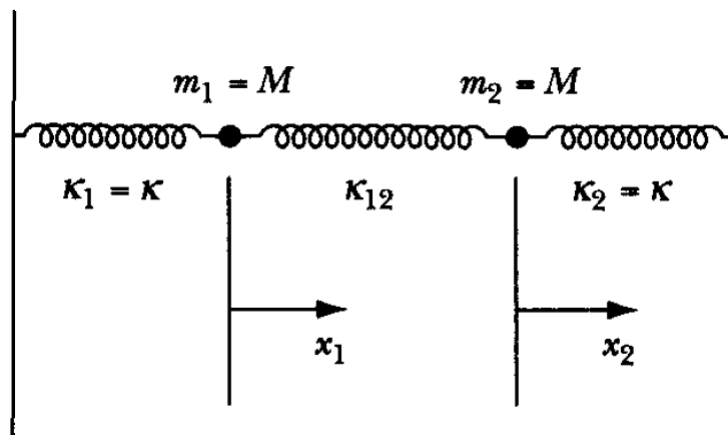


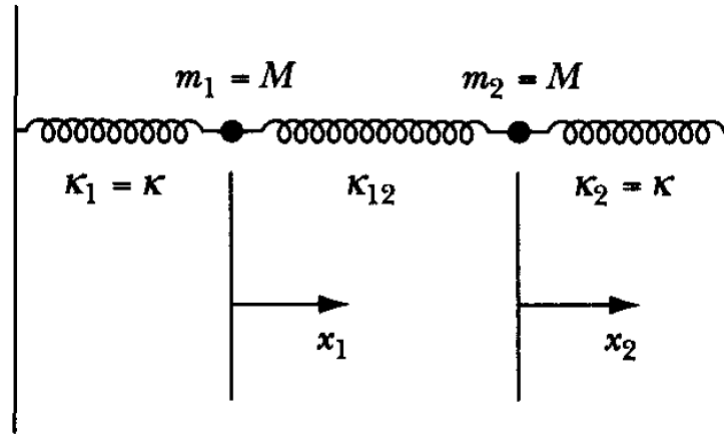
12장 연성 진동

입자 계의 대표적인 예로 지난 시간에는 강체를 다루었습니다.
이번에는 결합된 단진자, 즉
연성 진동의 문제를 다루어 봅시다.



$$\left. \begin{aligned} M\ddot{x}_1 + (\kappa + \kappa_{12})x_1 - \kappa_{12}x_2 &= 0 \\ M\ddot{x}_2 + (\kappa + \kappa_{12})x_2 - \kappa_{12}x_1 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

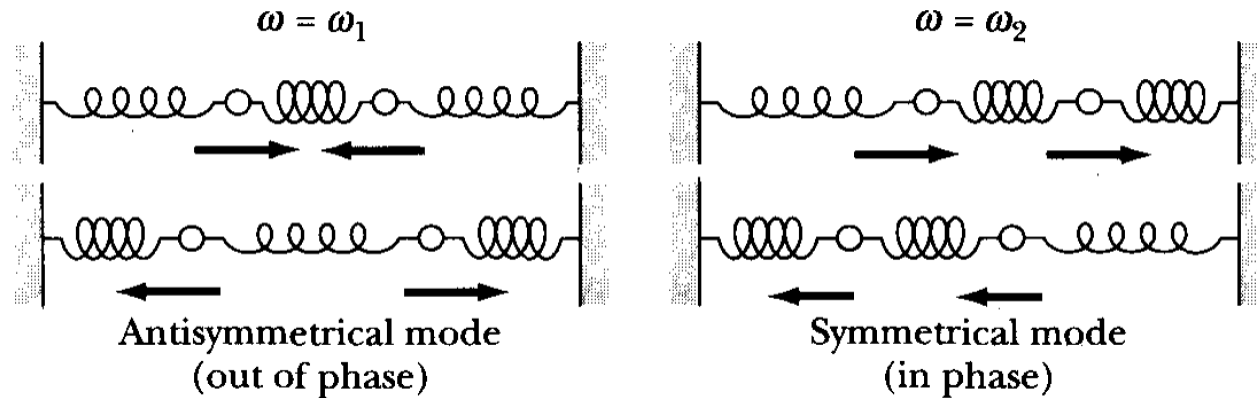
일반적인 문제를 다루기 전에,
구체적으로 위와 같은 두 개의 결합된 단진자 문제를 생각해 봅시다.



$$\left. \begin{aligned} x_1(t) &= B_1^+ e^{i\omega_1 t} + B_1^- e^{-i\omega_1 t} + B_2^+ e^{i\omega_2 t} + B_2^- e^{-i\omega_2 t} \\ x_2(t) &= -B_1^+ e^{i\omega_1 t} - B_1^- e^{-i\omega_1 t} + B_2^+ e^{i\omega_2 t} + B_2^- e^{-i\omega_2 t} \end{aligned} \right\}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\kappa + 2\kappa_{12}}{M}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{\kappa}{M}}$$

이 미분 방정식은 연립되어 있지만
 대각화의 방법에 의해서 해결될 수 있습니다.
 여기에서 입자의 진동은 **두 진동수에 의한 진동**의
 선형 중첩으로 기술됨을 알 수 있습니다.



