$

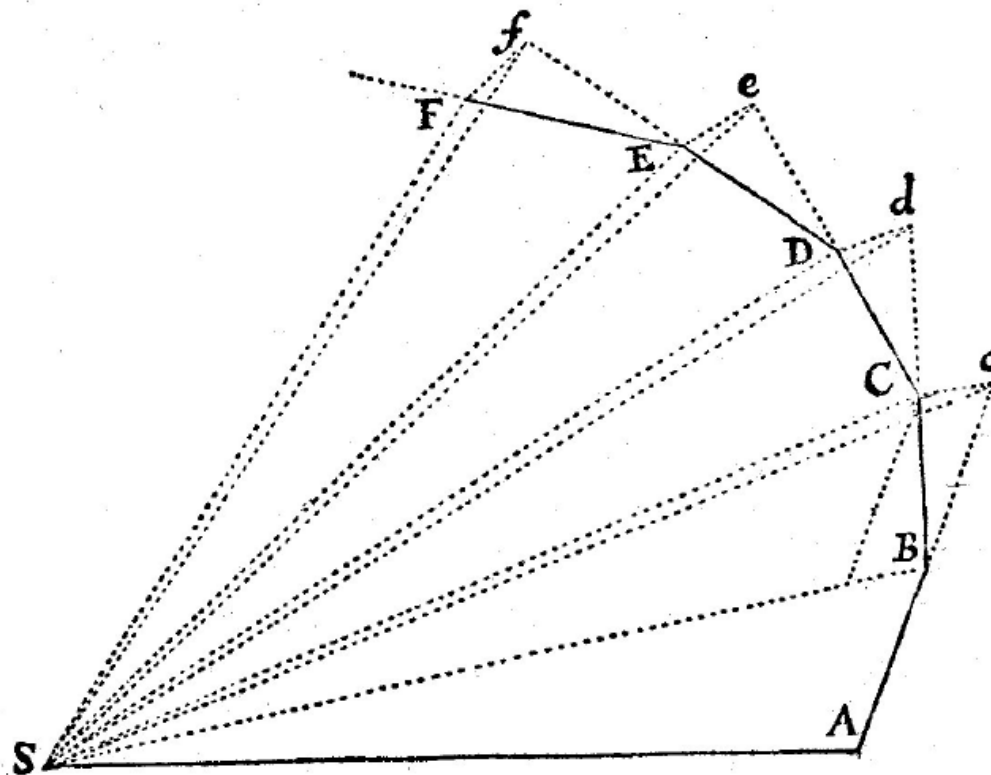
$$l \equiv \mu r^2 \dot{\theta} = \text{constant}$$

이 등가 1체 문제는 구면 대칭을 가지고 있습니다.
 그러나 **각운동량 보존**에 의해 선호되는 평면을 선택할 수 있습니다.
 이로부터 2차원 평면으로 우리의 관심을 제한할 수 있습니다.
 이 때, 극좌표계를 사용하면 됩니다.

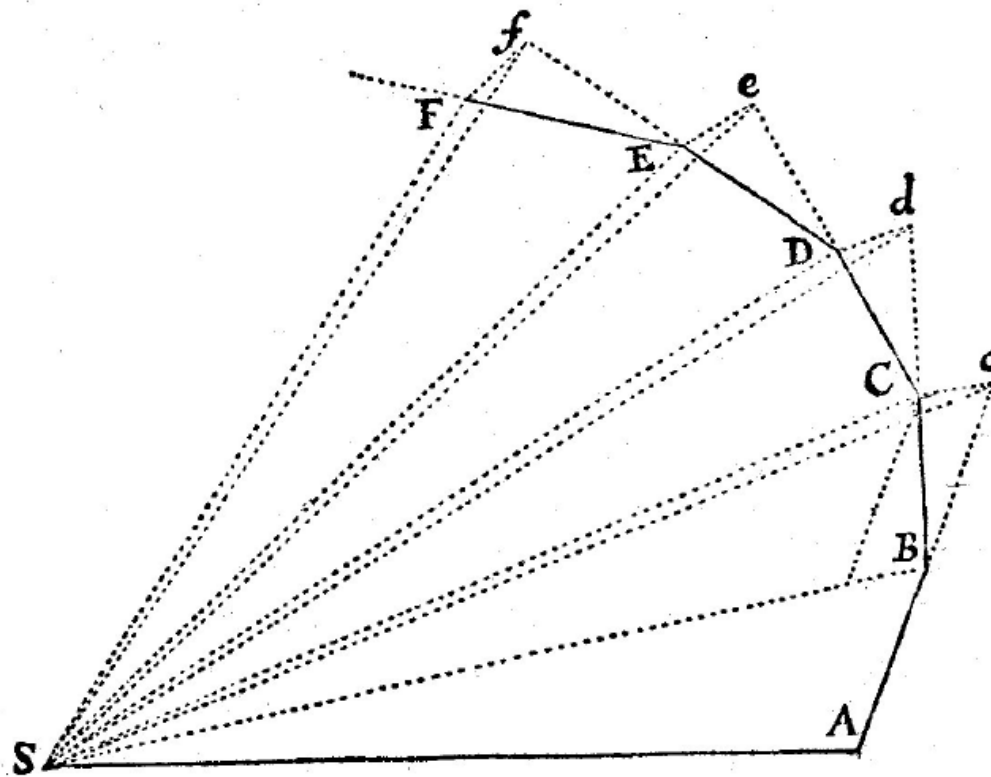


$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} \\ &= \frac{l}{2\mu} = \text{constant} \end{aligned}$$

각운동량 보존은 **면적 속도** 일정의 법칙, 즉
케플러 제2법칙과 대응됩니다.



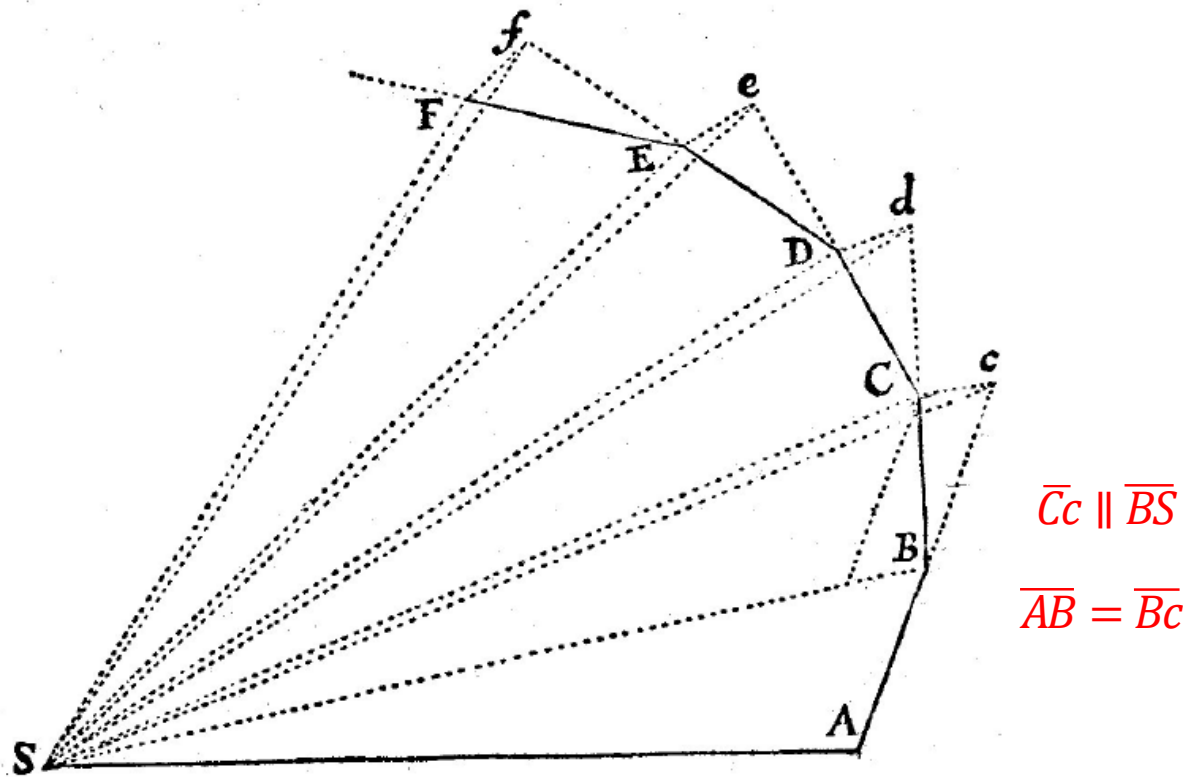
사실 뉴턴 자신은 케플러의 두 번째 법칙을
기하학적인 방법으로 증명했습니다.
점 $A, B, C, \dots$ 등은 각각 일정 시간마다 측정한
질점의 위치라고 생각할 수 있습니다.



$$\overline{Cc} \parallel \overline{BS}$$

$$\overline{AB} = \overline{Bc}$$

중심력이 없다면 $\overline{AB}$ 를 따라 운동하던 물체는
같은 시간 간격 동안 같은 길이만큼 $\overline{Bc}$ 로 움직였을 것입니다.
한 편, 중심력은 $\overline{BS}$ 방향을 향하기 때문에,
 $\overline{Cc}$ 와 $\overline{BS}$ 는 서로 평행합니다.



그러면 간단한 계산에 의해서
 $\Delta SAB = \Delta BSc = \Delta BSC$ 가 됨을 알 수 있습니다.
 즉, 단위 시간당 행성과 항성을 잇는 직선이
 쓸고 지나가는 면적은 같습니다.

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{l^2}{\mu r^2} + U(r)$$

이 계에서는 에너지와 각운동량이 각각 보존됩니다.
총 에너지는 위와 같이 기술할 수 있습니다.

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{l^2}{\mu r^2} + U(r)$$

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U) - \frac{l^2}{\mu^2 r^2}}$$

$$d\theta = \frac{d\theta}{dt} \frac{dt}{dr} dr = \frac{\dot{\theta}}{\dot{r}} dr$$

$$\theta(r) = \int \frac{\pm (l/r^2) dr}{\sqrt{2\mu\left(E - U - \frac{l^2}{2\mu r^2}\right)}}$$

그러면 이 관계로부터 방정식을 푸는 것이 가능합니다.
극좌표계의 좌표 성분들을 위와 같은
적분식으로 적어낼 수 있습니다.

$$\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = 0$$

$$\mu(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -\frac{\partial U}{\partial r} = F(r)$$

같은 문제를 운동 방정식을 직접 푸는 방법으로 풀 수도 있습니다.

$$\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = 0$$

$$\mu(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -\frac{\partial U}{\partial r} = F(r)$$

$$u \equiv \frac{1}{r}$$

$$\dot{\theta} = l/\mu r^2$$

$$\frac{du}{d\theta} = -\frac{\mu}{l}\dot{r} \quad \frac{d^2u}{d\theta^2} = -\frac{\mu^2}{l^2}r^2\ddot{r}$$

여기에서 위와 같이 새로운 변수를 정의해서 다루어 봅시다.
 각운동량을 대입하고,
 시간 대신 각변위의 함수로 표현해 봅시다.

