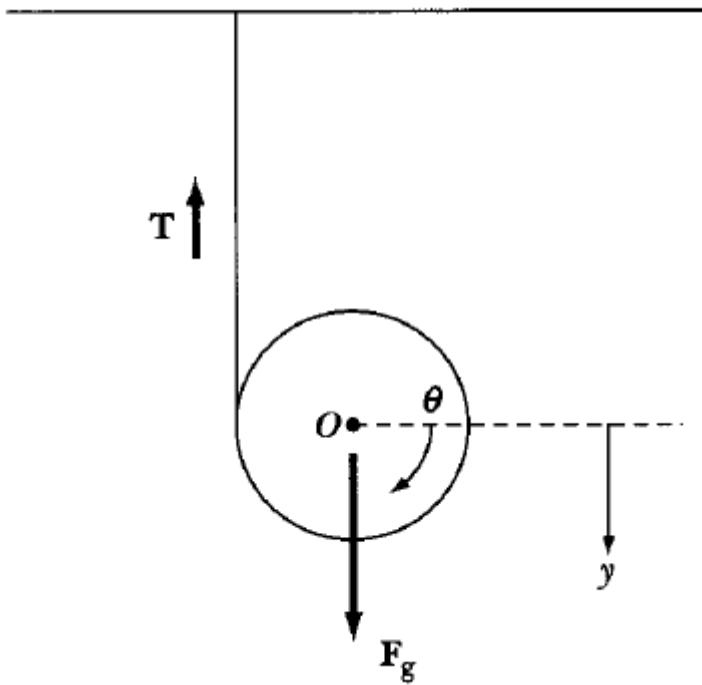


11장

강체의 역학

이제 강체rigid body의 역학을 살펴봅시다.
강체란 두 질점 사이의 거리가 변하지 않는
질점들의 집합을 말합니다.

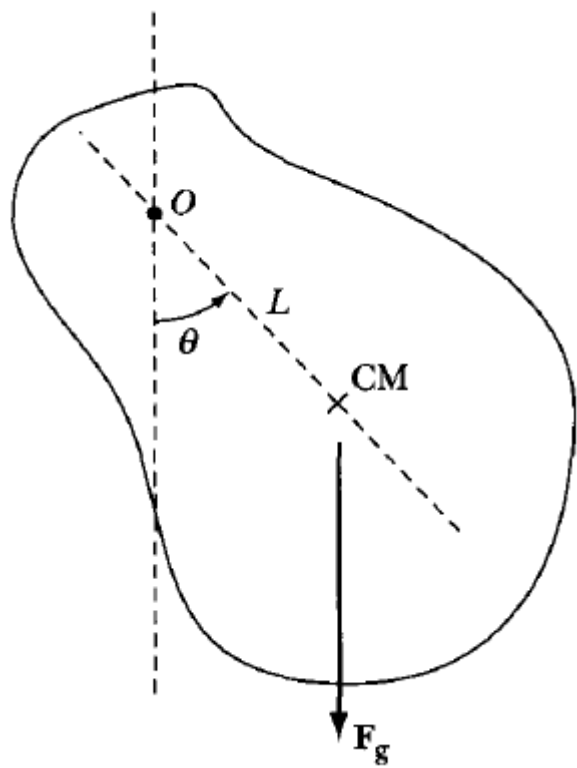
이러한 구속 조건에 의해서,
실제 강체의 자유도는
질량 중심의 병진 운동 3개와
질량 중심에 대한 회전 운동 3개,
즉 6개의 자유도로 줄어들게 됩니다.



$$M\ddot{y} = F_g - T = Mg - T$$

$$\tau = RT = I\ddot{\theta}$$

예제 11.1 자유 낙하하는 요요



$$I = Mk^2$$

$$\ddot{\theta} + \frac{MgL}{I} \theta = 0$$

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{MgL}{I}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{MgL}{Mk^2}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{gL}{k^2}}$$

$$T = \frac{1}{\nu} = 2\pi \sqrt{\frac{k^2}{gL}}$$

예제 11.2 물리 진자

$$\mathbf{v}_r = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)_{\text{rotating}} \equiv 0$$

$$\mathbf{v}_\alpha = \mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_\alpha$$

강체를 좀 더 일반적으로 기술해봅시다.
우리가 강체에 고정된 좌표계를 사용한다면
이 좌표계에서는 질점들이 움직이지 않습니다.