이러한 두 진동 모드는 어떤 의미가 있을까요?
 둘 중의 하나는 반대칭적인 진동,
 다른 하나는 대칭적인 진동을 의미합니다.
 일반적인 진동은 이 둘의 선형 중첩이 될 것입니다.

$$\kappa_{12} \ll \kappa$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\kappa + \kappa_{12}}{M}} \cong \sqrt{\frac{\kappa}{M}} (1 + \varepsilon)$$

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &\cong \sqrt{\frac{\kappa}{M}} (1 + 2\varepsilon), & \omega_2 &= \sqrt{\frac{\kappa}{M}} \\ &\cong \omega_0 (1 - \varepsilon) (1 + 2\varepsilon) & &\cong \omega_0 (1 - \varepsilon) \\ &\cong \omega_0 (1 + \varepsilon) & & \end{aligned} \right\}$$

이러한 선형 중첩에는 어떤 의미가 있을까요?
 예를 들어, 두 진자 사이의 상호 작용이 약한 경우를 생각해 봅시다.
 이 때 두 모드의 진동수는 위와 같이 전개됩니다.

$$x_1(0) = D, \quad x_2(0) = 0, \quad \dot{x}_1(0) = 0, \quad \dot{x}_2(0) = 0$$

$$B_1^+ = B_1^- = B_2^+ = B_2^- = \frac{D}{4}$$

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{D}{4}[(e^{i\omega_1 t} + e^{-i\omega_1 t}) + (e^{i\omega_2 t} + e^{-i\omega_2 t})] \\ &= \frac{D}{2}(\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t) \\ &= D \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \\ &= (D \cos \varepsilon \omega_0 t) \cos \omega_0 t \end{aligned}$$

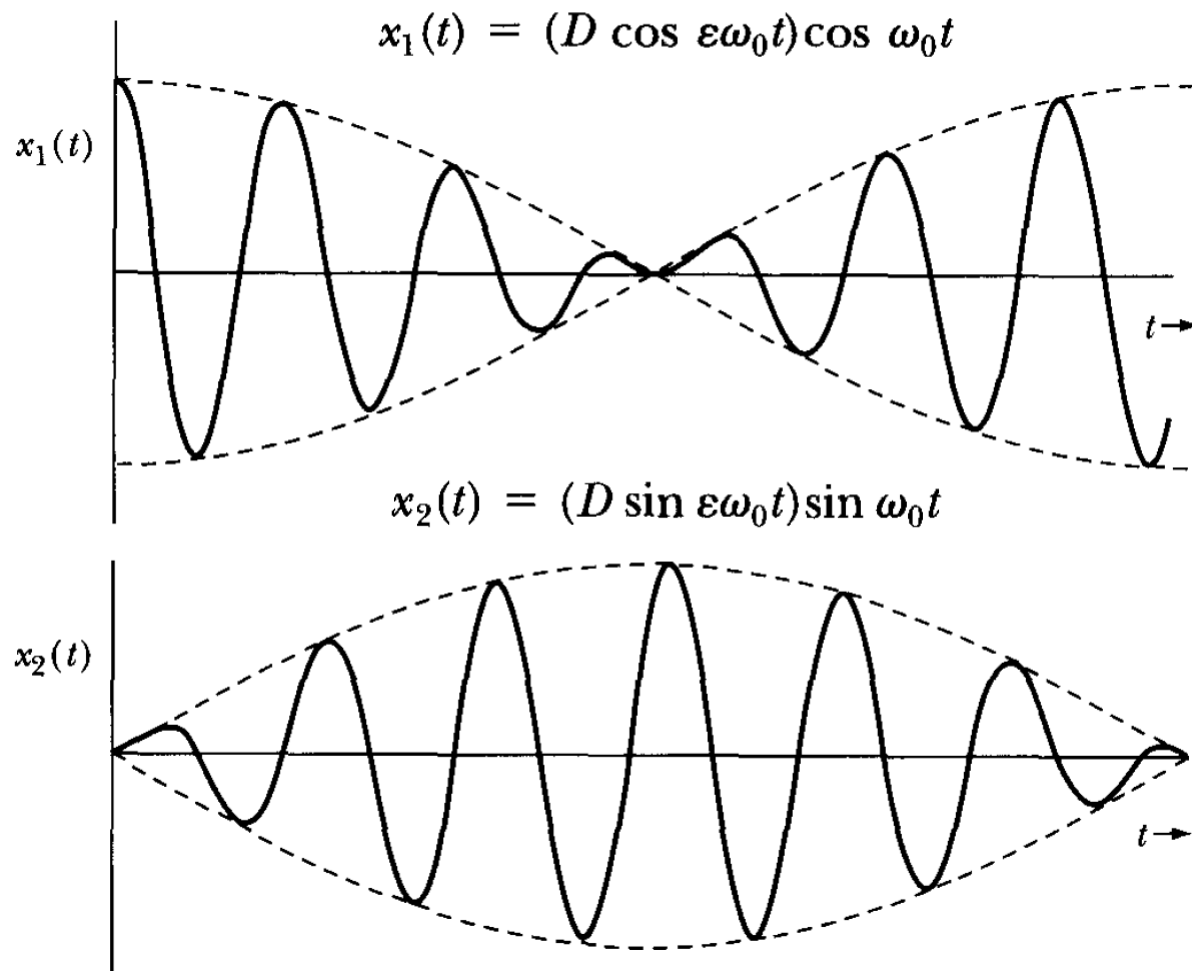
여기에 간단하게 위와 같은 초기 조건을 주면
식을 좀 더 간단하게 표현할 수 있습니다.