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = -\frac{\mu}{l^2} \frac{1}{u^2} F(1/u)$$

$$\boxed{\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = -\frac{\mu r^2}{l^2} F(r)}$$

운동 방정식을 다시 정리하면 $r(\theta)$ 에 대한 궤도 방정식을 얻습니다.
이 방정식을 비네 방정식Binet equation이라고 합니다.

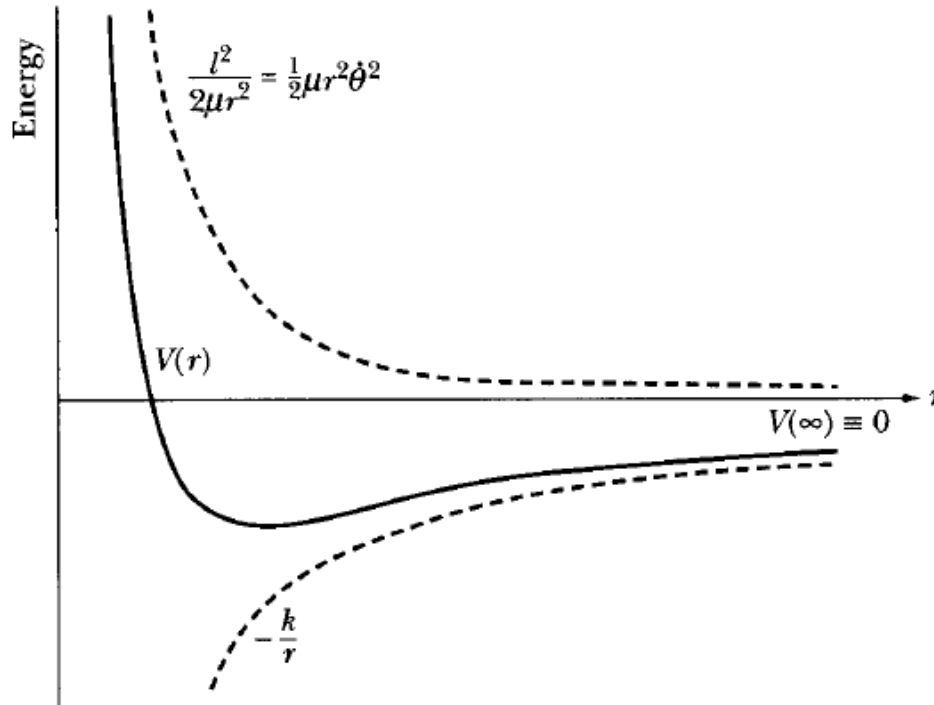
이제 이 문제를 뉴턴의 만유인력의 법칙에 적용해 봅시다.

$$F(r) = -\frac{k}{r^2}$$

$$U(r) = -\int F(r) dr = -\frac{k}{r}$$

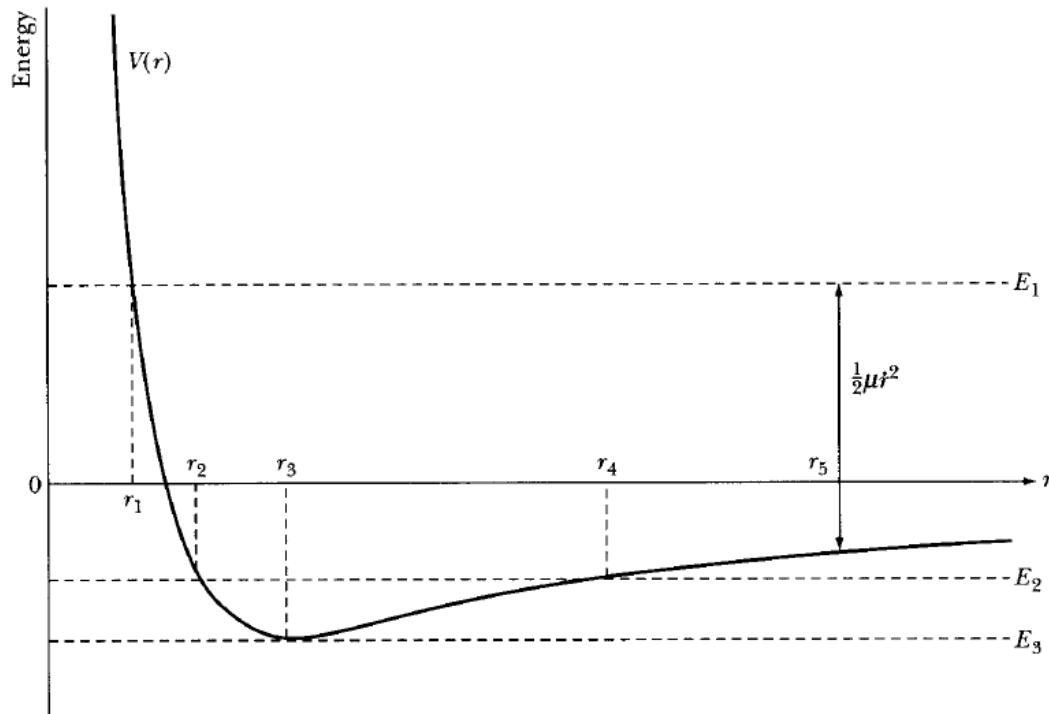
역제곱 법칙에 대한 힘 및 퍼텐셜 에너지는 위와 같습니다.

$$V(r) = -\frac{k}{r} + \frac{l^2}{2\mu r^2}$$



문제를 풀기 전에 유효 퍼텐셜을 먼저 살펴봅시다.

$$V(r) = -\frac{k}{r} + \frac{l^2}{2\mu r^2}$$



에너지에 따라 궤도의 특성이 달라짐을 알 수 있습니다.

$$\frac{\alpha}{r} = 1 + \varepsilon \cos \theta$$

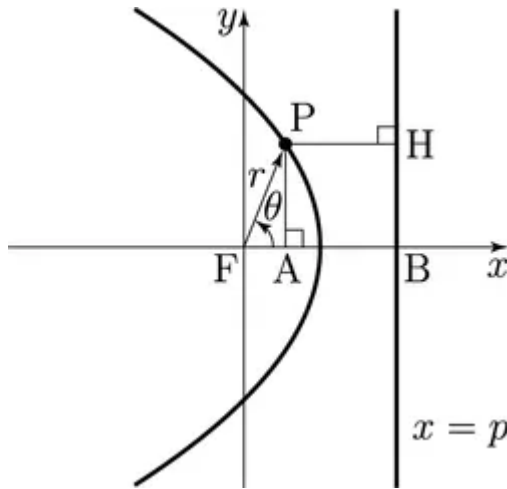
$$\left. \begin{aligned} \alpha &\equiv \frac{l^2}{\mu k} \\ \varepsilon &\equiv \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}} \end{aligned} \right\}$$

비네 방정식을 풀면 위와 같은 해를 얻게 됩니다.
여기에서 우리는 $u'(\theta = 0) = 0$ 이 되도록 좌표를 선택하였습니다.

$$\frac{\alpha}{r} = 1 + \varepsilon \cos \theta$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha &\equiv \frac{\ell^2}{\mu k} \\ \varepsilon &\equiv \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{\mu k^2}} \end{aligned} \right\}$$

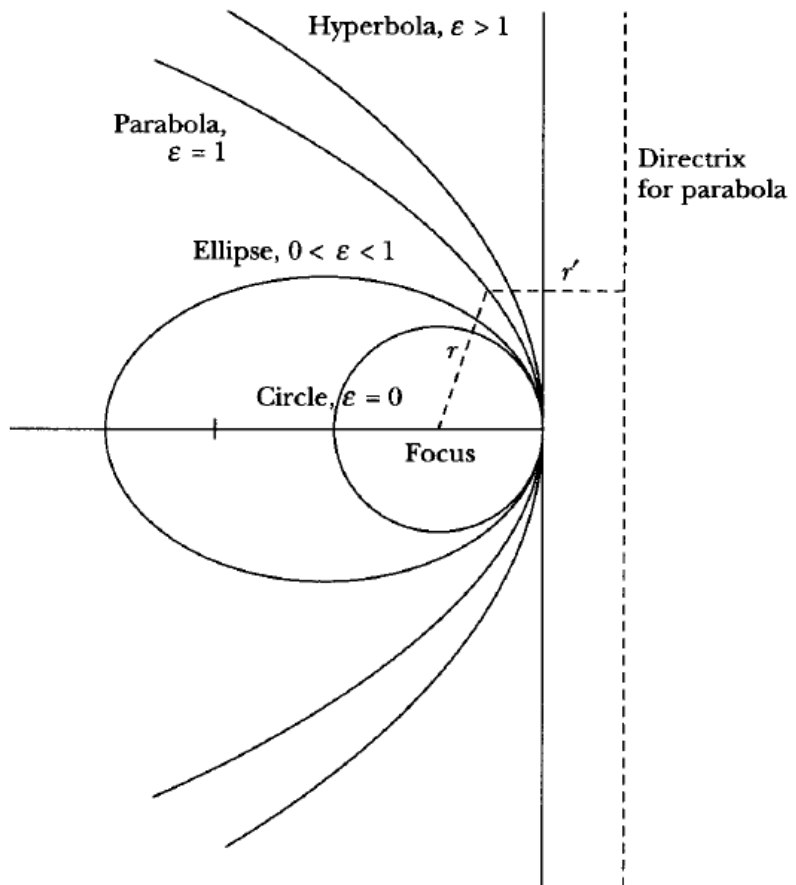
이 방정식은 2차 곡선의 극좌표계 표현에 대응됩니다.