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\alpha})^2$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} V^2 + \underbrace{\sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\alpha}}_{\text{질량 중심에서 0이 됨}} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\alpha})^2$$

질량 중심에서 0이 됨

$$= \underbrace{\frac{1}{2} M V^2}_{\text{질량 중심의 병진 운동 에너지}} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\alpha})^2}_{\text{질량 중심에 대한 회전 운동 에너지}}$$

질량 중심의
병진 운동 에너지

질량 중심에 대한
회전 운동 에너지

$$= T_{\text{trans}} + T_{\text{rot}}$$

이 성질을 사용해서 운동 에너지를 전개해 봅시다.

$$\begin{aligned}
T_{\text{rot}} &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\alpha})^2 \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} [\omega^2 r_{\alpha}^2 - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_{\alpha})^2] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[\left(\sum_i \omega_i^2 \right) \left(\sum_k x_{\alpha,k}^2 \right) - \left(\sum_i \omega_i x_{\alpha,i} \right) \left(\sum_j \omega_j x_{\alpha,j} \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \sum_{i,j} m_{\alpha} \left[\omega_i \omega_j \delta_{ij} \left(\sum_k x_{\alpha,k}^2 \right) - \omega_i \omega_j x_{\alpha,i} x_{\alpha,j} \right] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i,j} \omega_i \omega_j \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left(\delta_{ij} \sum_k x_{\alpha,k}^2 - x_{\alpha,i} x_{\alpha,j} \right)
\end{aligned}$$

회전 운동 에너지는 좀 더 구체적으로
위와 같이 적을 수 있습니다.

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\alpha})^2$$

$$I_{ij} \equiv \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left(\delta_{ij} \sum_k x_{\alpha,k}^2 - x_{\alpha,i} x_{\alpha,j} \right)$$

관성 텐서

$$= \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} [\omega^2 r_{\alpha}^2 - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_{\alpha})^2]$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[\left(\sum_i \omega_i^2 \right) \left(\sum_k x_{\alpha,k}^2 \right) - \left(\sum_i \omega_i x_{\alpha,i} \right) \left(\sum_j \omega_j x_{\alpha,j} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \sum_{i,j} m_{\alpha} \left[\omega_i \omega_j \delta_{ij} \left(\sum_k x_{\alpha,k}^2 \right) - \omega_i \omega_j x_{\alpha,i} x_{\alpha,j} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,j} \omega_i \omega_j \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left(\delta_{ij} \sum_k x_{\alpha,k}^2 - x_{\alpha,i} x_{\alpha,j} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,j} I_{ij} \omega_i \omega_j$$

여기에서 **관성 텐서** inertia tensor를 도입하면
회전 운동 에너지를 좀 더 쉽게 나타낼 수 있습니다.

$$\begin{aligned}
\mathbf{L} &= \sum_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{p}_{\alpha} \\
&= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\alpha}) \\
&= \sum_{\alpha} m_{\alpha} [r_{\alpha}^2 \boldsymbol{\omega} - \mathbf{r}_{\alpha} (\mathbf{r}_{\alpha} \cdot \boldsymbol{\omega})]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_i &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left(\omega_i \sum_k x_{\alpha,k}^2 - x_{\alpha,i} \sum_j x_{\alpha,j} \omega_j \right) \\
&= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \sum_j \left(\omega_j \delta_{ij} \sum_k x_{\alpha,k}^2 - \omega_j x_{\alpha,i} x_{\alpha,j} \right) \\
&= \sum_j \omega_j \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left(\delta_{ij} \sum_k x_{\alpha,k}^2 - x_{\alpha,i} x_{\alpha,j} \right) \\
&= \sum_j I_{ij} \omega_j
\end{aligned}$$

관성 텐서를 사용하면
각운동량도 간단하게 표현됩니다.