$$x_1(0) = D, \quad x_2(0) = 0, \quad \dot{x}_1(0) = 0, \quad \dot{x}_2(0) = 0$$

$$B_1^+ = B_1^- = B_2^+ = B_2^- = \frac{D}{4}$$

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{D}{4}[(e^{i\omega_1 t} + e^{-i\omega_1 t}) + (e^{i\omega_2 t} + e^{-i\omega_2 t})] \\ &= \frac{D}{2}(\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t) \\ &= D \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \end{aligned}$$

이 식이 의미하는 것은
이러한 형태의 진동은 두 개의 서로 다른 파장의 파동이
중첩된 것으로 보임을 의미합니다.



이러한 현상을 맥놀이라고 합니다.

이렇게 두 입자의 연성 진동 문제에서 사용된 방법을 일반화 하면
일반적인 연성 진동 문제도 다룰 수 있습니다.

문제를 풀기 위해서 **대각화**의 방법을 쓸 수 있다는 것,
그리고 이 때 최종적인 해는
몇 개의 **진동 모드**의 **선형 중첩**으로 기술된다는 것입니다.

$$\sum_j (A_{jk} q_j + m_{jk} \ddot{q}_j) = 0$$

일반적인 문제

$$q_j(t) = a_j e^{i(\omega t - \delta)}$$

시행 함수

$$\sum_j (A_{jk} - \omega^2 m_{jk}) a_j = 0$$

$$|A_{jk} - \omega^2 m_{jk}| = 0$$

대각화

$$q_j(t) = \sum_r a_{jr} e^{i(\omega_r t - \delta_r)}$$

고유 모드들의 선형 중첩

상당히 일반적인 연성 진동 문제를
대각화의 방법으로 다룰 수 있습니다.
 그러면 최종적인 답은 대각화된 **고유 모드**들의
 선형 중첩으로 기술될 것입니다.

$$\sum_j (A_{jk} q_j + m_{jk} \ddot{q}_j) = 0$$

일반적인 문제

$$q_j(t) = a_j e^{i(\omega t - \delta)}$$

시행 함수

$$\sum_j (A_{jk} - \omega^2 m_{jk}) a_j = 0$$

$$|A_{jk} - \omega^2 m_{jk}| = 0$$

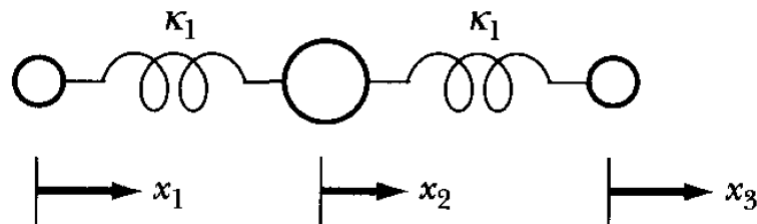
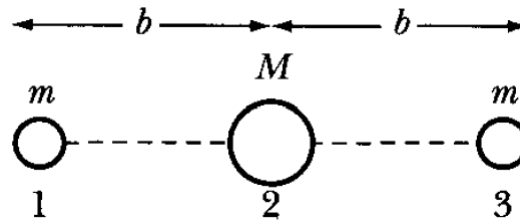
대각화

$$q_j(t) = \sum_r a_{jr} e^{i(\omega_r t - \delta_r)}$$

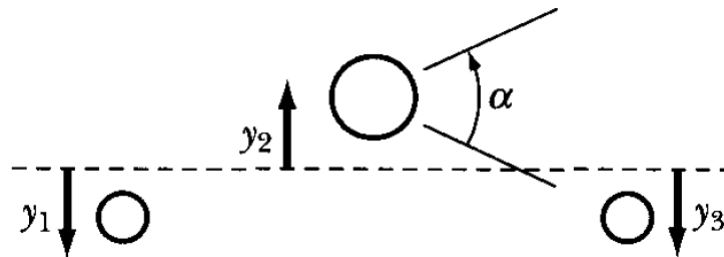
고유 모드들의 선형 중첩

고유 모드의 선형 중첩에 해당하는 계수들은
초기 조건으로 결정됩니다.

따라서 연성 진동 문제를 푸는 과정에서 가장 중요한 것은
고유 모드와 진동수를 구하는 것입니다.



