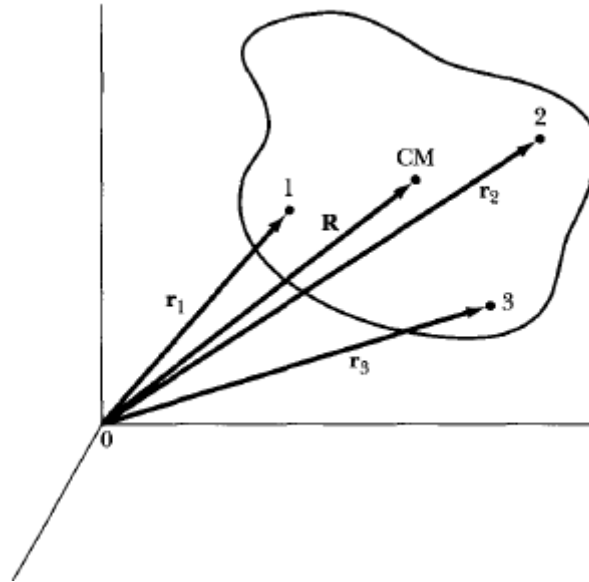


9장

입자계의 동역학

지금까지는 단일 입자에 대한 동역학을 살펴보았다면,
이제부터는 여러 입자들에 대한 문제로 확장해보겠습니다.

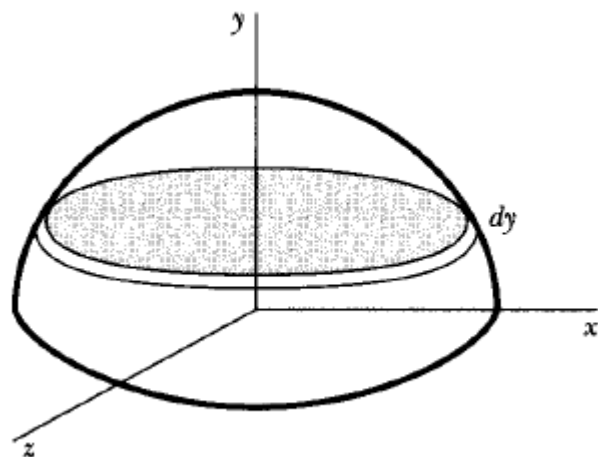
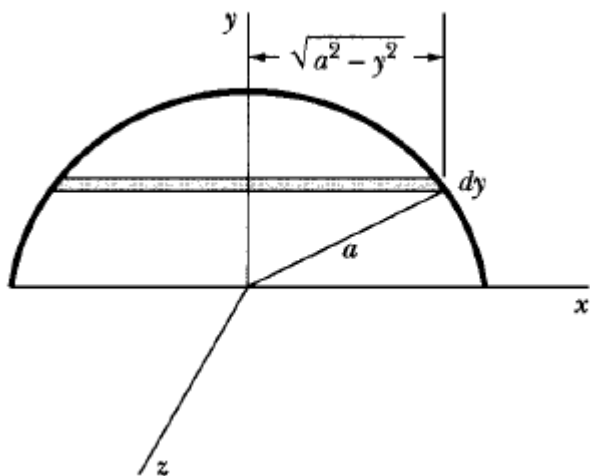
입자계의 문제를 다룰 때
우리가 가장 먼저 알아보아야 할 일은 무엇일까요?



$$M = \sum_{\alpha} m_{\alpha}$$

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha}$$

그것은 바로 **질량 중심**을 찾는 것입니다.
 이것이 왜 중요한지를 보기 전에,
 먼저 질량 중심을 계산하는 연습을 해 봅시다.



$$X = \frac{1}{M} \int_{-a}^a x \, dm$$

$$Z = \frac{1}{M} \int_{-a}^a z \, dm$$

예제 9.1

질량 중심에 대해서는 놀랍게도
선운동량, 각운동량, 에너지 등이 잘 정의됩니다.
자세하게 한 번 살펴 봅시다.

$$m_{\alpha} \ddot{\mathbf{r}}_{\alpha} = \mathbf{F}_{\alpha}^{(e)} + \underbrace{\mathbf{f}_{\alpha}}_{\text{내력}}$$

$$\mathbf{f}_{\alpha} = \sum_{\beta} \mathbf{f}_{\alpha\beta}$$

외력이 없다면 질량 중심의 선운동량이 보존됩니다.

$$m_{\alpha} \ddot{\mathbf{r}}_{\alpha} = \mathbf{F}_{\alpha}^{(e)} + \underline{\mathbf{f}_{\alpha}}$$

외력 내력

$$\mathbf{f}_{\alpha} = \sum_{\beta} \mathbf{f}_{\alpha\beta}$$

$$\mathbf{f}_{\alpha\beta} = -\mathbf{f}_{\beta\alpha} \quad \text{뉴턴의 제3법칙}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} = \sum_{\alpha} \mathbf{F}_{\alpha}^{(e)} + \sum_{\substack{\alpha \quad \beta \\ \alpha \neq \beta}} \mathbf{f}_{\alpha\beta}$$

$$\equiv \mathbf{F} \quad = \sum_{\alpha < \beta} (\mathbf{f}_{\alpha\beta} + \mathbf{f}_{\beta\alpha})$$

외력이 없다면 질량 중심의 선운동량이 보존됩니다.

$$m_{\alpha} \ddot{\mathbf{r}}_{\alpha} = \mathbf{F}_{\alpha}^{(e)} + \underbrace{\mathbf{f}_{\alpha}}_{\text{외력} \quad \text{내력}} \quad \boxed{\mathbf{f}_{\alpha} = \sum_{\beta} \mathbf{f}_{\alpha\beta}}$$

$$\mathbf{f}_{\alpha\beta} = -\mathbf{f}_{\beta\alpha} \quad \text{뉴턴의 제3법칙}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} = \sum_{\alpha} \mathbf{F}_{\alpha}^{(e)} + \sum_{\substack{\alpha \quad \beta \\ \alpha \neq \beta}} \mathbf{f}_{\alpha\beta}$$

$$\boxed{\equiv \mathbf{F}} \quad \boxed{= \sum_{\alpha < \beta} (\mathbf{f}_{\alpha\beta} + \mathbf{f}_{\beta\alpha})}$$

$$\boxed{M \ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{F}}$$

질량 중심의 병진 운동에 대한 방정식

외력이 없다면 질량 중심의 선운동량이 보존됩니다.