$$e := \frac{\overline{PF}}{\overline{PH}} = \frac{r}{p - r \cos \theta}$$

$$r = \frac{ep}{1 + e \cos \theta}$$

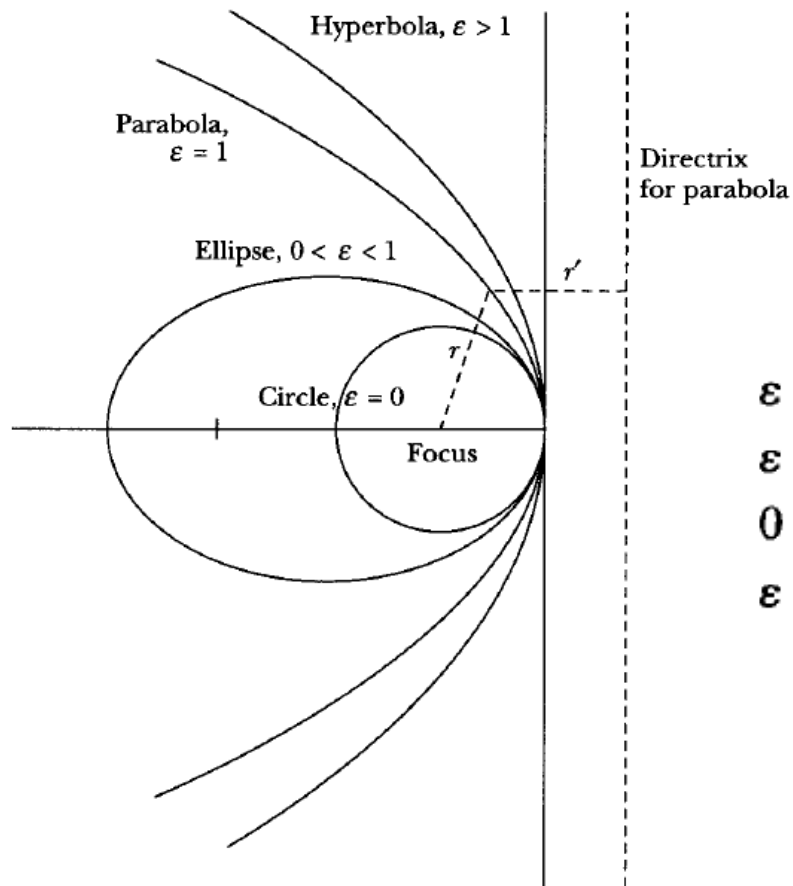
ϵ 은 여기에서 이심률eccentricity을 의미합니다.
 이심률이란 특정한 점까지의 거리와
 그 점에서 준선까지의 수직 거리 사이의 비율이며,
 2차 곡선에서 이것은 상수 값을 가지게 됩니다.



$$\frac{\alpha}{r} = 1 + \epsilon \cos \theta$$

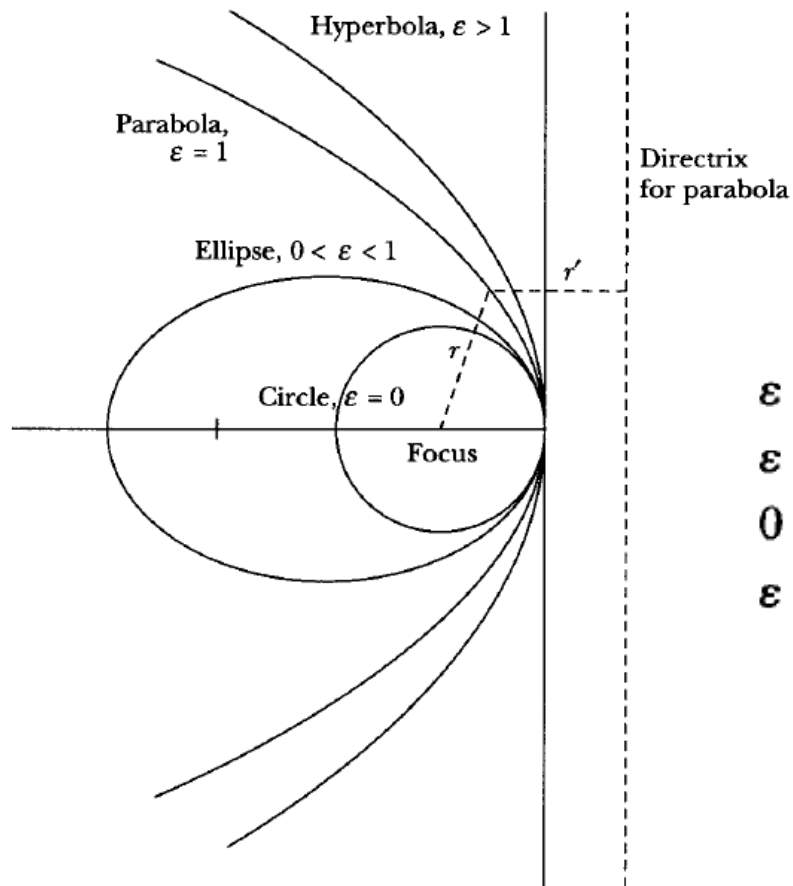
$$\left. \begin{aligned} \alpha &\equiv \frac{l^2}{\mu k} \\ \epsilon &\equiv \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}} \end{aligned} \right\}$$

ϵ 은 여기에서 이심률eccentricity을 의미합니다.
 이심률이란 특정한 점까지의 거리와
 그 점에서 준선까지의 수직 거리 사이의 비율이며,
 2차 곡선에서 이것은 상수 값을 가지게 됩니다.



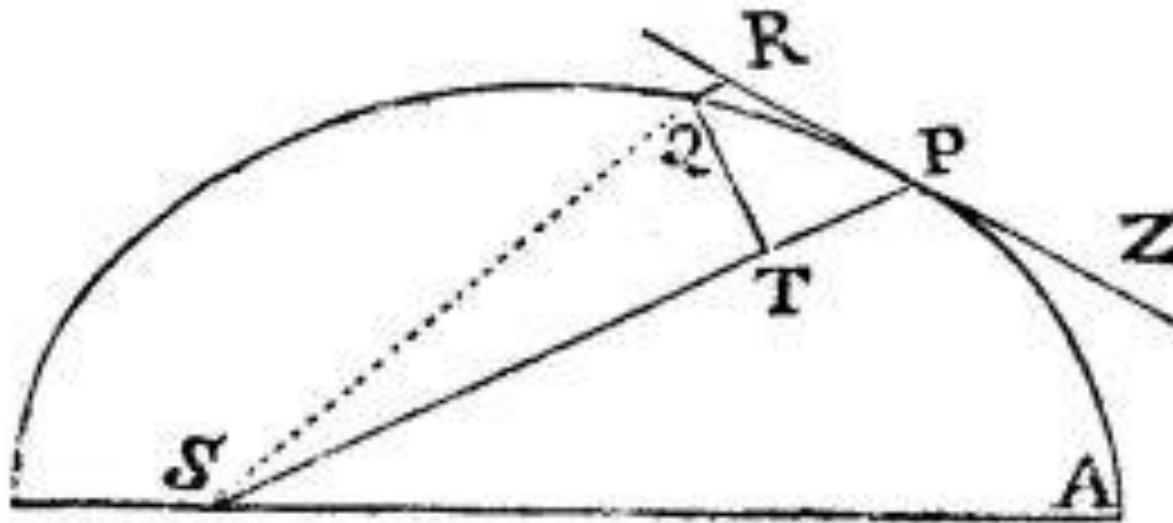
$\varepsilon > 1,$	$E > 0$	Hyperbola
$\varepsilon = 1,$	$E = 0$	Parabola
$0 < \varepsilon < 1,$	$V_{\min} < E < 0$	Ellipse
$\varepsilon = 0,$	$E = V_{\min}$	Circle

그리고 이심률은 에너지와 관계됩니다.
 에너지가 충분히 낮아서 궤도가 속박되게 되면,
 타원 궤도를 따라야 합니다.

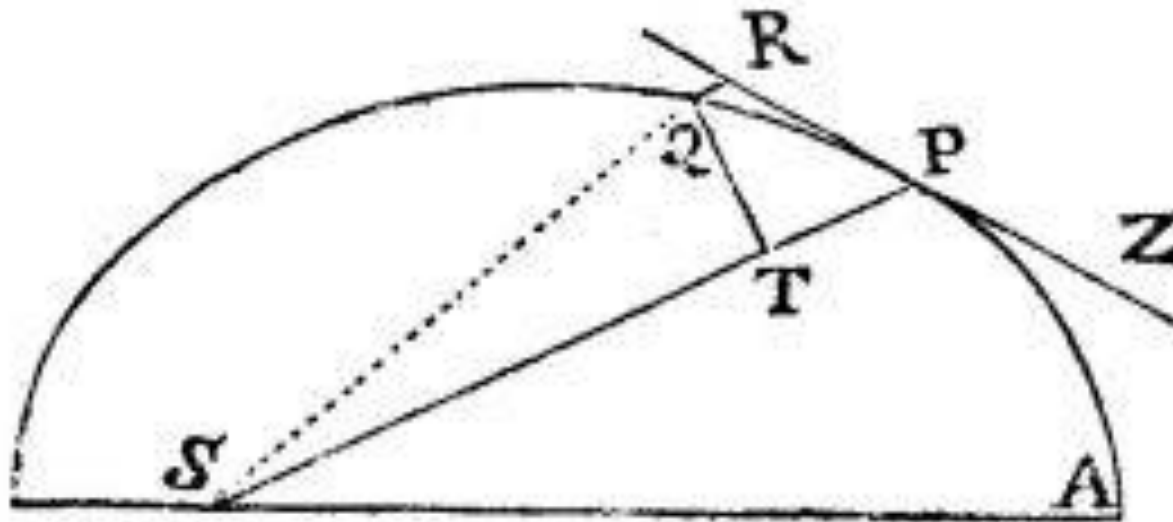


$\epsilon > 1,$	$E > 0$	Hyperbola
$\epsilon = 1,$	$E = 0$	Parabola
$0 < \epsilon < 1,$	$V_{\min} < E < 0$	Ellipse
$\epsilon = 0,$	$E = V_{\min}$	Circle

이것이 바로 케플러 제1법칙입니다.
여기에서 중심력장의 원천은 타원의 초점에 놓여 있습니다.