$$\{\mathbf{I}\} = \left\{ \begin{array}{ccc} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (x_{\alpha,2}^2 + x_{\alpha,3}^2) & -\sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha,1} x_{\alpha,2} & -\sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha,1} x_{\alpha,3} \\ -\sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha,2} x_{\alpha,1} & \sum_{\alpha} m_{\alpha} (x_{\alpha,1}^2 + x_{\alpha,3}^2) & -\sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha,2} x_{\alpha,3} \\ -\sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha,3} x_{\alpha,1} & -\sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha,3} x_{\alpha,2} & \sum_{\alpha} m_{\alpha} (x_{\alpha,1}^2 + x_{\alpha,2}^2) \end{array} \right\}$$

$$I_{ij} = I_{ji}$$

관성 텐서를 성분 별로 기술하면 위와 같습니다.
 여기에 바로 강체의 성질에 대한
 기하학적 정보가 담기게 됩니다.
 이것은 대칭 행렬이므로 대각화도 가능합니다.

$$\{\mathbb{I}\} = \begin{Bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{Bmatrix}$$

$$L_i = \sum_j I_i \delta_{ij} \omega_j = I_i \omega_i$$

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} I_i \delta_{ij} \omega_i \omega_j = \frac{1}{2} \sum_i I_i \omega_i^2$$

관성 텐서가 대각화된다는 성질 때문에,
강체에 고정된 좌표계를 적당히 회전 변환을 하면
반드시 대각화된 관성 텐서를 일반성을 잃지 않고
얻을 수 있습니다.

그러면 이 좌표계에서 운동 에너지를 적고
방정식을 유도하면 충분할까요?

여기에는 **두 가지 문제**가 있습니다.

첫째, 물체에 고정된 좌표계는 비관성계입니다.
따라서 비관성계의 효과를 고려해야 합니다.

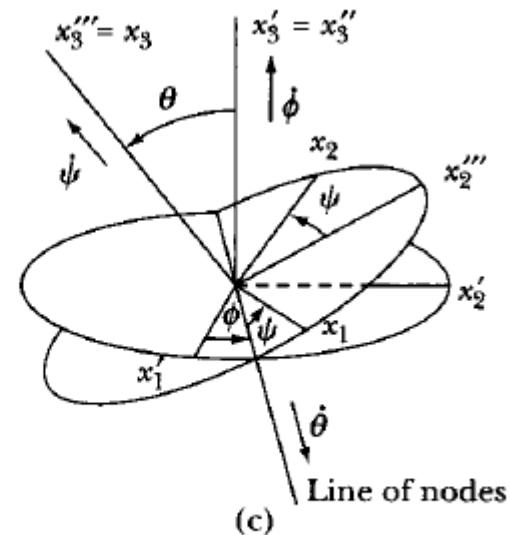
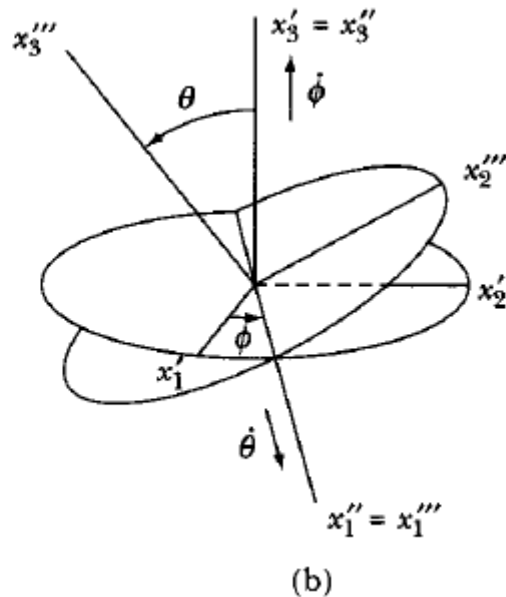
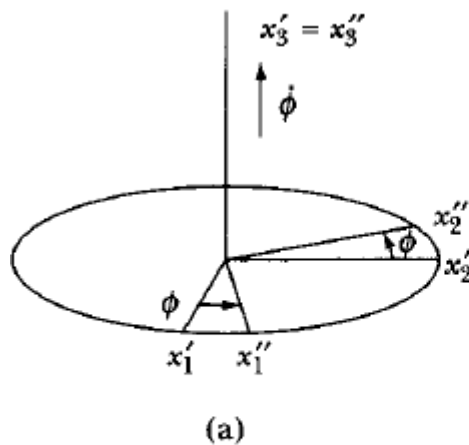
둘째, 이 좌표계에 사용된 각도는
물체에 고정된 좌표입니다.
따라서 외부 관찰자가 이해하기가 너무 어렵습니다.