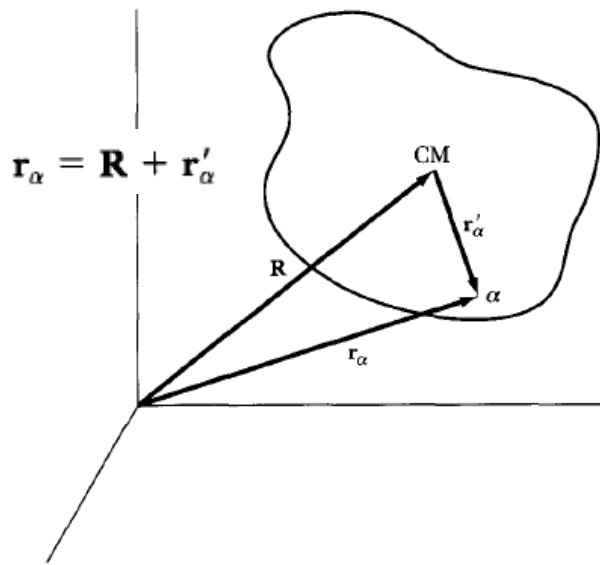
$$\mathbf{P} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \dot{\mathbf{r}}_{\alpha} = \frac{d}{dt} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} = \frac{d}{dt} (M \mathbf{R}) = M \dot{\mathbf{R}}$$

$$\dot{\mathbf{P}} = M \ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{F}$$

외력이 없다면 질량 중심의 선운동량이 보존됩니다.

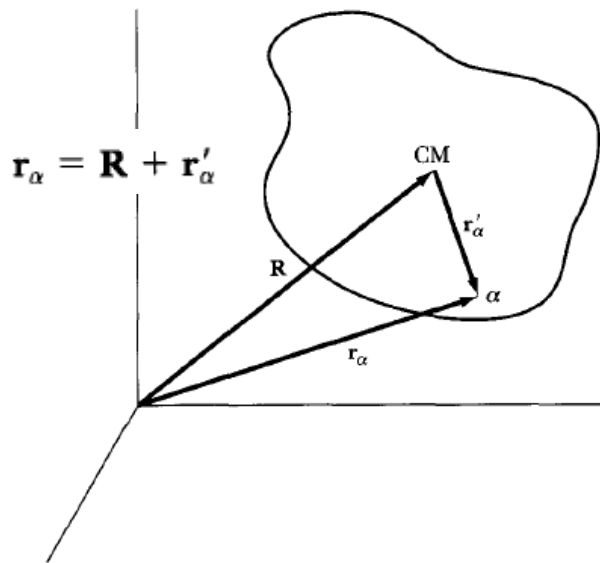


외력이 없다면 질량 중심의 선운동량이 보존됩니다.



$$\begin{aligned}
 \mathbf{L} &= \sum_{\alpha} \mathbf{L}_{\alpha} = \sum_{\alpha} (\mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{p}_{\alpha}) = \sum_{\alpha} (\mathbf{r}_{\alpha} \times m_{\alpha} \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}) \\
 &= \sum_{\alpha} (\mathbf{r}'_{\alpha} + \mathbf{R}) \times m_{\alpha} (\dot{\mathbf{r}}'_{\alpha} + \dot{\mathbf{R}}) \\
 &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} [(\mathbf{r}'_{\alpha} \times \dot{\mathbf{r}}'_{\alpha}) + \underbrace{(\mathbf{r}'_{\alpha} \times \dot{\mathbf{R}})}_{=0} + \underbrace{(\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{r}}'_{\alpha})}_{=0} + (\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}})]
 \end{aligned}$$

외력에 의한 토크가 없다면
질량 중심의 각운동량이 보존됩니다.

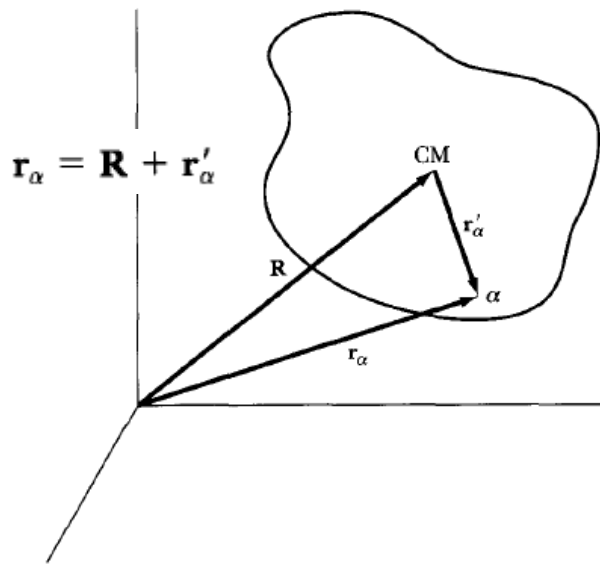


$$\begin{aligned}
 \mathbf{L} &= \sum_{\alpha} \mathbf{L}_{\alpha} = \sum_{\alpha} (\mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{p}_{\alpha}) = \sum_{\alpha} (\mathbf{r}_{\alpha} \times m_{\alpha} \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}) \\
 &= \sum_{\alpha} (\mathbf{r}'_{\alpha} + \mathbf{R}) \times m_{\alpha} (\dot{\mathbf{r}}'_{\alpha} + \dot{\mathbf{R}}) \\
 &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} [(\mathbf{r}'_{\alpha} \times \dot{\mathbf{r}}'_{\alpha}) + (\mathbf{r}'_{\alpha} \times \dot{\mathbf{R}}) + (\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{r}}'_{\alpha}) + (\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}})] \\
 &= 0 \\
 &= M \mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}} + \sum_{\alpha} \mathbf{r}'_{\alpha} \times \mathbf{p}'_{\alpha} \\
 &= \mathbf{R} \times \mathbf{P} + \sum_{\alpha} \mathbf{r}'_{\alpha} \times \mathbf{p}'_{\alpha}
 \end{aligned}$$