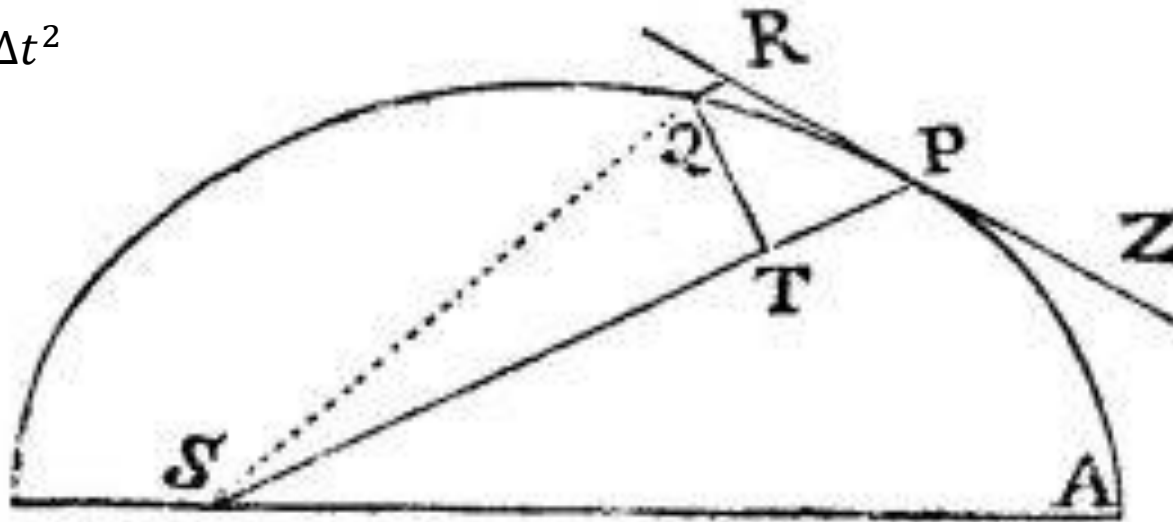
뉴턴은 이것을 어떻게 증명했을까요?
 먼저 뉴턴이 생각한 중심력 장에서의 운동을 이해해봅시다.



뉴턴에 의하면, 원래 입자는 아주 짧은 시간 동안
 선분 PR 을 따라 등속 직선 운동을 해야 하지만,
 중심력에 의해서 SR 과 평행한 방향으로
 거리 RQ 만큼 등가속도 운동을 해야 합니다.

$$\overline{PR} \simeq v \Delta t$$

$$\overline{RQ} \simeq \frac{1}{2} a \Delta t^2$$

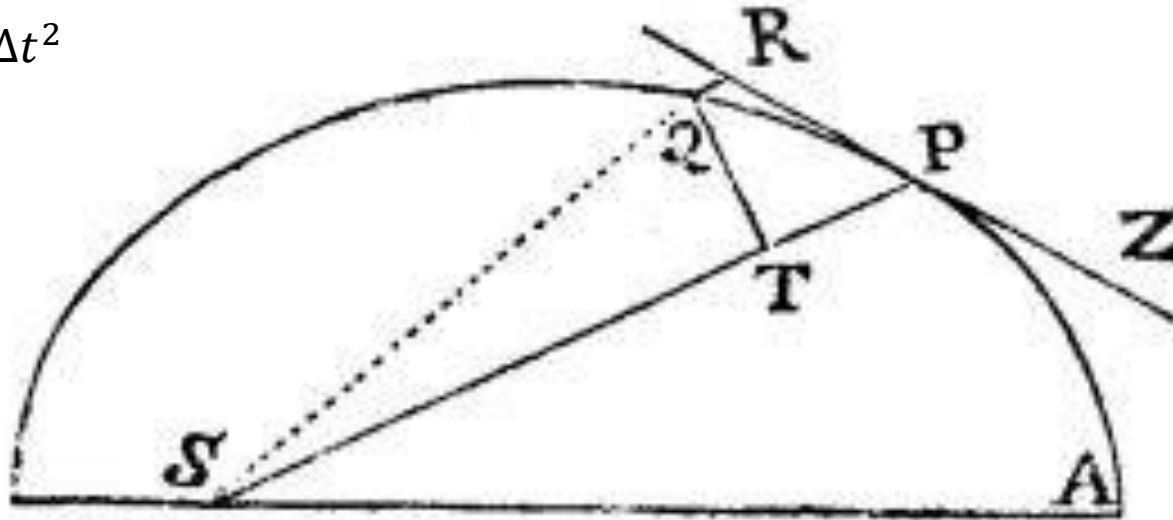


뉴턴에 의하면, 원래 입자는 **아주 짧은 시간** 동안
 선분 $\overline{PR}$ 을 따라 등속 직선 운동을 해야 하지만,
 중심력에 의해서 $\overline{SR}$ 과 평행한 방향으로
 거리 $\overline{RQ}$ 만큼 등가속도 운동을 해야 합니다.

$$\overline{PR} \simeq v \Delta t$$

$$\overline{RQ} \simeq \frac{1}{2} a \Delta t^2$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{\overline{SP} \times \overline{QT}}{\Delta t} \simeq \text{const}$$

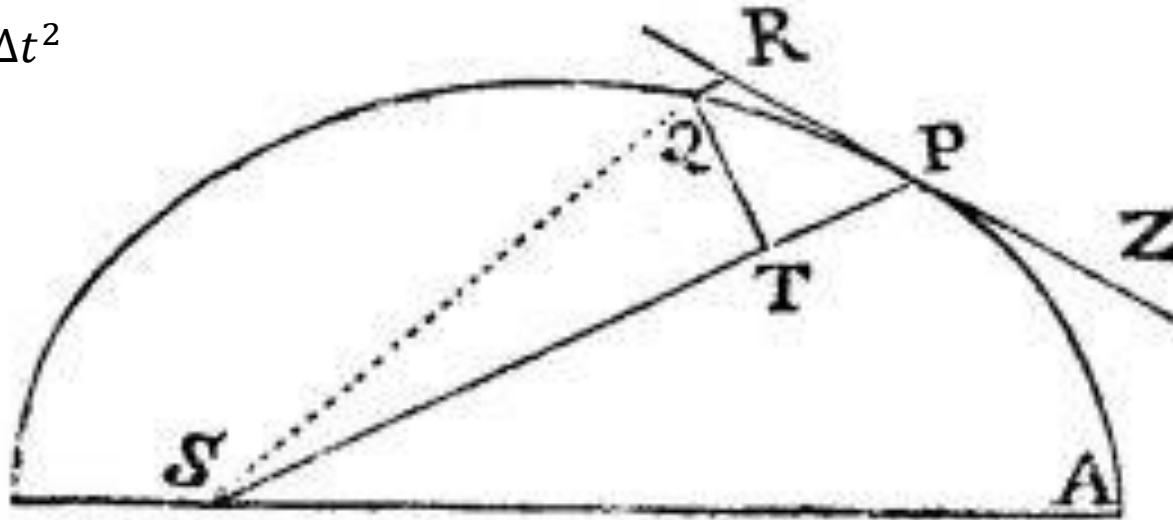


여기에서 케플러의 제2법칙을 적용하면
 면적 속도를 위와 같이 적을 수 있습니다.

$$\overline{PR} \simeq v \Delta t$$

$$\overline{RQ} \simeq \frac{1}{2} a \Delta t^2$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{\overline{SP} \times \overline{QT}}{\Delta t} \simeq \text{const}$$

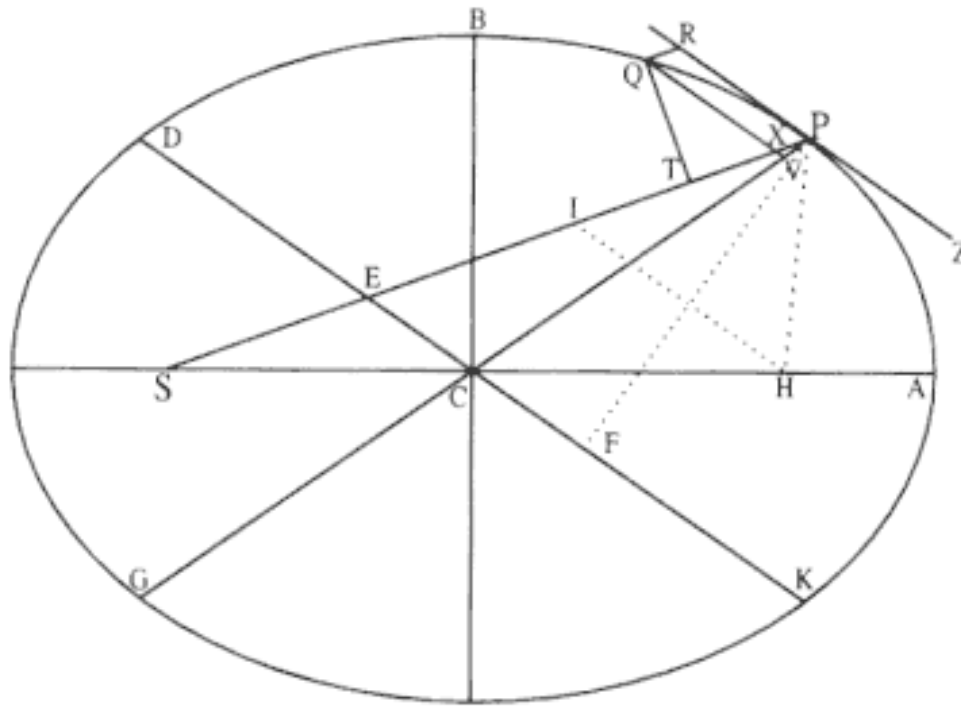


이것으로부터 Δt 를 소거하면 다음 관계를 얻습니다.

$$a \propto \frac{\overline{RQ}}{\overline{SP}^2 \times \overline{QT}^2}$$



$$\frac{\overline{RQ}}{\overline{QT}^2} = \text{const}$$



따라서 궤도를 움직이게 하는 중심력의 세기는
둘 사이의 거리의 제곱에 반비례합니다.
즉, 뉴턴은 케플러의 제1법칙이라는 현상적 법칙으로부터
만유인력의 법칙이라는 이론적 법칙을 유도한 것입니다.

$$\overline{RQ} \simeq \frac{1}{2} a \Delta t^2$$

2차 근사

$$\frac{1}{2} \times \frac{\overline{SP} \times \overline{QT}}{\Delta t} \simeq \text{const}$$