외부 관찰자가 보기에 좀 더 편한
관성계에서의 각도를 도입할 수 있을까요?

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_{\text{fixed}} &= \mathbf{N} \\ &= \left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_{\text{body}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}\end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}I_1\dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 &= N_1 \\ I_2\dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 &= N_2 \\ I_3\dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 &= N_3\end{aligned} \right\}$$

두 번째 문제를 고려하기 전에,
일단 이 좌표계에서 성립하는 토크 방정식을 적어봅시다.
이것을 **오일러 방정식** Euler equation 이라고 합니다.



$$\lambda_\phi = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

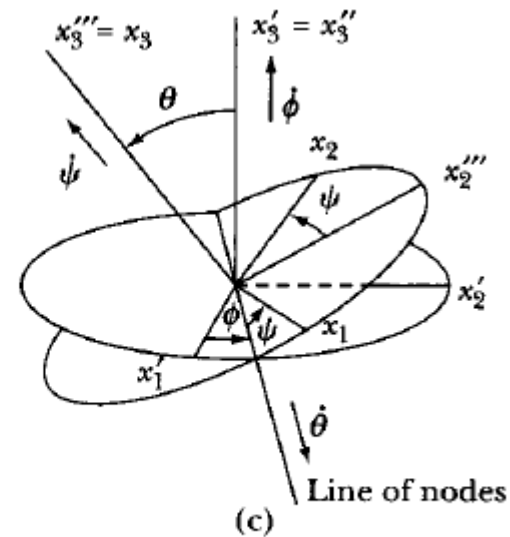
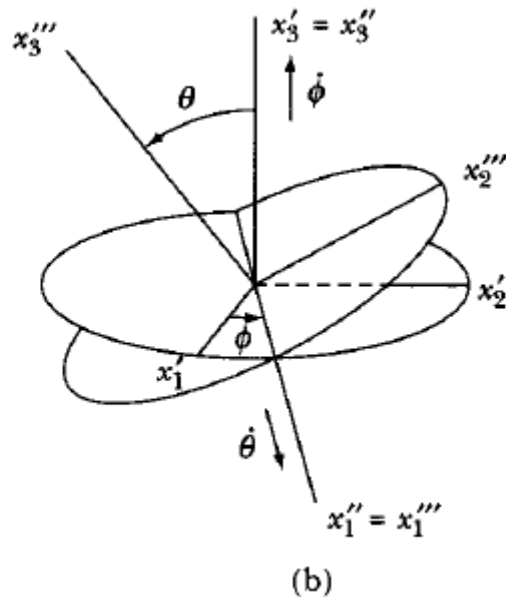
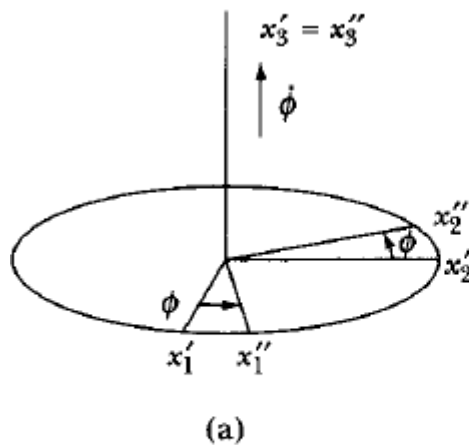
$$\lambda_\psi = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}'$$

$$= \lambda_\psi \lambda_\theta \lambda_\phi \mathbf{x}'$$

회전계 고정계

또는 관성계에서의 각으로 표현한 다음에
운동 방정식을 다시 유도하는 것이 좋을 수도 있습니다.
많은 경우 이 목적을 위해 **오일러 각** Euler angle 을 사용합니다.