질량 중심의
각운동량

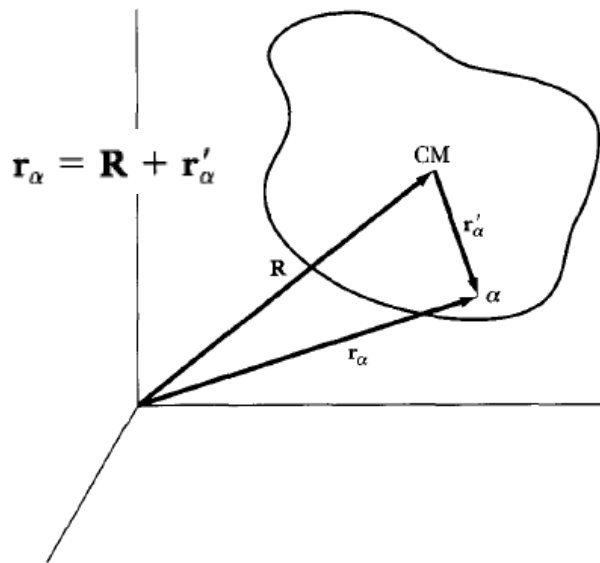
질량 중심 주변의
상대적 각운동량

외력에 의한 토크가 없다면
질량 중심의 각운동량이 보존됩니다.



$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{L}} &= \sum_{\alpha} \dot{\mathbf{L}}_{\alpha} = \sum_{\alpha} (\mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{F}_{\alpha}^{(e)}) + \sum_{\alpha, \beta \neq \alpha} (\mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{f}_{\alpha\beta}) \\
 &= \sum_{\alpha} (\mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{F}_{\alpha}^{(e)}) + \sum_{\alpha < \beta} [(\mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{f}_{\alpha\beta}) + (\mathbf{r}_{\beta} \times \mathbf{f}_{\beta\alpha})] \\
 &\quad \boxed{\mathbf{f}_{\alpha\beta} = -\mathbf{f}_{\beta\alpha}} \\
 &= \sum_{\alpha} (\mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{F}_{\alpha}^{(e)}) + \sum_{\alpha < \beta} (\mathbf{r}_{\alpha} - \mathbf{r}_{\beta}) \times \mathbf{f}_{\alpha\beta}
 \end{aligned}$$

외력에 의한 토크가 없다면
질량 중심의 각운동량이 보존됩니다.



$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{L}} &= \sum_{\alpha} \dot{\mathbf{L}}_{\alpha} = \sum_{\alpha} (\mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{F}_{\alpha}^{(e)}) + \sum_{\alpha, \beta \neq \alpha} (\mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{f}_{\alpha\beta}) \\
 &= \sum_{\alpha} (\mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{F}_{\alpha}^{(e)}) + \sum_{\alpha < \beta} [(\mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{f}_{\alpha\beta}) + (\mathbf{r}_{\beta} \times \mathbf{f}_{\beta\alpha})] \\
 &\quad \boxed{\mathbf{f}_{\alpha\beta} = -\mathbf{f}_{\beta\alpha}} \\
 &= \sum_{\alpha} (\mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{F}_{\alpha}^{(e)}) + \sum_{\alpha < \beta} (\mathbf{r}_{\alpha} - \mathbf{r}_{\beta}) \times \mathbf{f}_{\alpha\beta} \\
 &\quad \text{중심력을 가정} \\
 &= \sum_{\alpha} [\mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{F}_{\alpha}^{(e)}] \\
 &= \sum_{\alpha} \mathbf{N}_{\alpha}^{(e)} = \mathbf{N}^{(e)}
 \end{aligned}$$

외력에 의한 토크가 없다면
질량 중심의 각운동량이 보존됩니다.

$$\dot{\mathbf{r}}_\alpha = \dot{\mathbf{r}}'_\alpha + \dot{\mathbf{R}}$$

$$T = \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2$$

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}}_\alpha \cdot \dot{\mathbf{r}}_\alpha &= v_\alpha^2 = (\dot{\mathbf{r}}'_\alpha + \dot{\mathbf{R}}) \cdot (\dot{\mathbf{r}}'_\alpha + \dot{\mathbf{R}}) \\ &= (\dot{\mathbf{r}}'_\alpha \cdot \dot{\mathbf{r}}'_\alpha) + 2(\dot{\mathbf{r}}'_\alpha \cdot \dot{\mathbf{R}}) + (\dot{\mathbf{R}} \cdot \dot{\mathbf{R}}) \\ &= v_\alpha'^2 + 2(\dot{\mathbf{r}}'_\alpha \cdot \dot{\mathbf{R}}) + V^2\end{aligned}$$

$$= \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha'^2 + \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha V^2 + \dot{\mathbf{R}} \cdot \frac{d}{dt} \sum_\alpha m_\alpha \mathbf{r}'_\alpha$$

질량 중심에서 0이 됨

$$= \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha'^2 + \frac{1}{2} M V^2$$

질량 중심에 대한
상대적 운동 에너지

질량 중심의
병진 운동 에너지

에너지는 질량 중심의 병진 운동에 대한 에너지와
질량 중심에 대한 상대적 에너지의 둘로 나뉘게 됩니다.