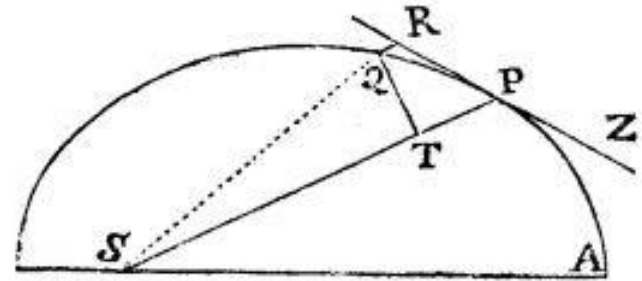
케플러의 제2법칙

$$\frac{\overline{RQ}}{\overline{QT}^2} = \text{const}$$

2차 곡선에서의 성질

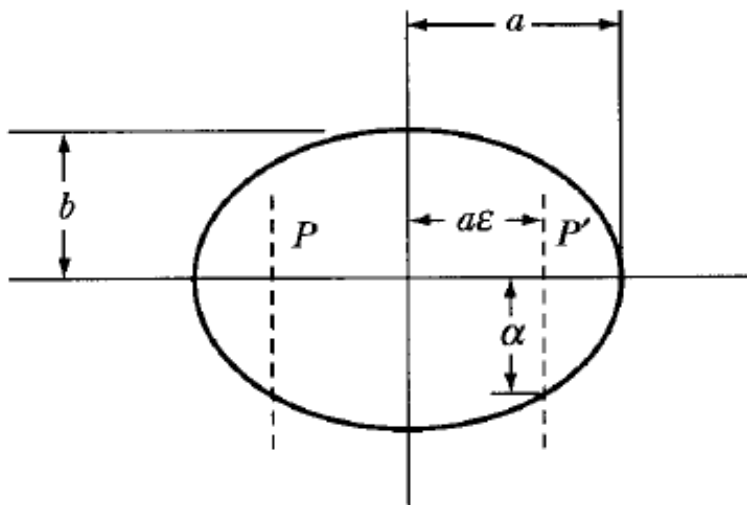
$$a \propto \frac{\overline{RQ}}{\overline{SP}^2 \times \overline{QT}^2} \propto \frac{1}{\overline{SP}^2}$$

만유인력의 법칙



비록 뉴턴은 기하학적인 증명을 사용하였지만
미적분학의 직관을 사용합니다.

짧은 시간 동안의 운동은 등속 또는 등가속 운동으로 볼 수 있고,
여기에서 무한소를 제거하여 극한 값을 계산한 것입니다.

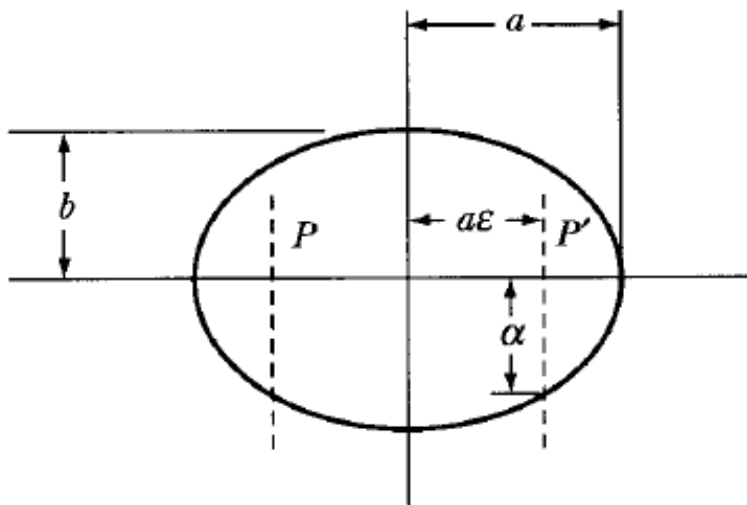


$$a = \frac{\alpha}{1 - \varepsilon^2} = \frac{k}{2|E|}$$

$$b = \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} = \frac{l}{\sqrt{2\mu|E|}}$$

$$\left. \begin{aligned} r_{\min} &= a(1 - \varepsilon) = \frac{\alpha}{1 + \varepsilon} \\ r_{\max} &= a(1 + \varepsilon) = \frac{\alpha}{1 - \varepsilon} \end{aligned} \right\}$$

좌표의 원점을 초점에 두지 않고 타원의 중심에 놓으면,
직교 좌표계를 사용해서 기술할 수 있습니다.
이 때, 장축과 단축 및 좌표의 지점들을 계산할 수 있습니다.



$$\int_0^\tau dt = \frac{2\mu}{l} \int_0^A dA$$

$$\tau = \frac{2\mu}{l} A$$

$$\tau = \frac{2\mu}{l} \cdot \pi ab = \frac{2\mu}{l} \cdot \pi \cdot \frac{k}{2|E|} \cdot \frac{l}{\sqrt{2\mu|E|}}$$

$$= \pi k \sqrt{\frac{\mu}{2}} \cdot |E|^{-3/2}$$

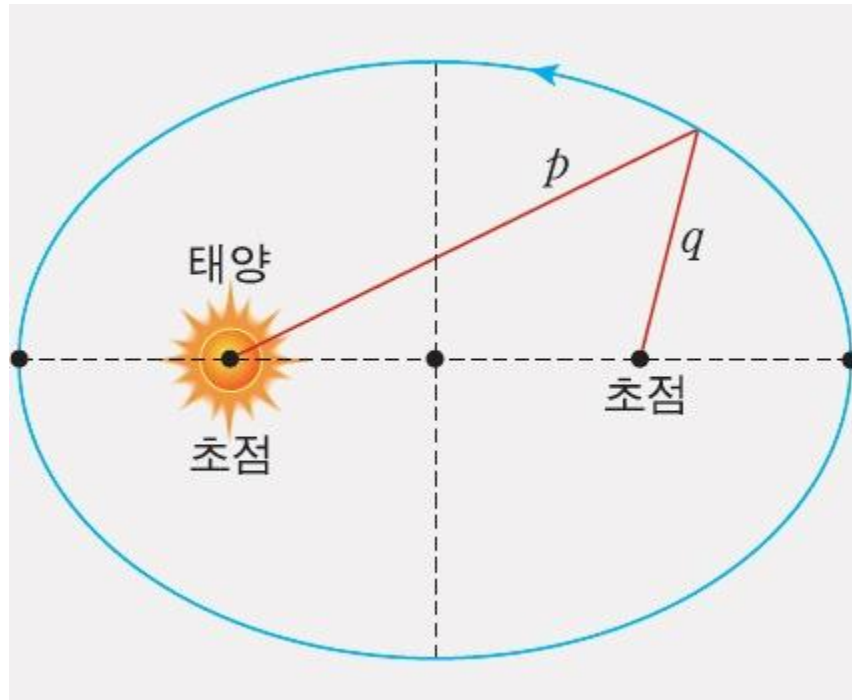
입자가 한 주기 운동을 하면
타원의 면적과 주기는 서로 비례하게 됩니다.
타원의 면적을 물리량으로 바꾸면
주기와 장축 사이의 관계를 얻게 됩니다.

$$\tau^2 = \frac{4\pi^2\mu}{k}a^3$$

$$\tau^2 = \frac{4\pi^2a^3}{G(m_1 + m_2)} \cong \frac{4\pi^2a^3}{Gm_2}, \quad m_1 \ll m_2$$

이것이 바로 케플러 제3법칙입니다.
 다만, 이 법칙은 환산 질량에 의존하므로
 질량이 큰 행성에 대해서는 잘 맞지 않을 수 있습니다.

우리는 포물체 운동을 계산할 때 사용했던 방법을 사용해서
뉴턴의 만유 인력의 법칙이
케플러의 세 법칙을 설명해준다는 것을
확인할 수 있습니다.



$$a_x = - \frac{kx}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

$$a_y = - \frac{ky}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

케플러의 첫 번째 법칙을 확인해 봅시다.
 포물체 운동의 경우와 달라지는 점이 있다면,
 가속도가 위치에 따라 달라진다는 점이 되겠습니다.
 사실 이 부분만 제외하면 나머지는 근본적으로 다르지 않습니다.

시간 (t)	위치 (x)	위치 (y)	속력 (v_x)	속력 (v_y)	가속도 (a_x)	가속도 (a_y)
A	Bx	By	Cx	Cy	Dx	Dy
E	Fx	Fy	Gx	Gy	Hx	Hy

수치적인 계산을 통해
실제로 타원 궤도가 얻어지는지를 살펴봅시다.

$$-\frac{cx}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

시간 (t)	위치 (x)	위치 (y)	속력 (v _x)	속력 (v _y)	가속도 (a _x)	가속도 (a _y)
A	Bx	By	Cx	Cy	Dx	Dy
E	Fx	Fy	Gx	Gy	Hx	Hy

수치적인 계산을 통해
실제로 타원 궤도가 얻어지는지를 살펴봅시다.

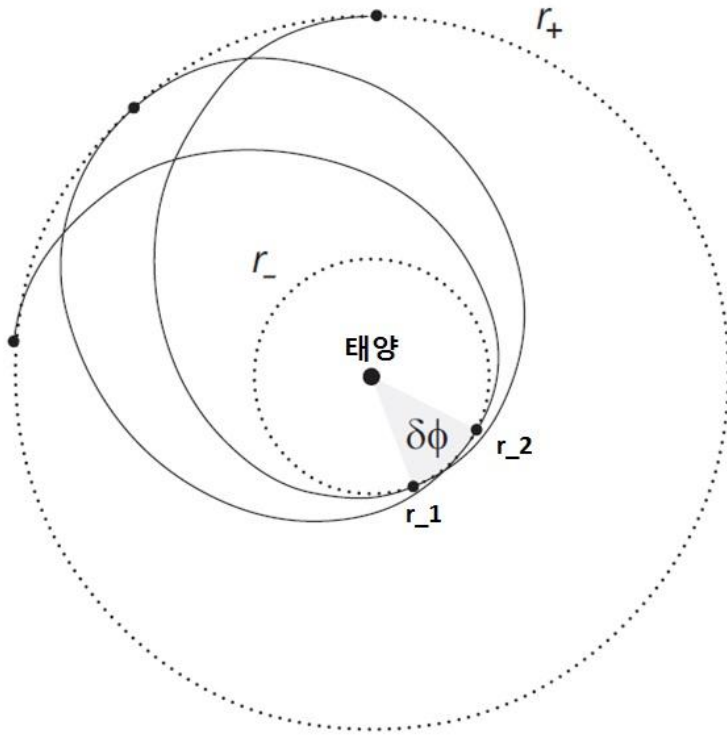
이 만유인력에 수정이 생기면
어떤 효과가 있을지에 대해서 살펴봅시다.