$$\lambda_\phi = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\lambda_\psi = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}'$$

$$= \lambda_\psi \lambda_\theta \lambda_\phi \mathbf{x}'$$

회전계 고정계

고정계에서 사용하는 각도를
회전계에서의 각도로 바꾸기 위해서는
적당한 회전 변환을 순서대로 사용해야 합니다.

$$\left. \begin{aligned} \dot{\phi}_1 &= \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi \\ \dot{\phi}_2 &= \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi \\ \dot{\phi}_3 &= \dot{\phi} \cos \theta \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= \dot{\theta} \cos \psi \\ \dot{\theta}_2 &= -\dot{\theta} \sin \psi \\ \dot{\theta}_3 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= 0 \\ \dot{\psi}_2 &= 0 \\ \dot{\psi}_3 &= \dot{\psi} \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \dot{\phi}_1 + \dot{\theta}_1 + \dot{\psi}_1 = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \\ \omega_2 &= \dot{\phi}_2 + \dot{\theta}_2 + \dot{\psi}_2 = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \\ \omega_3 &= \dot{\phi}_3 + \dot{\theta}_3 + \dot{\psi}_3 = \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \end{aligned}$$

이것으로부터 오일러 각에 의한 각속도와 회전계의 각속도 사이의 관계를 구할 수 있습니다.

$$T = \frac{1}{2} \sum_i I_i \omega_i^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial \psi} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = 0 = \sum_i \frac{\partial T}{\partial \omega_i} \frac{\partial \omega_i}{\partial \psi} - \frac{d}{dt} \sum_i \frac{\partial T}{\partial \omega_i} \frac{\partial \omega_i}{\partial \dot{\psi}}$$

$$\left. \begin{aligned} (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 - I_1 \dot{\omega}_1 &= 0 \\ (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1 - I_2 \dot{\omega}_2 &= 0 \\ (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 - I_3 \dot{\omega}_3 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

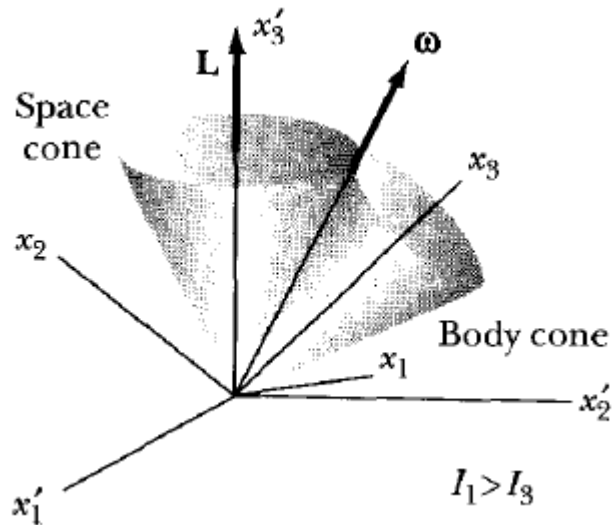
회전 운동 에너지를 오일러 각으로 표현을 하면
 이것은 운동 에너지의 **관성계 표현**이 됩니다.
 따라서 이것으로부터 운동 방정식을 구할 수 있습니다.
 이 결과는 앞에서 구한 오일러 방정식과 일치합니다.

이제 이 운동 방정식을
실제 강체의 회전 문제에 적용해 봅시다.

중력이 없어서 토크가 없는 경우와
중력에 의해 토크가 존재하는 경우,
두 경우에 대해서 살펴봅시다.