$$\begin{aligned}
W_{12} &= \sum_{\alpha} \int_1^2 \mathbf{F}_{\alpha} \cdot d\mathbf{r}_{\alpha} \\
&= \sum_{\alpha} \int_1^2 \mathbf{F}_{\alpha}^{(e)} \cdot d\mathbf{r}_{\alpha} + \sum_{\alpha, \beta \neq \alpha} \int_1^2 \mathbf{f}_{\alpha\beta} \cdot d\mathbf{r}_{\alpha} \\
&= -\sum_{\alpha} U_{\alpha} \Big|_1^2 + \sum_{\alpha < \beta} \int_1^2 (\mathbf{f}_{\alpha\beta} \cdot d\mathbf{r}_{\alpha} + \mathbf{f}_{\beta\alpha} \cdot d\mathbf{r}_{\beta}) \\
&= -\sum_{\alpha} U_{\alpha} \Big|_1^2 + \sum_{\alpha < \beta} \int_1^2 \mathbf{f}_{\alpha\beta} \cdot (d\mathbf{r}_{\alpha} - d\mathbf{r}_{\beta}) \\
&= -\sum_{\alpha} U_{\alpha} \Big|_1^2 + \sum_{\alpha < \beta} \int_1^2 \mathbf{f}_{\alpha\beta} \cdot d\mathbf{r}_{\alpha\beta} \\
&= \underbrace{-\sum_{\alpha} U_{\alpha} \Big|_1^2}_{\text{내부 퍼텐셜 에너지}} - \sum_{\alpha < \beta} \bar{U}_{\alpha\beta} \Big|_1^2
\end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{F}_{\alpha}^{(e)} &= -\nabla_{\alpha} U_{\alpha} \\ \mathbf{f}_{\alpha\beta} &= -\nabla_{\alpha} \bar{U}_{\alpha\beta} \end{aligned} \right\}$$

에너지는 질량 중심의 병진 운동에 대한 에너지와 질량 중심에 대한 상대적 에너지의 둘로 나뉘게 됩니다.

$$U = \sum_{\alpha} U_{\alpha} + \sum_{\alpha < \beta} \bar{U}_{\alpha\beta}$$

$$T_1 + U_1 = T_2 + U_2$$

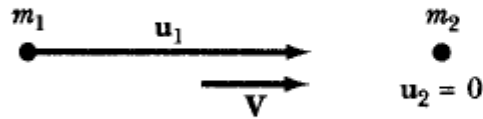
보존력장의 경우에 대한 에너지 보존

에너지는 질량 중심의 병진 운동에 대한 에너지와
질량 중심에 대한 상대적 에너지의 둘로 나뉘게 됩니다.

따라서 질량 중심에 대한 병진 운동과
질량 중심에 대한 상대적 운동을 분리해서 보는 것이
많은 경우 유용하게 됩니다.

이러한 유용함을 살펴볼 수 있는 좋은 예가
바로 **충돌** 및 **산란**에 대한 것입니다.

Laboratory System

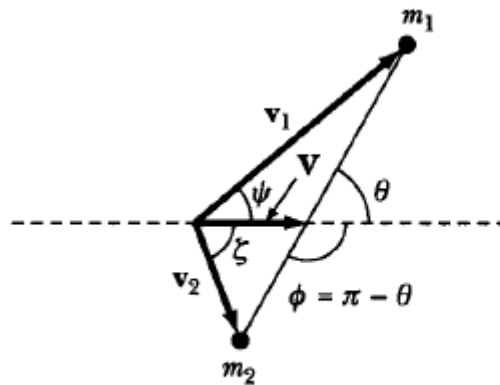


(a) Initial condition

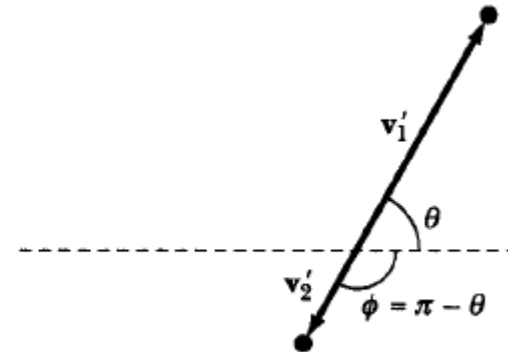
Center-of-Mass System



(b) Initial condition



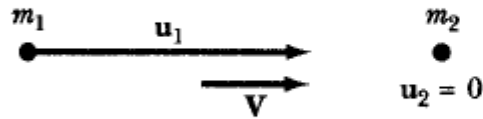
(c) Final condition



(d) Final condition

위와 같은 충돌 문제를 생각해 봅시다.
특히 정지해있는 타겟에 입사한 물체가
탄성 충돌하는 경우를 생각해 봅시다.

Laboratory System

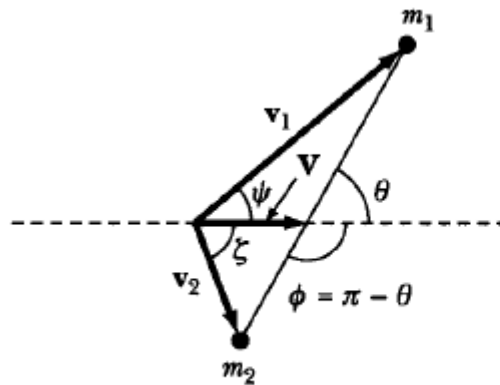


(a) Initial condition

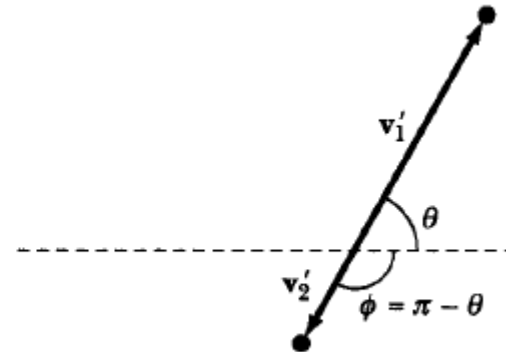
Center-of-Mass System



(b) Initial condition



(c) Final condition



(d) Final condition

이 문제를 단순화하기 위해서는 실험실 계가 아니라
질량 중심 계에서 보는 것이 좋습니다.