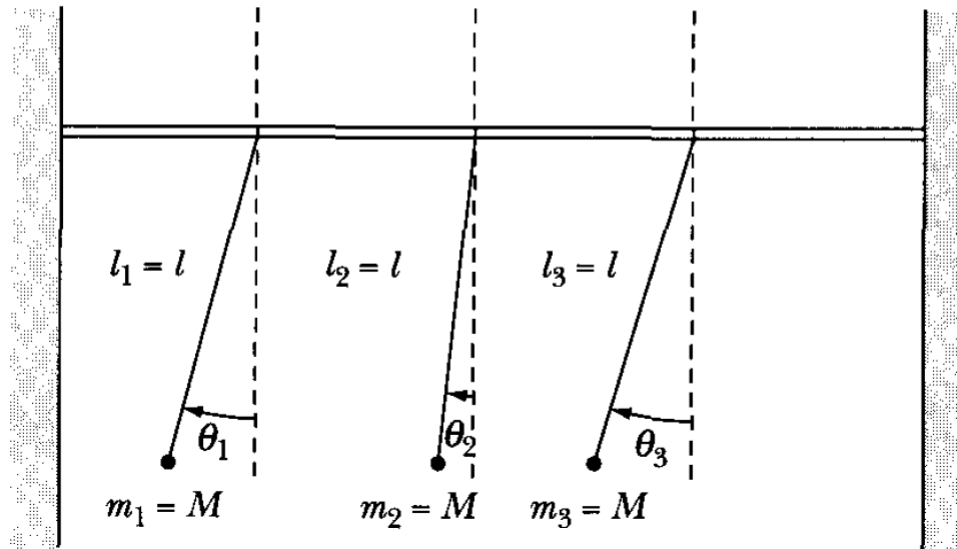
가로 진동



세로 진동

예제 12.5 분자 진동

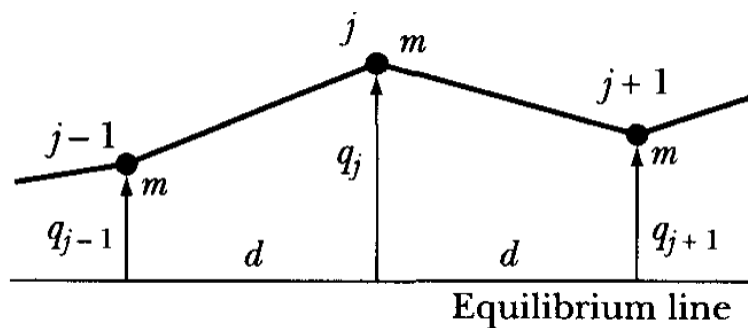
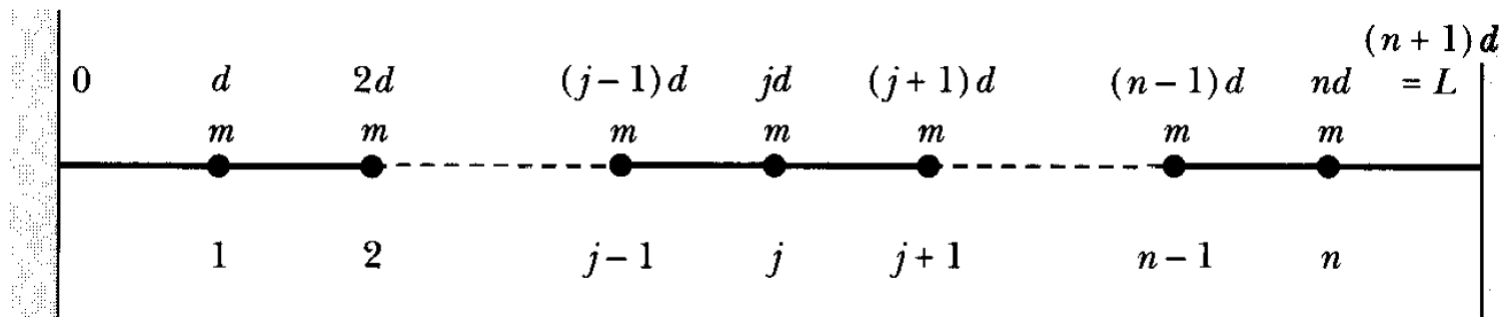
$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{1}{2}(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_3^2) \\ U &= \frac{1}{2}(\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 - 2\varepsilon\theta_1\theta_2 - 2\varepsilon\theta_1\theta_3 - 2\varepsilon\theta_2\theta_3) \end{aligned} \right\}$$



고윳값이 축퇴된 경우에는 두 개의 고유 벡터를 찾을 수 있습니다.

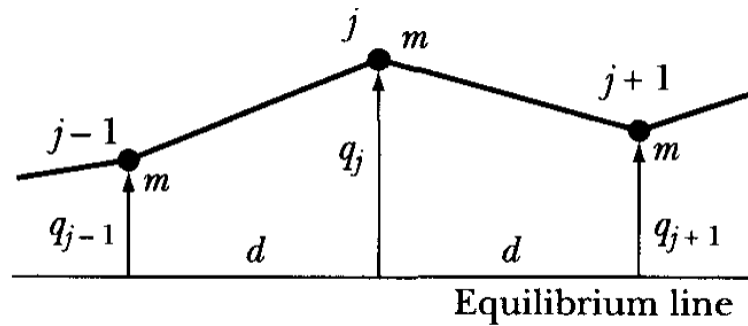
예제 12.6 세 개의 결합된 단진자

연성 진동의 특별한 예로
질점들이 연결된 사례,
즉 하중이 걸린 현을 질점들로 기술해 봅시다.