$$I_1 = I_2 \neq I_3$$

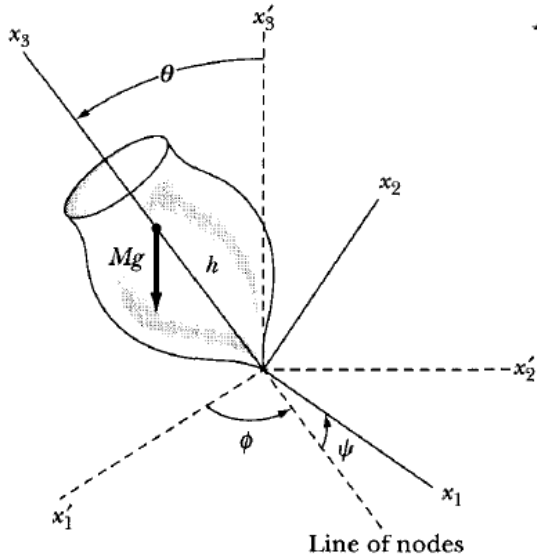
$$\left. \begin{aligned} (I_1 - I_3)\omega_2\omega_3 - I_1\dot{\omega}_1 &= 0 \\ (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 - I_1\dot{\omega}_2 &= 0 \\ I_3\dot{\omega}_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \omega_3(t) = \text{const.}$$



$$\left. \begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= -\left(\frac{I_3 - I_1}{I_1}\omega_3\right)\omega_2 \\ \dot{\omega}_2 &= \left(\frac{I_3 - I_1}{I_1}\omega_3\right)\omega_1 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \omega_1(t) &= A \cos \Omega t \\ \omega_2(t) &= A \sin \Omega t \end{aligned} \right\}$$

먼저 대칭 팅이의 자유 운동에 대해서 살펴봅시다.
 이 경우 우리는 대칭축 주위로의 회전rotation과 더불어
 대칭축의 회전, 즉 세차precession를 살펴볼 수 있습니다.



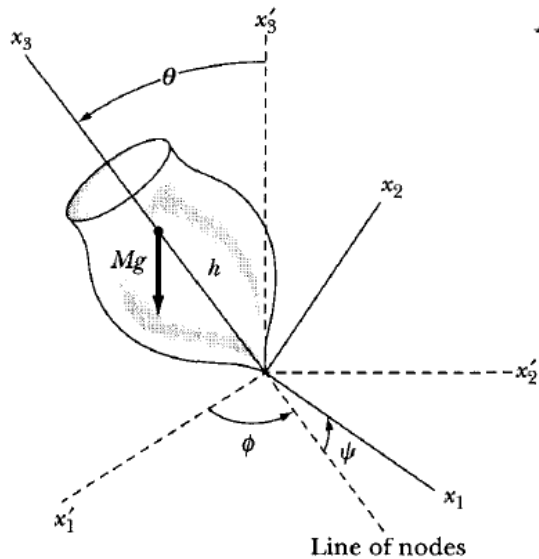
$$L = \frac{1}{2} I_1 (\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 - Mgh \cos \theta$$

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = (I_1 \sin^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta) \dot{\phi} + I_3 \dot{\psi} \cos \theta = \text{constant}$$

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) = \text{constant}$$

$$E = \frac{1}{2} I_1 (\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2 + Mgh \cos \theta = \text{constant}$$

중력이 작용하는 무거운 팽이의 경우에는 위와 같습니다.
 관성계에 해당하는 오일러 각으로 표현을 하면
 두 개의 운동의 상수를 찾을 수 있습니다.
 또 다른 운동의 상수 하나는 총 에너지입니다.



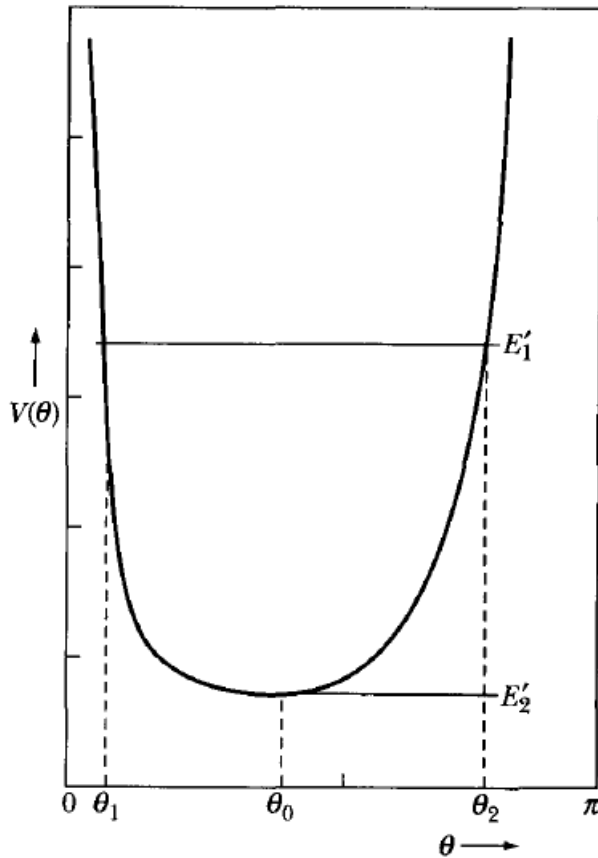
$$L = \frac{1}{2} I_1 (\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 - Mgh \cos \theta$$