실험실 계

$$m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 = M \mathbf{R}$$

$$m_1 \mathbf{u}_1 + m_2 \mathbf{u}_2 = M \mathbf{V}$$

$$\mathbf{V} = \frac{m_1 \mathbf{u}_1}{m_1 + m_2}$$

두 번째 타겟은 정지해 있었으므로

질량 중심 계

$$\mathbf{u}'_2 = -\mathbf{V}$$

$$u'_2 = V = \frac{m_1 u_1}{m_1 + m_2}$$

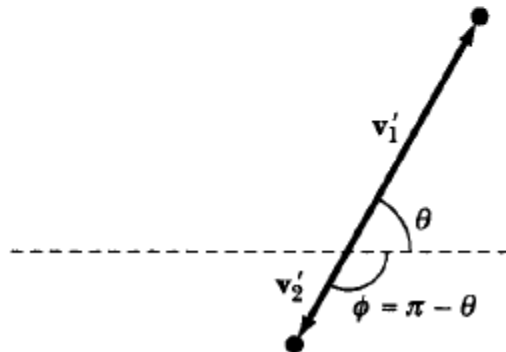
이 문제를 단순화하기 위해서는 실험실 계가 아니라
질량 중심 계에서 보는 것이 좋습니다.

Center-of-Mass System



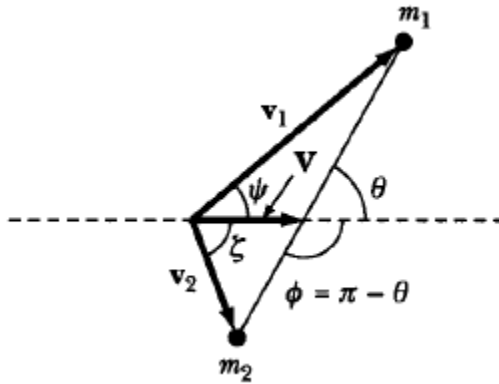
(b) Initial condition

$$u'_1 = v'_1, \quad u'_2 = v'_2$$



(d) Final condition

탄성 충돌의 경우, 운동량과 에너지가 모두 보존됩니다.
따라서 질량 중심 계에서는 속력이 바뀌지 않습니다.
다만 그 방향만 바뀝니다.

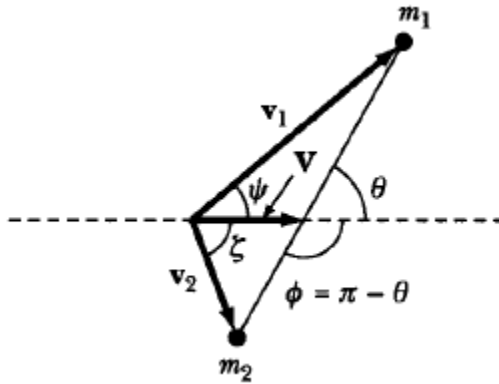


$$u_1 = u'_1 + u'_2$$

$$v'_2 = \frac{m_1 u_1}{m_1 + m_2}$$

$$v'_1 = u_1 - u'_2 = \frac{m_2 u_1}{m_1 + m_2}$$

이제 충돌 이후의 결과를
충돌 전의 실험실 계의 정보로 바꾸어 봅시다.



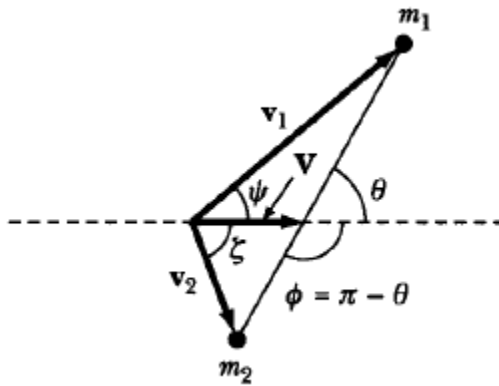
$$v_1' \sin \theta = v_1 \sin \psi$$

$$v_1' \cos \theta + V = v_1 \cos \psi$$

$$\tan \psi = \frac{v_1' \sin \theta}{v_1' \cos \theta + V} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta + (V/v_1')}$$

$$\frac{V}{v_1'} = \frac{m_1 u_1 / (m_1 + m_2)}{m_2 u_1 / (m_1 + m_2)} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta + (m_1/m_2)}$$

다른 한 편, 각도 사이의 정보도 얻을 수 있습니다.



$$v_2 \sin \zeta = v'_2 \sin \theta$$

$$v_2 \cos \zeta = V - v'_2 \cos \theta$$

$$\begin{aligned} \tan \zeta &= \frac{v'_2 \sin \theta}{V - v'_2 \cos \theta} = \frac{\sin \theta}{(V/v'_2) - \cos \theta} \\ &= \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} = \cot \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

다른 한 편, 각도 사이의 정보도 얻을 수 있습니다.

탄성 충돌 과정에서
운동 에너지는 어떻게 배분될까요?

$$T_0 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2$$

$$T'_0 = \frac{1}{2} (m_1 u_1'^2 + m_2 u_2'^2)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} u_1^2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} T_0$$

먼저 실험실 계에서의 초기 운동 에너지와
 질량 중심 계에서의 초기 운동 에너지를 비교해 봅시다.
 물론 질량 중심 계에서의 운동 에너지가
 실험실 계의 운동 에너지보다 작을 것입니다.

$$T'_1 = \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 = \frac{1}{2}m_1 \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 u_1^2 = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 T_0$$

$$T'_2 = \frac{1}{2}m_2 v_2'^2 = \frac{1}{2}m_2 \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 u_1^2 = \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} T_0$$

질량 중심 계에서의 운동 에너지는
충돌 후에 위와 같습니다.

$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{\frac{1}{2}m_1 v_1^2}{\frac{1}{2}m_1 u_1^2} = \frac{v_1^2}{u_1^2}$$

$$v_1'^2 = v_1^2 + V^2 - 2v_1 V \cos \psi$$

$$= \frac{v_1'^2}{u_1^2} = \frac{V^2}{u_1^2} + 2\frac{v_1 V}{u_1^2} \cos \psi$$

한 편, 실험실 계에서는 위와 같이 표현됩니다.