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{Gm^2M}{l^2} + \frac{3GM}{c^2}u^2$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\alpha} &\equiv \frac{Gm^2M}{l^2} \\ \delta &\equiv \frac{3GM}{c^2} \end{aligned} \right\}$$

$$u_{\text{secular}} \cong \frac{1}{\alpha} \left[1 + \varepsilon \cos \left(\theta - \frac{\delta}{\alpha} \theta \right) \right]$$

예를 들어, 일반 상대성 이론에서는
위와 같은 수정 항이 존재해야 함이 알려져 있습니다.
이 식을 섭동적으로 풀고 한 주기 운동을 고려하면,
타원 궤도가 완전히 닫히지 않음을 알 수 있습니다.



$$\Delta \cong \frac{6\pi GM}{ac^2(1 - \varepsilon^2)}$$

이러한 현상을 근일점 이동이라고 합니다.
수성의 근일점 이동은 일반 상대성 이론에 대한
한 가지 중요한 증거가 됩니다.

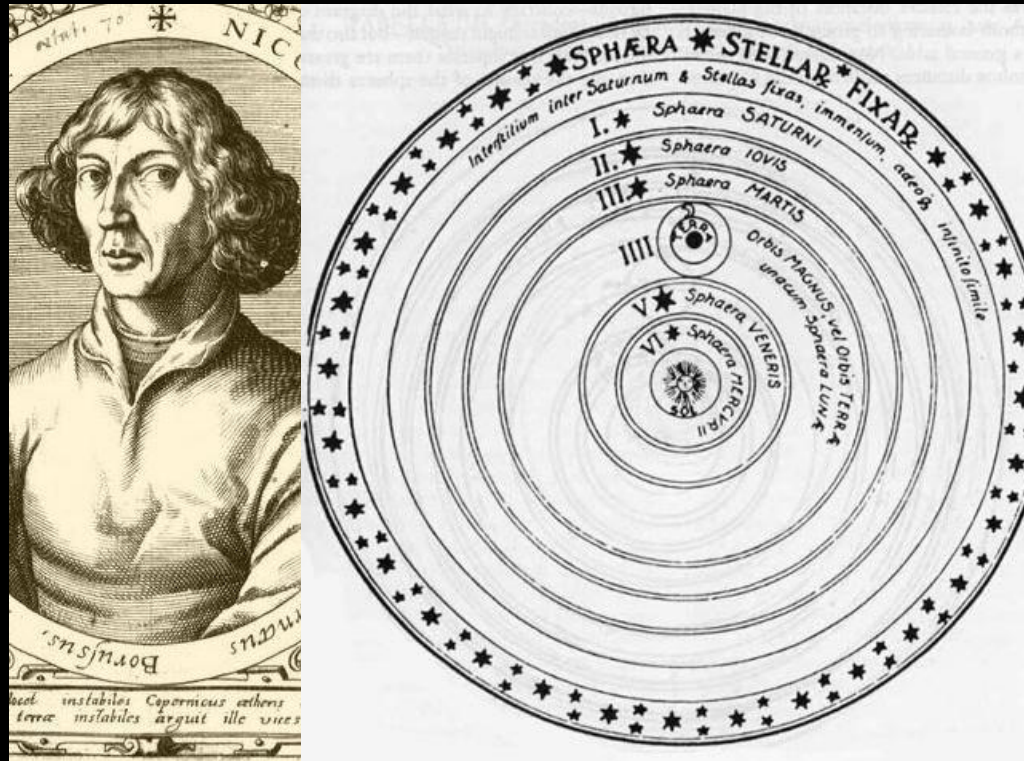
이제 뉴턴과 데카르트 사이의 흥미로운 논쟁을
되짚어봅시다.



Schema huius præmissæ diuisionis Sphærarum .



천체의 규칙적인 운동은 고대로부터 중요한 연구 주제였습니다.
전통적으로 **지구를 중심에 두는 관점**이
사람들에게 잘 알려졌습니다.

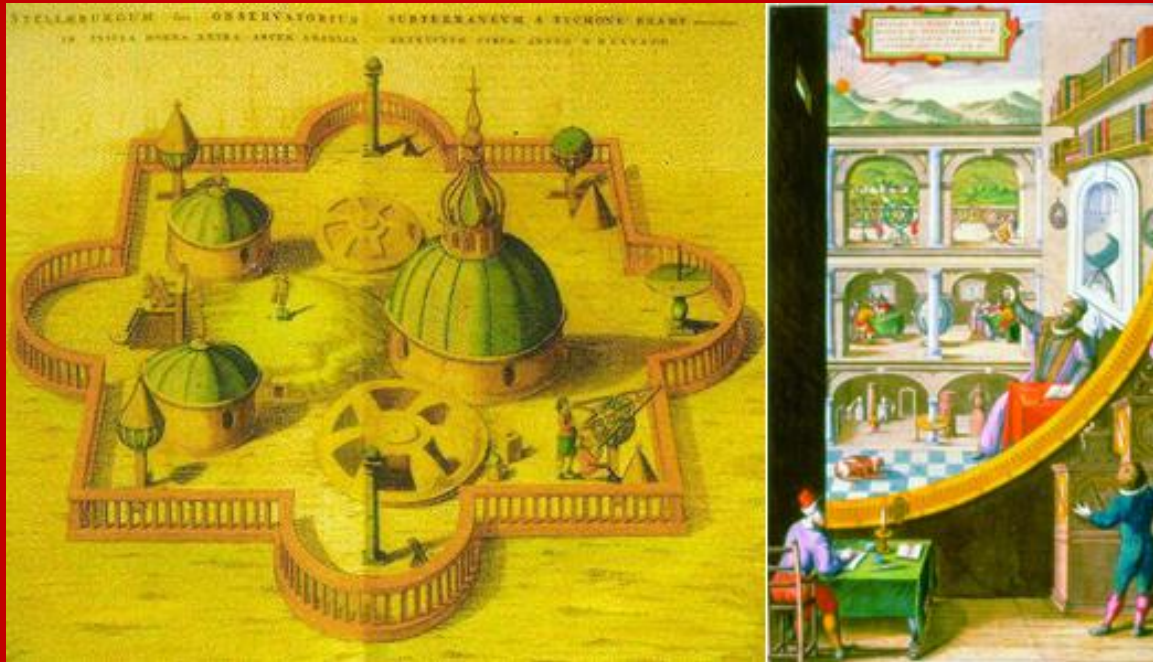


그러나 행성들의 불규칙적인 운동을 이해하기 위해서
지구가 아니라 **태양을 중심에 두는 관점**이
새롭게 등장하게 됩니다.

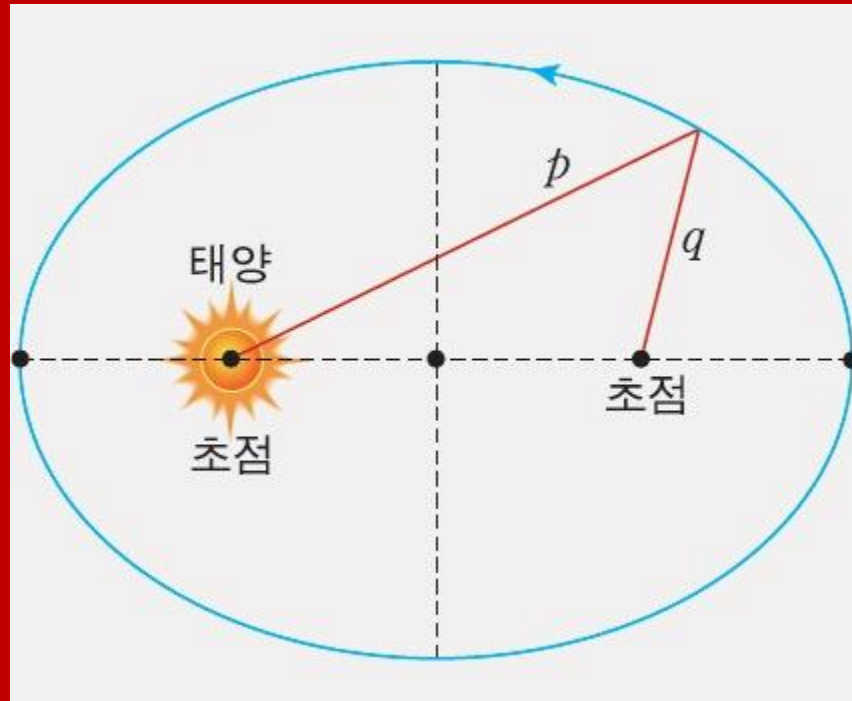


브루노는 태양 중심설을 주장하다가 화형을 당했고,
갈릴레이는 종교 재판을 받았으며,
데카르트는 저술한 저작을 출판하지 않았습니다.

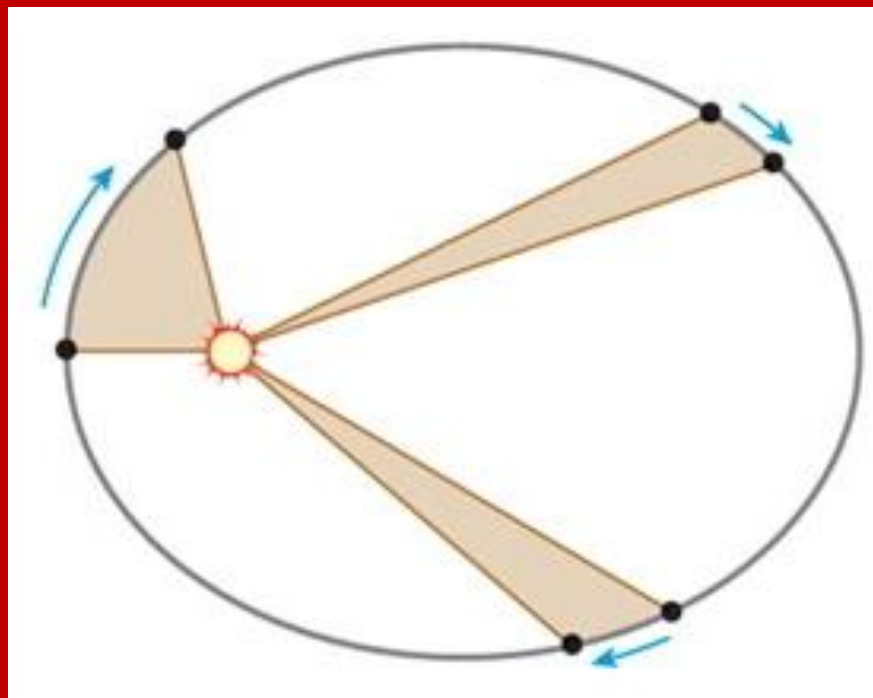
어떤 관점이 옳을 것인지에 대한 답은
결국 자세한 관측이 결정해줄 것입니다.