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = (I_1 \sin^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta) \dot{\phi} + I_3 \dot{\psi} \cos \theta = \text{constant}$$

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) = \text{constant}$$

$$E = \frac{1}{2} I_1 (\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2 + Mgh \cos \theta = \text{constant}$$

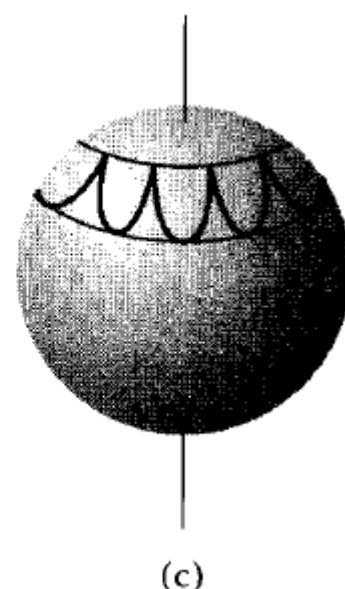
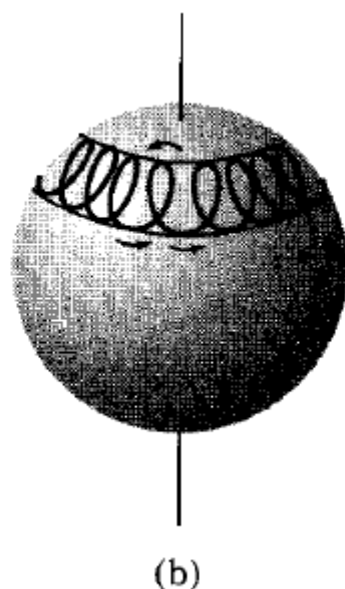
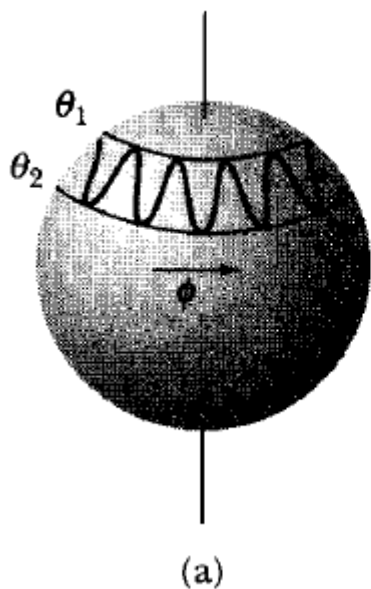
여기에서 운동의 상수를 부여하는 두 개의 각은 각각
세차와 회전에 대응됩니다.



$$E' = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 + V(\theta)$$

$$V(\theta) \equiv \frac{(p_\phi - p_\psi \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} + Mgh \cos \theta$$

이러한 상수들을 대입하면,
 위와 같이 오일러 각 θ 에 대한 에너지 관계식을 얻을 수 있습니다.
 즉, 중력의 효과로 우리가 볼 수 있는 새로운 현상은
 θ 방향으로의 진동 운동, 즉 **장동** nutation이라는 것입니다.



장동과 세차의 주기 차이를 비교함으로써
 팽이의 회전 축이 흔들리는 패턴을 이해할 수 있게 됩니다.
 이것이 라그랑주가 해석 역학의 방법으로 해결한
 아주 멋진 문제 중 하나로 알려져 있습니다.

감사합니다