$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{\frac{1}{2}m_1 v_1^2}{\frac{1}{2}m_1 u_1^2} = \frac{v_1^2}{u_1^2}$$

$$v_1'^2 = v_1^2 + V^2 - 2v_1 V \cos \psi$$

$$= \frac{v_1'^2}{u_1^2} - \frac{V^2}{u_1^2} + 2\frac{v_1 V}{u_1^2} \cos \psi$$

$$= \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 - \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 + \frac{2m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \left(\cos \theta + \frac{m_1}{m_2} \right)$$

$$\frac{v_1'}{u_1} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

$$\frac{V}{u_1} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}$$

$$2\frac{v_1 V}{u_1^2} \cos \psi = \frac{2m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \left(\cos \theta + \frac{m_1}{m_2} \right)$$

한 편, 실험실 계에서는 위와 같이 표현됩니다.

$$\begin{aligned}
\frac{T_1}{T_0} &= \frac{\frac{1}{2}m_1 v_1^2}{\frac{1}{2}m_1 u_1^2} = \frac{v_1^2}{u_1^2} \\
&= \frac{v_1'^2}{u_1^2} - \frac{V^2}{u_1^2} + 2\frac{v_1 V}{u_1^2} \cos \psi \\
&= \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 - \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 + \frac{2m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \left(\cos \theta + \frac{m_1}{m_2}\right) \\
&= 1 - \frac{2m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} (1 - \cos \theta) \\
&= \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} \left[\cos \psi \pm \sqrt{\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 - \sin^2 \psi} \right]^2
\end{aligned}$$

실험실 계의 각도 표현

한 편, 실험실 계에서는 위와 같이 표현됩니다.

$$\begin{aligned}
\frac{T_1}{T_0} &= \frac{\frac{1}{2}m_1 v_1^2}{\frac{1}{2}m_1 u_1^2} = \frac{v_1^2}{u_1^2} \\
&= \frac{v_1'^2}{u_1^2} - \frac{V^2}{u_1^2} + 2\frac{v_1 V}{u_1^2} \cos \psi \\
&= \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 - \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 + \frac{2m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \left(\cos \theta + \frac{m_1}{m_2}\right) \\
&= 1 - \frac{2m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} (1 - \cos \theta) \\
&= \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} \left[\cos \psi \pm \sqrt{\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 - \sin^2 \psi} \right]^2
\end{aligned}$$

$$\frac{T_2}{T_0} = 1 - \frac{T_1}{T_0} = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \cos^2 \zeta, \quad \zeta \leq \pi/2$$

한 편, 실험실 계에서는 위와 같이 표현됩니다.

에너지가 보존이 되지 않는 경우는
비탄성 충돌이라고 합니다.

$$Q + \frac{1}{2}m_1 u_1^2 + \frac{1}{2}m_2 u_2^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2$$

$Q = 0$: Elastic collision, kinetic energy is conserved

$Q > 0$: Exoergic collision, kinetic energy is gained

$Q < 0$: Endoergic collision, kinetic energy is lost

$$\varepsilon = \frac{|v_2 - v_1|}{|u_2 - u_1|}$$

탄성 계수

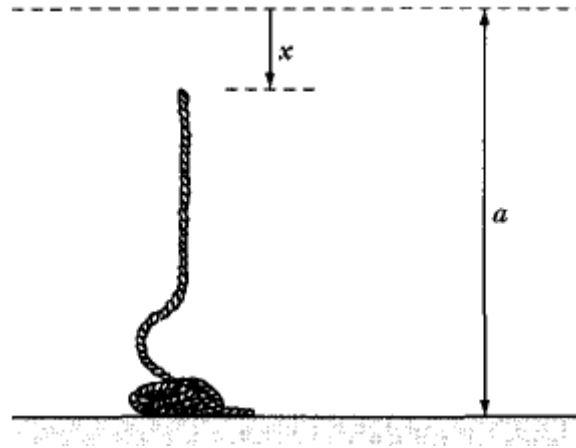
비탄성 충돌에서는 에너지가 보존되지 않습니다.
이러한 현상은 탄성 계수로 기술될 수도 있습니다.

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt \equiv \mathbf{P}$$

충격량



한 편, 충돌 전후의 외력에 의해서
운동량이 변할 수도 있습니다.
이런 경우, 충격량을 계산해서
짧은 시간동안 작용하는 충격력을 계산하는 것이 가능합니다.



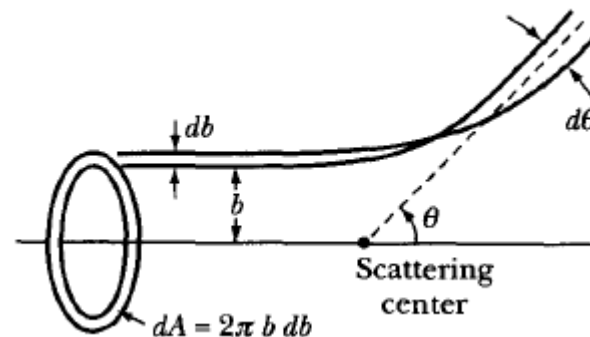
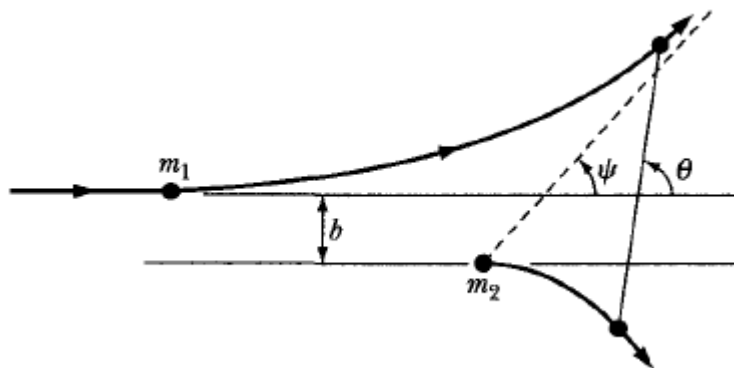
$$F = F_g + F_{\text{impulse}}$$

예제 9.10

실제로 충돌을 실험적으로 다루는 경우에는
여러 개의 입자를 동시에 충돌시키게 됩니다.
이러한 과정을 산란이라고 합니다.