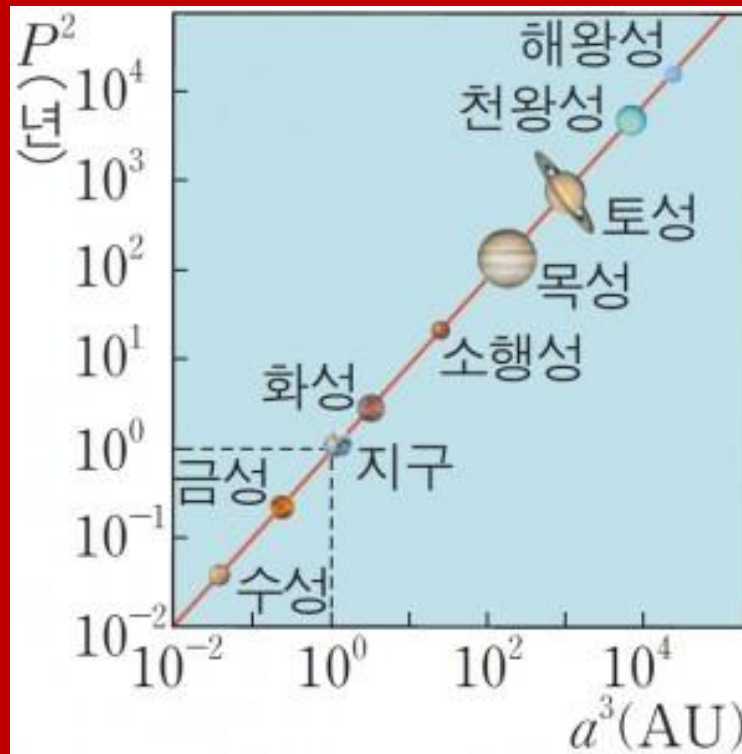
티코 브라헤는 자신의 천문대에서 행성의 운동에 대한
아주 정교한 관측을 진행했습니다.
그 자료를 분석한 **케플러**는 다음과 같은 세 가지
현상적 법칙을 발표합니다.



첫째, 모든 행성은 태양을 초점으로 하는
타원 궤도를 따라 움직인다.

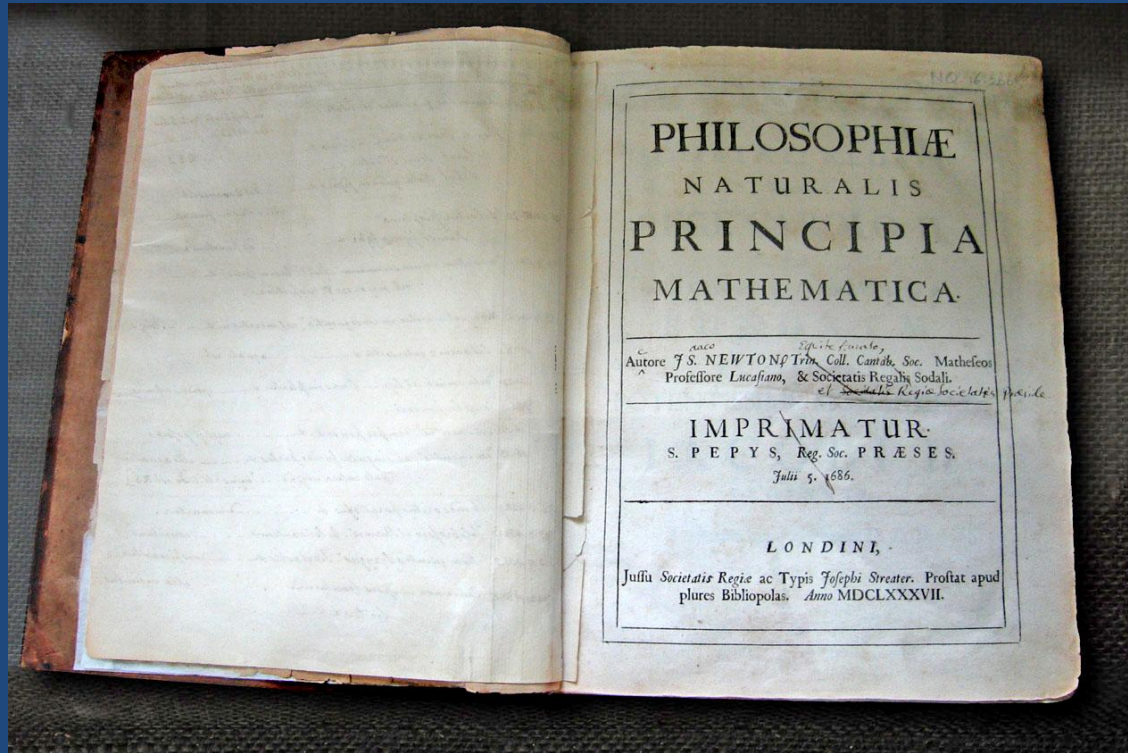


둘째, 행성과 태양을 연결하는 선분이
쓸고 지나가는 단위 시간당 면적은 일정하다.



셋째, 행성 주기의 제곱은
행성 궤도 장축의 세제곱에 비례한다.

뉴턴은 이 세 가지 경험 법칙을
이론적으로 설명할 수 있는 방법을 찾아냅니다.



뉴턴은 “자연 철학의 수학적 원리”라는 책에서
운동의 법칙과 함께 만유인력의 법칙을 도입하여
케플러의 세 가지 법칙을 이론적으로 설명합니다.

$$\vec{F} = - \frac{GMm}{r^2} \hat{r}$$

뉴턴의 설명의 핵심은
지상과 천상에 존재하는 모든 물체 사이에는
거리의 제곱에 반비례하는 인력이 존재한다는 것에 있습니다.



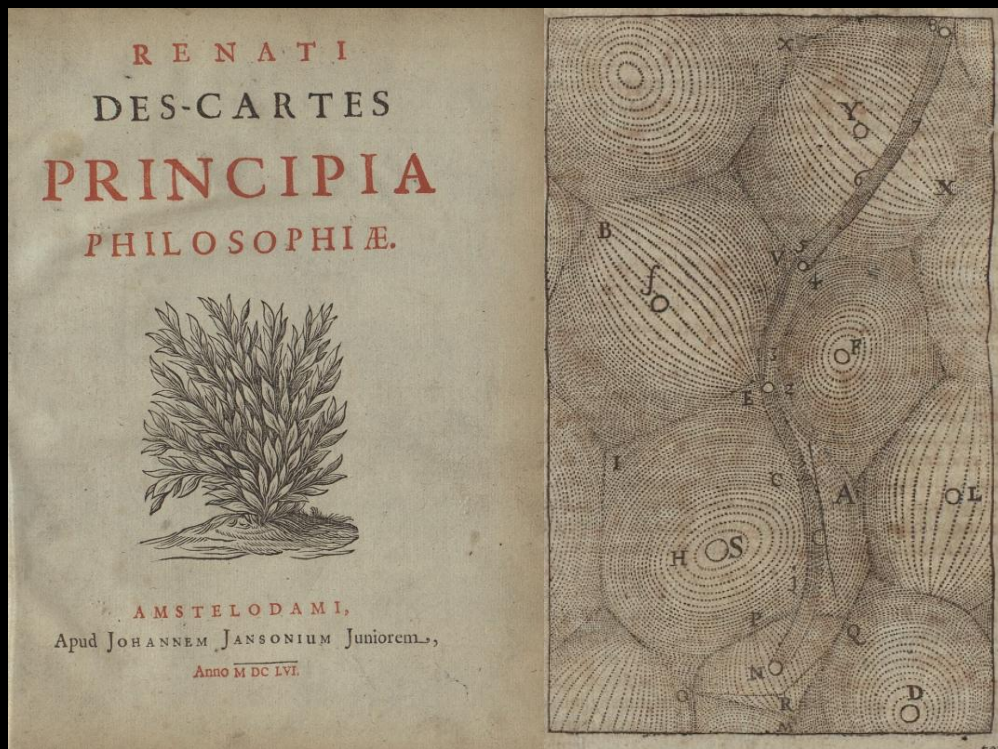
사실 뉴턴은 이 내용들을 전부터 잘 알고 있었지만
학계에 출간을 하지는 않던 상태였습니다.
이 내용들을 동료였던 핼리의 설득에 의해
책으로 출간하게 됩니다.

뉴턴의 설명은 성공적이었지만
당대의 학자들이 모두 이것을 받아들였던 것은 아닙니다.
예를 들면, 데카르트주의자들은
뉴턴과 논쟁을 하게 됩니다.

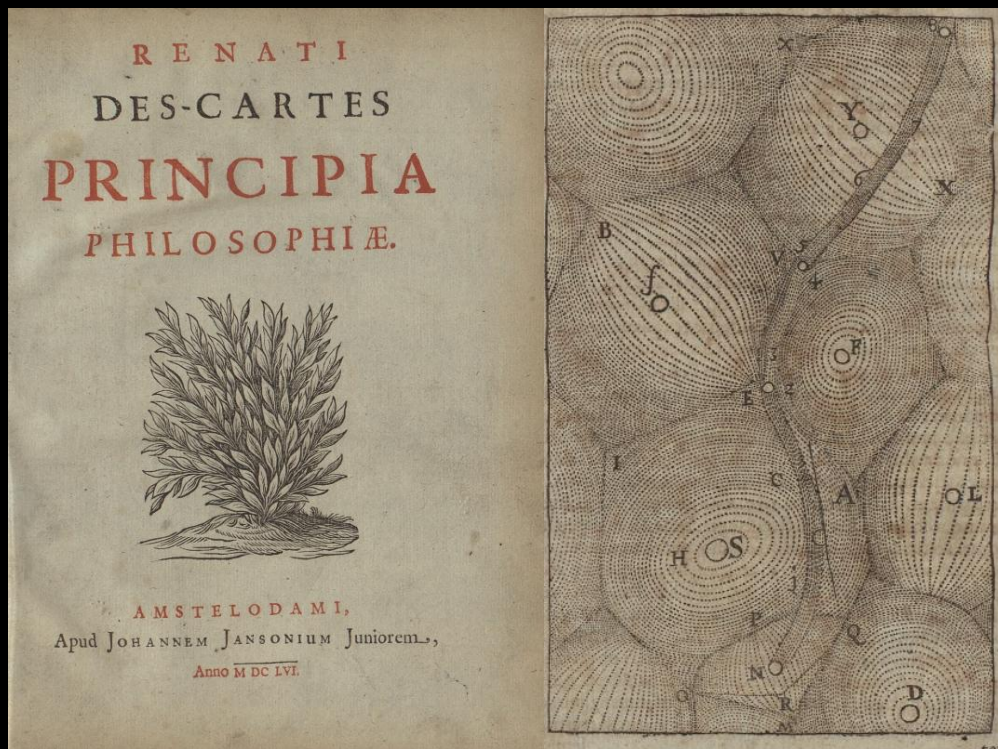
어떤 문제가 뉴턴에게 있었던 것일까요?