위와 같이 하중이 걸린 현 문제를 다뤄봅시다.
 각 질점 사이에는 탄성에 의한 복원력이 작용한다고 합시다.

$$F_j = -\frac{\tau}{d}(q_j - q_{j-1}) - \frac{\tau}{d}(q_j - q_{j+1})$$



각 질점에 작용하는 힘은 근사적으로 위와 같이 기술됩니다.
 질점들이 충분히 조밀하다면
 위의 식은 좋은 근사가 됩니다.

$$F_j = -\frac{\tau}{d}(q_j - q_{j-1}) - \frac{\tau}{d}(q_j - q_{j+1})$$

$$\ddot{q}_j = \frac{\tau}{md}(q_{j-1} - 2q_j + q_{j+1})$$

따라서 각 질점의 운동 방정식은 위와 같습니다.
이제 이런 형태로 기술된 계의 문제를 다루어 봅시다.

$$F_j = -\frac{\tau}{d}(q_j - q_{j-1}) - \frac{\tau}{d}(q_j - q_{j+1})$$

$$\ddot{q}_j = \frac{\tau}{md}(q_{j-1} - 2q_j + q_{j+1})$$

$$q_j(t) = a_j e^{i\omega t}$$

$$-\frac{\tau}{d}a_{j-1} + \left(2\frac{\tau}{d} - m\omega^2\right)a_j - \frac{\tau}{d}a_{j+1} = 0$$

먼저 시행 함수를 사용해서 시간 미분 부분을 없애 봅시다.
 우리의 목표는 고유 진동수, 즉 ω 를 구하는 것입니다.

$$a_j = ae^{i(j\gamma - \delta)}$$

$$-\frac{\tau}{d}e^{-i\gamma} + \left(2\frac{\tau}{d} - m\omega^2\right) - \frac{\tau}{d}e^{i\gamma} = 0$$

$$\omega^2 = \frac{2\tau}{md} - \frac{\tau}{md}(e^{i\gamma} + e^{-i\gamma})$$

$$= \frac{2\tau}{md}(1 - \cos \gamma)$$

$$= \frac{4\tau}{md} \sin^2 \frac{\gamma}{2}$$

$$\omega_r = 2\sqrt{\frac{\tau}{md}} \sin \frac{\gamma_r}{2}, \quad r = 1, 2, \dots, n$$

이제 고유 진동수를 구하기 위해
 a_j 의 형태를 한 번 더 위와 같이 가정해 봅시다.
 이 방정식을 풀어서 n 개의 고유 진동수를 구할 수 있습니다.

$$\begin{aligned}
 a_{jr} &= a_r e^{i(j\gamma_r - \delta_r)} \\
 &= a_r \cos(j\gamma_r - \delta_r) \quad \text{실수부}
 \end{aligned}$$

$$a_{0r} = a_{(n+1)r} \equiv 0 \quad \text{경계 조건}$$

$$\begin{aligned}
 a_{jr} &= a_r \cos\left(j\gamma_r - \frac{\pi}{2}\right) \\
 &= a_r \sin j\gamma_r
 \end{aligned}$$

$$\gamma_r = \frac{s\pi}{n+1}, \quad s = 1, 2, \dots$$

그리고 진폭에 대한 경계 조건을 반영할 수 있습니다.
 이것으로부터 고유 진동수를 정확하게 특정할 수 있습니다.

$$\begin{aligned}
 q_j &= \sum_r \beta'_r a_{jr} e^{i\omega_r t} \\
 &= \sum_r \beta'_r a_r \sin\left(j \frac{r\pi}{n+1}\right) e^{i\omega_r t} \\
 &= \sum_r \beta_r \sin\left(j \frac{r\pi}{n+1}\right) e^{i\omega_r t}
 \end{aligned}$$

$$\omega_r = 2 \sqrt{\frac{\tau}{md}} \sin\left(\frac{r\pi}{2(n+1)}\right)$$

따라서 최종적인 해는
고유 진동 모드의 선형 중첩으로
위와 같이 기술될 것입니다.