$$l = m_1 u_1 b$$

$$= b \sqrt{2 m_1 T_0}$$



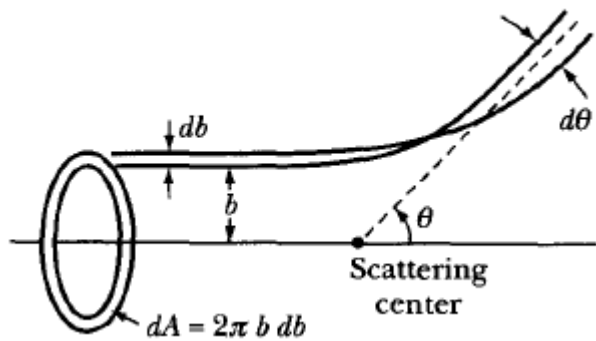
이러한 산란 문제도 질량 중심 계로 옮겨서 보는 것이 유용합니다.
 입사하는 입자의 정보는 각운동량으로 기술이 됩니다.
 그리고 각운동량은 중심력장에서 보존됩니다.

$$\sigma(\theta) = \frac{\left(\begin{array}{c} \text{Number of interactions per target particle that} \\ \text{lead to scattering into } d\Omega' \text{ at the angle } \theta \end{array} \right)}{\text{Number of incident particles per unit area}}$$

$$\sigma(\theta) d\Omega' = \frac{dN}{I}$$

$$\sigma(\theta) = \frac{d\sigma}{d\Omega'} = \frac{1}{I} \frac{dN}{d\Omega'}$$

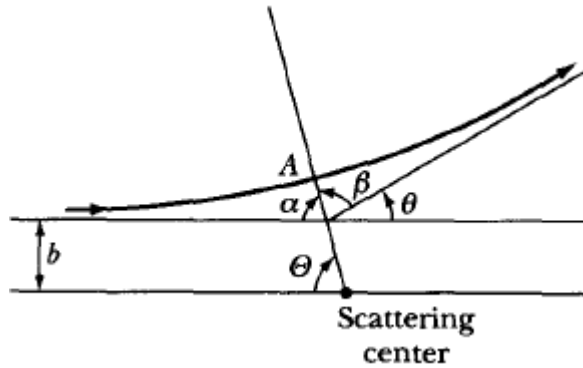
산란 문제를 다루는 경우
위와 같은 미분 산란 단면적을 정의하는 것이 매우 유용합니다.



$$I \cdot 2\pi b db = -I \cdot \sigma(\theta) \cdot 2\pi \sin \theta d\theta$$

$$\sigma(\theta) = \frac{b}{\sin \theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right|$$

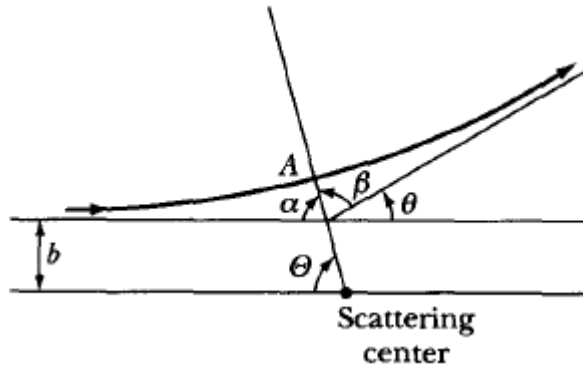
산란 문제를 다루는 경우
위와 같은 미분 산란 단면적을 정의하는 것이 매우 유용합니다.



$$\theta = \pi - 2\Theta$$

$$\begin{aligned} \Delta\theta &= \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{(l/r^2) dr}{\sqrt{2\mu[E - U - (l^2/2\mu r^2)]}} \\ &= \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{(b/r^2) dr}{\sqrt{1 - (b^2/r^2) - (U/T_0')}} \end{aligned}$$

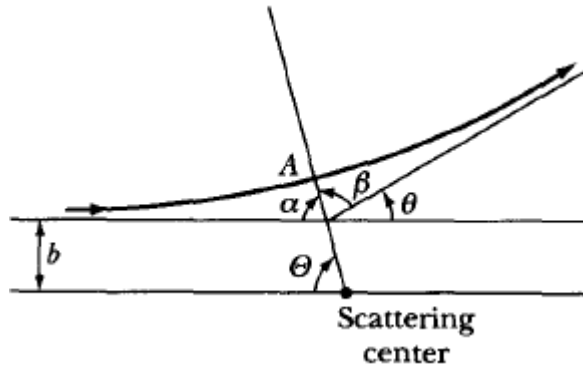
이제 중심력장의 경우에 미분 산란 단면적을 계산해 봅시다.



$$\theta = \pi - 2\Theta$$

$$\begin{aligned} \Delta\Theta &= \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{(l/r^2) dr}{\sqrt{2\mu[E - U - (l^2/2\mu r^2)]}} \\ &= \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{(b/r^2) dr}{\sqrt{1 - (b^2/r^2) - (U/T_0')}} \\ &= \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{(b/r) dr}{\sqrt{r^2 - (k/T_0')r - b^2}} \end{aligned}$$

역제곱장에서는 좀 더 구체적으로 계산할 수 있습니다.



$$\cos \theta = \frac{(\kappa/b)}{\sqrt{1 + (\kappa/b)^2}}$$

$$\kappa \equiv \frac{k}{2T'_0}$$

$$\frac{db}{d\theta} = -\frac{\kappa}{2} \frac{1}{\sin^2(\theta/2)}$$

$$\begin{aligned} \sigma(\theta) &= \frac{\kappa^2}{4} \cdot \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} \\ &= \frac{k^2}{(4T'_0)^2} \cdot \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} \end{aligned}$$