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2} \hat{r}$$

데카르트주의자들이 가장 중요하게 지적했던 문제는
뉴턴의 중력은 마치 **원격 작용**처럼 생각되었기 때문입니다.
두 물체 사이에 매개하는 존재가 없는데도
어떻게 그 힘이 전달될 것인가에 대해 질문을 할 수 있습니다.



데카르트는 천체의 운동을 기술하기 위해
원격 작용과 대비되는 국소적 작용을 도입합니다.
이 국소적 작용은 진공처럼 보이는 부분에 채워진
물질들의 소용돌이에 의해 전달됩니다.



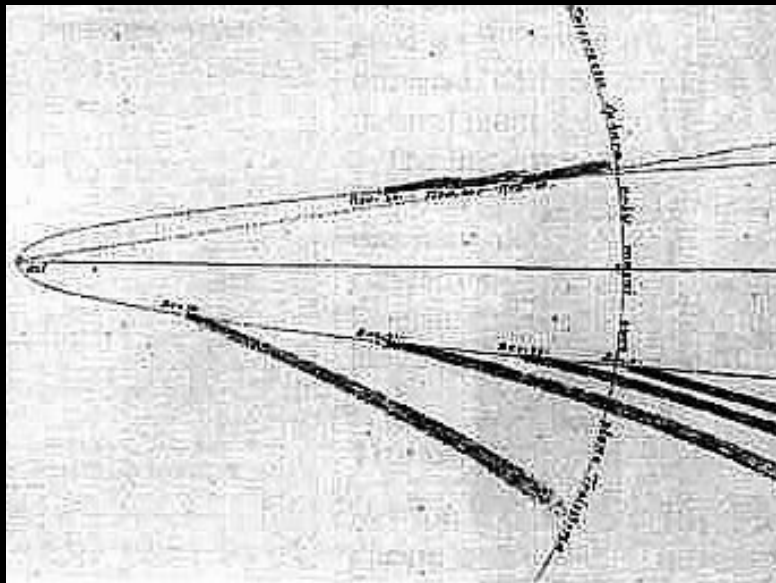
데카르트의 소용돌이 이론은 나름대로 강력한 설명력을 가집니다.
행성들이 타원 궤도를 따라 도는 것도 설명할 수 있고,
태양과 행성 모두 움직이지 않지만(즉, 지동설과 천동설을 동시에 지지하지만)
천체가 회전한다는 것도 설명할 수 있습니다.



더 나아가서 어떤 종류의 물체들은
한 소용돌이에서 다른 소용돌이로 건너올 수 있습니다.
이것들을 통해 데카르트는 **혜성**을 설명할 수 있었습니다.

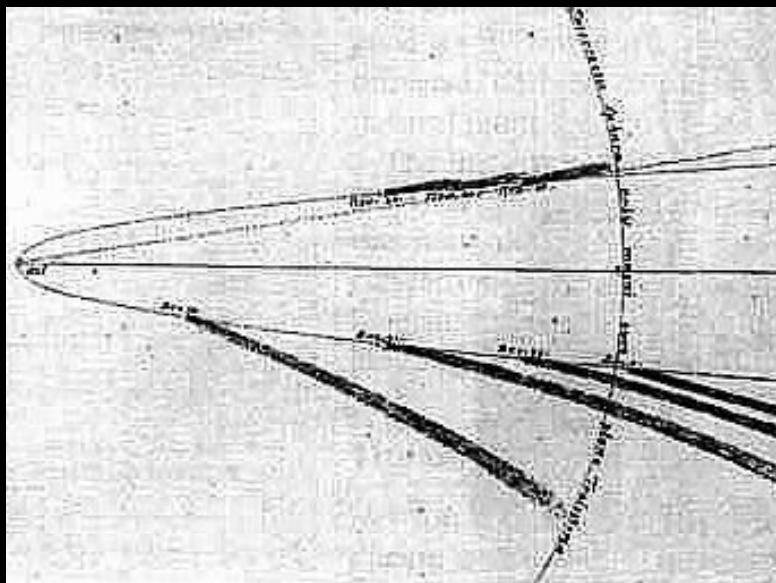


따라서 혜성은 특정 소용돌이에 소속되지 않으므로
그 궤적이 불규칙하게 될 것입니다.



한 편, 뉴턴은 데카르트의 소용돌이 이론을 논박하기 위해
혜성의 궤적을 연구합니다.

뉴턴의 계산과 실제 관찰을 비교해보면,
혜성은 아주 길쭉한 타원 궤도를 따라 운동해야 합니다.



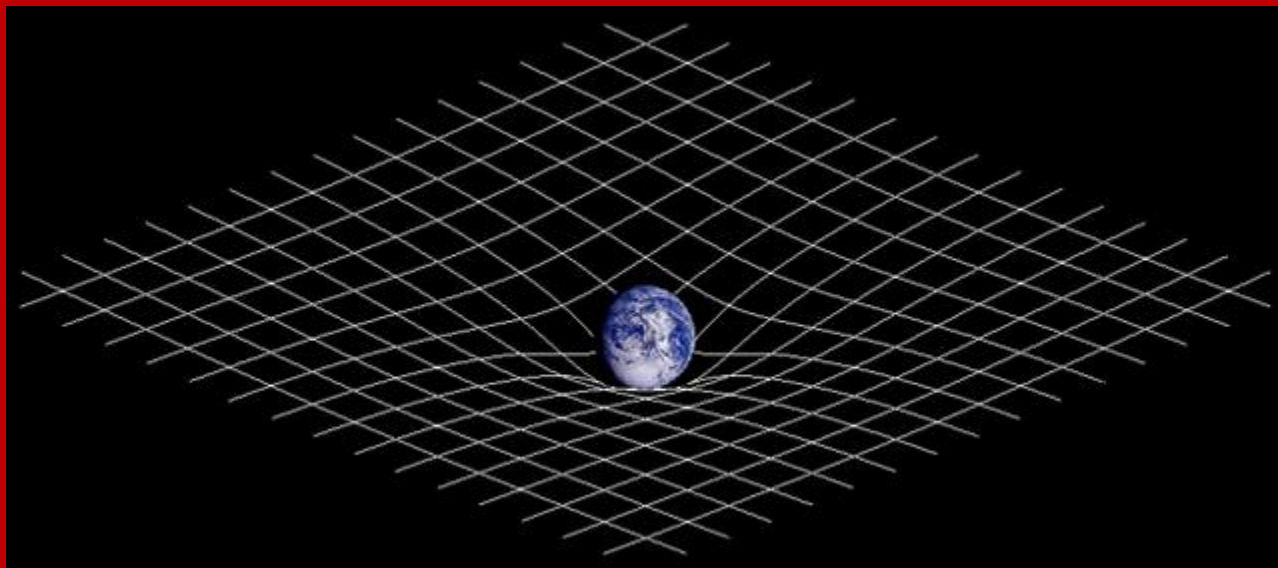
이것은 소용돌이 이론과는 부합하지 않습니다.
혜성이 길쭉한 타원 궤도를 따른다는 말은
혜성이 소용돌이들을 거슬러서
규칙적인 운동을 한다는 뜻이기 때문입니다.

	데카르트	뉴턴
지동설 vs. 천동설	중립	지동설
공간/진공	공간/진공은 제3의 물질이 채우고 있음. 천체는 공간을 채우고 있는 물질들에 의해 운동함.	절대 공간이 운동의 절대적 기준이 됨.
중력의 전달	물질들의 국소적 작용으로 설명할 수 있음.	원격 작용을 필요로 함.

역사적 승자는 누구일까요?
저는 케플러의 법칙을 정량적으로 설명한 뉴턴이
이 대결의 승자라고 생각합니다.

	데카르트	뉴턴
지동설 vs. 천동설	중립	지동설
공간/진공	공간/진공은 제3의 물질이 채우고 있음. 천체는 공간을 채우고 있는 물질들에 의해 운동함.	절대 공간이 운동의 절대적 기준이 됨.
중력의 전달	물질들의 국소적 작용으로 설명할 수 있음.	원격 작용을 필요로 함.

그러나 원격 작용에 의해 중력이 매개된다는 관점은 여전히 우리에게 불편함으로 남습니다.



이 곡소성의 문제는 결국
아인슈타인의 일반 상대성 이론에 의해 해결됩니다.

	데카르트	아인슈타인
지동설 vs. 천동설	중립	중립
공간/진공	공간/진공은 제3의 물질이 채우고 있음. 천체는 공간을 채우고 있는 물질들에 의해 운동함.	공간/진공은 장이 채우고 있음. 장의 변화를 따라서 입자들이 운동함.
중력의 전달	물질들의 국소적 작용으로 설명할 수 있음.	물질들의 국소적 작용으로 설명할 수 있음.

아인슈타인은 시공간이 중력장으로 채워져 있으며,
이 장의 국소적 운동에 의해 중력이 전달된다고 생각했습니다.
어쩌면 데카르트의 관점이 오히려 아인슈타인의 생각에
좀 더 가까웠던 것인지도 모르겠습니다.

그리고 우주의 중심은 어디에 있을까요?
일반 상대성 이론은 자연 법칙이 좌표의 설정과
무관해야 한다고 말합니다.

따라서 뉴턴 역학에서는
태양을 중심으로하는 관성 좌표계를 잡아야만 하지만
일반 상대론에서는
지구를 중심으로하는 비관성 좌표계를 잡아도
대등한 기술이 가능하다는 것입니다.

예전에 프로이트는 인류가 과학에 의해
세 번 모욕을 당했다고 말했습니다.
그 중의 첫째는 지구가 우주의 중심이 아니라는 것입니다.

그러나 좀 더 옹계 말한다면
지구를 우주의 중심으로 놓아도
틀리지 않다고 말할 수 있겠습니다.

감사합니다