이러한 계산의 의미를 다시 해석해 봅시다.
우리가 풀었던 방정식으로 돌아가 봅시다.

$$F_j = -\frac{\tau}{d}(q_j - q_{j-1}) - \frac{\tau}{d}(q_j - q_{j+1})$$

$$\frac{q_j - q_{j+1}}{d} \rightarrow \frac{q(x) - q(x+d)}{d} \rightarrow -\left.\frac{\partial q}{\partial x}\right|_{x+d/2}$$

$$\frac{q_{j-1} - q_j}{d} \rightarrow \frac{q(x-d) - q(x)}{d} \rightarrow -\left.\frac{\partial q}{\partial x}\right|_{x-d/2}$$

$$\boxed{\frac{m}{d} \ddot{q}_j = \frac{\tau}{d} \left(\frac{q_{j-1} - q_j}{d} \right) - \frac{\tau}{d} \left(\frac{q_j - q_{j+1}}{d} \right)} \rightarrow \lim_{d \rightarrow 0} \tau \left(\frac{\left.\frac{\partial q}{\partial x}\right|_{x+d/2} - \left.\frac{\partial q}{\partial x}\right|_{x-d/2}}{d} \right) = \tau \left.\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}\right|_x = \tau \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}$$

우리는 연성 진동을 기술하면서 위와 같은 힘을 얻었습니다.
 그런데 질점 사이의 간격이 0이 되는 극한에서
 위의 방정식은 공간 방향의 편미분이 됩니다.

$$\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = \frac{\rho}{\tau} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2}$$

즉 연성 진동은 질점 사이의 거리가 아주 가까운 극한에서는
위와 같은 미분 방정식을 만족한다는 것을 의미합니다.
이것은 우리가 잘 알고 있는 파동 방정식입니다.

이 방정식에 대해서는 다음 시간에 자세히 살펴보겠지만,
질점들이 조밀하게 연결된 것이
연속체 극한에서는 **장**으로 기술된다는 것은
고전 역학의 중요한 결과 중 하나입니다.



$$\vec{x}(t)$$

입자 하나의 위치는 위와 같이 기술됩니다.



$$\vec{x}(t)$$

입자가 여러 개가 상호 작용한다면
어떻게 해야 할까요?



$$\vec{x}_i(t)$$

이 때는 입자 각각을 구별해서 지칭해야 합니다.
여기에서 입자를 지칭하는 **첨자**가 사용됩니다.



$$\vec{x}_i(t)$$

이제 이렇게 상호 작용하는 입자가 아주 많다고 합시다.
그리고 그 극한으로서 연속체가 되는 경우를 생각해 봅시다.
이번엔 어떻게 해야 할까요?



$$\vec{x}_i(t)$$

$i \rightarrow x$

여기에 대해서 가장 좋은 방법은 입자의 위치를 나타내는 첨자를
연속적인 변수, 즉 공간을 지칭하는 변수로 나타내는 것입니다.



$$\vec{x}_i(t)$$

$i \rightarrow x$

그러나 이렇게 되면 공간을 나타내는 변수와
입자의 위치를 나타내는 변수가 중복되는 문제가 생깁니다.



$$\begin{array}{c} x \rightarrow \phi \\ \vec{x}_i(t) \\ i \rightarrow x \end{array}$$

이 문제를 피하기 위해, 입자의 위치에 해당하는 변수를 새롭게 도입합니다.



$$\phi(\vec{x}, t)$$

정리하면 위와 같습니다.