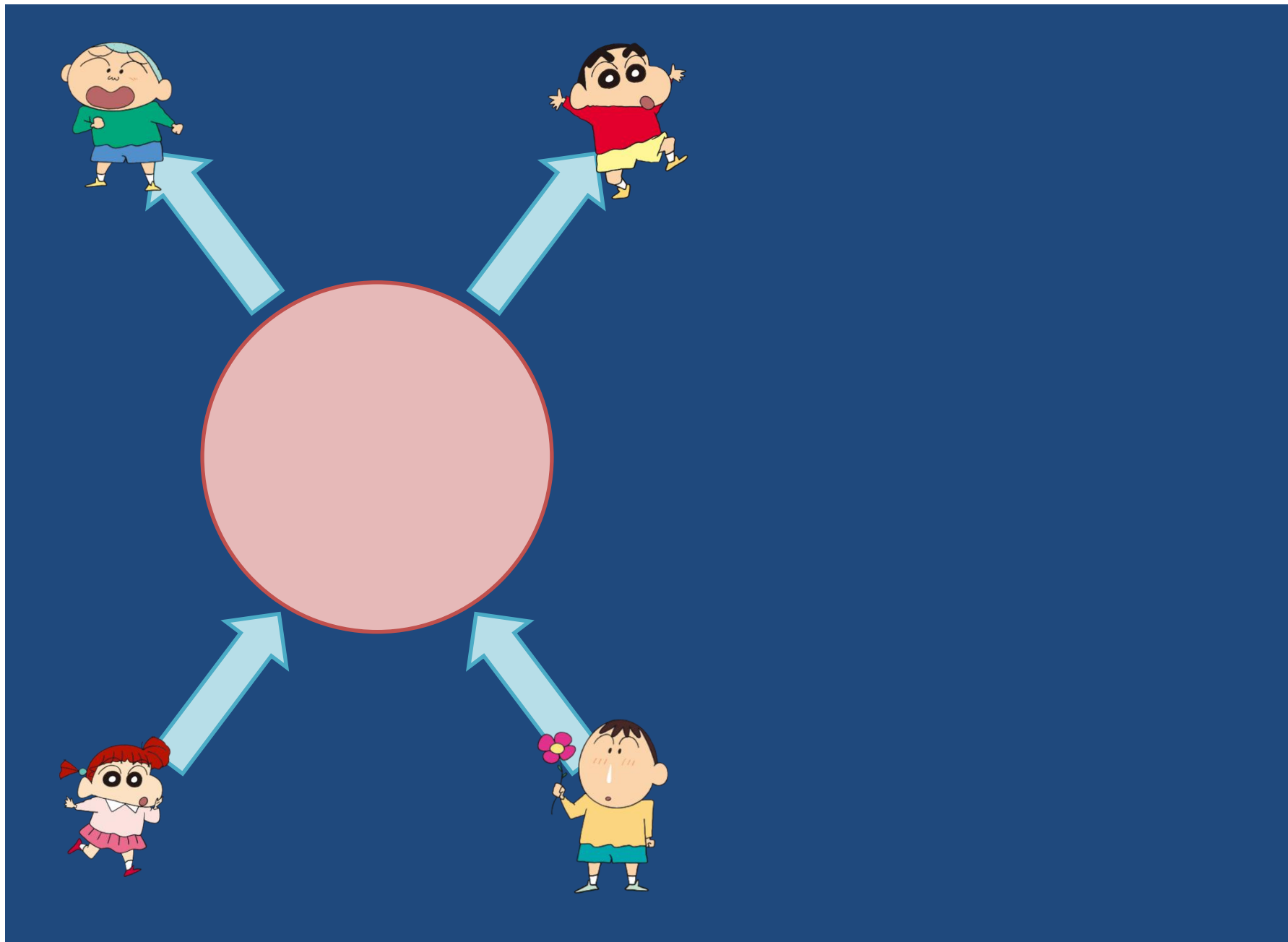
최종적으로 위와 같은 관계를 얻습니다.
이 식을 러더퍼드의 산란 공식이라고 합니다.

러더퍼드의 산란 공식은
러더퍼드가 생각한 산란 실험에서 중요하게 적용되었고,
이를 통해 원자핵의 존재를 발견할 수 있었습니다.

다른 한 편, 원자핵은 양자역학적인 대상인데
고전적인 방법으로 구한 미분 산란 단면적이
왜 올바른 결과를 준 것일까요?

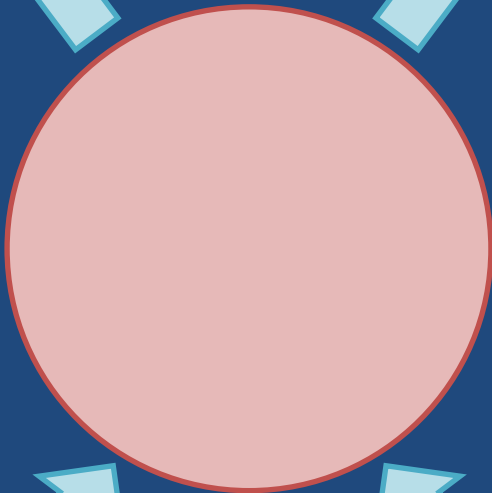
이것은 역제곱힘이 가진 특징입니다.
역제곱힘이라는 우연한 효과에 의해서
러더퍼드의 고전적 계산이
양자역학적으로도 크게 나쁘지 않았던 것입니다.

사실 오늘날 우리가 알고 있는 입자 물리 현상은
산란의 방법으로 표현된다는 것이 알려져 있습니다.





최종상태



초기상태





최종상태

$$| \text{boy in green shirt} \text{ boy in red shirt} \rangle$$

$$= a^\dagger_{\text{boy in green shirt}} a^\dagger_{\text{boy in red shirt}} |0\rangle$$



초기상태

$$| \text{girl with red pigtails} \text{ boy holding flower} \rangle$$

$$= a^\dagger_{\text{girl with red pigtails}} a^\dagger_{\text{boy holding flower}} |0\rangle$$



최종상태

$$| \text{boy in green} \text{ boy in red} \rangle$$

$$= a^\dagger a^\dagger |0\rangle$$

$$e^{-i \int \frac{H}{\hbar} dt}$$



초기상태

$$| \text{girl with pigtails} \text{ boy with flower} \rangle$$

$$= a^\dagger a^\dagger |0\rangle$$



$$e^{-i \int \frac{H}{\hbar} dt}$$

확률

$$\approx \left| \langle \text{boy in red} \text{ boy in green} \mid e^{-i \int \frac{H}{\hbar} dt} \mid \text{girl in pink} \text{ boy in yellow} \rangle \right|^2$$



감사합니다