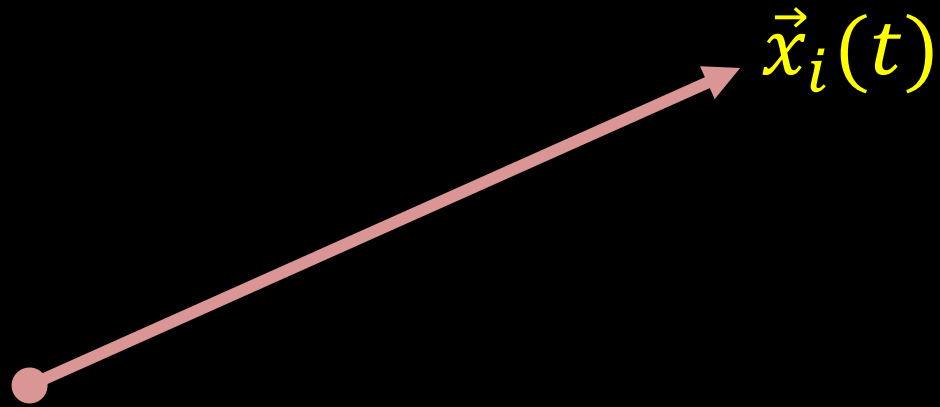


$$\phi(\vec{x}, t)$$

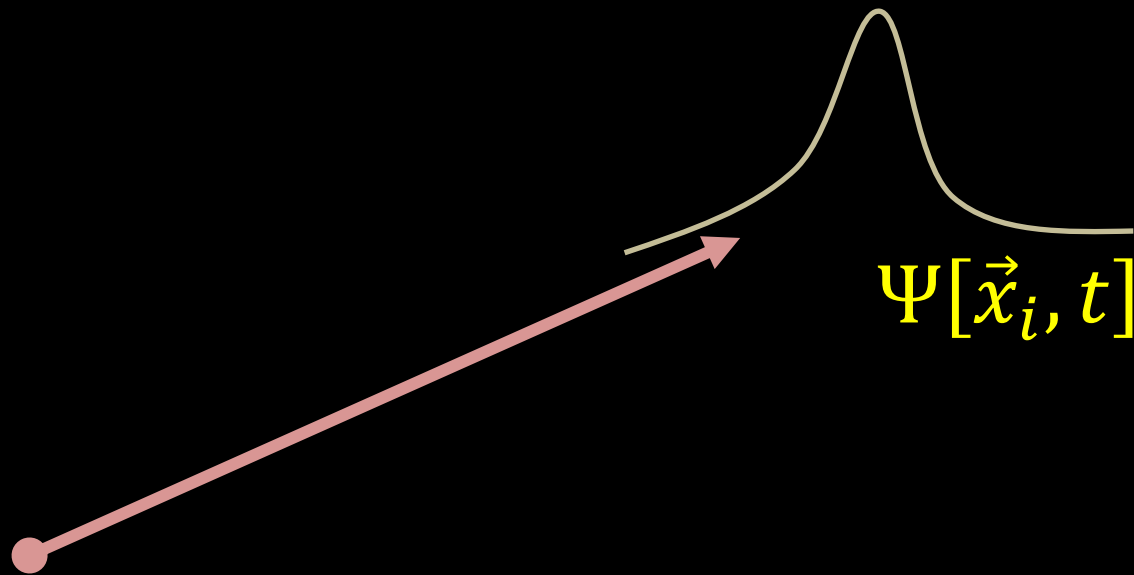
이제 이 함수는 공간 변수 $\vec{x}$ 와 시간 변수 t 의 함수입니다.
공간에 걸쳐 정의되어 있기 때문에
이것을 우리는 **장**field이라고 부릅니다.

그러나 모든 장들이 연결된 질점들의 집합으로 환원될 수 있는지,
즉 모든 장과 파동에 대응되는 매질이 존재하는지에 대해서는
의문의 여지가 있습니다.

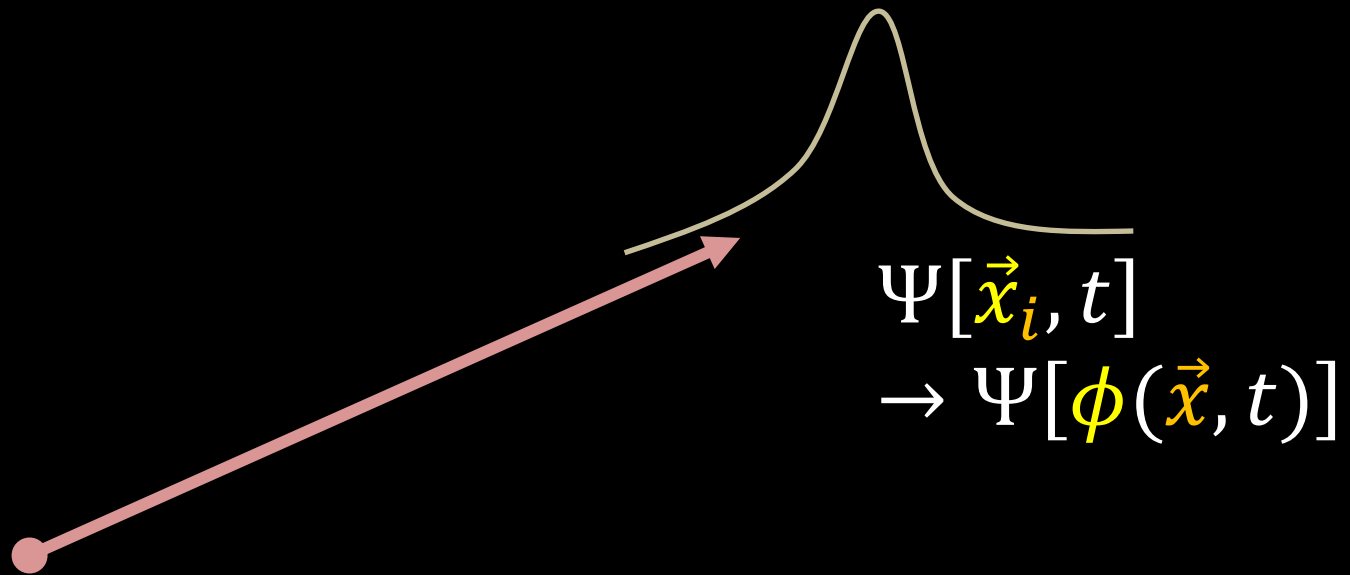
우리는 그렇지 않다는 것,
즉 근본적인 장이 존재한다는 것을 알고 있기 때문입니다.



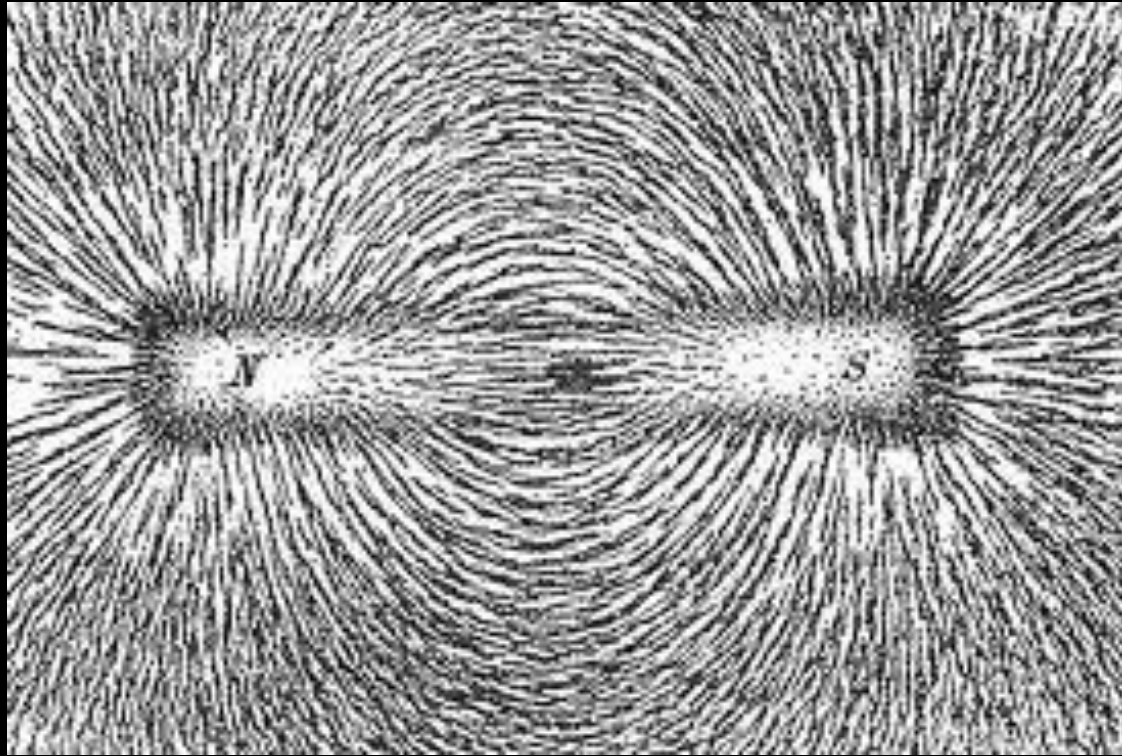
고전 물리학에서는 입자의 위치를 알면
모든 것을 이해할 수 있다고 생각합니다.



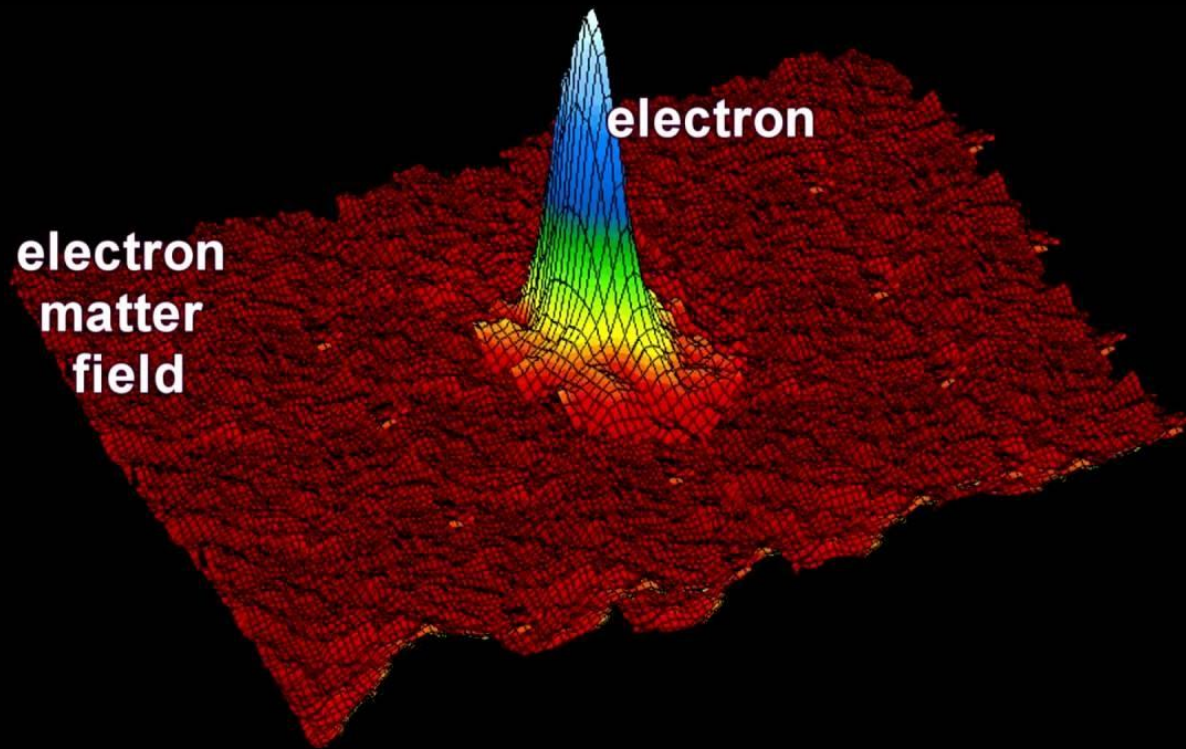
양자 물리학에서는 입자의 위치에 대한 파동 함수를 알면
모든 것을 이해할 수 있다고 생각합니다.



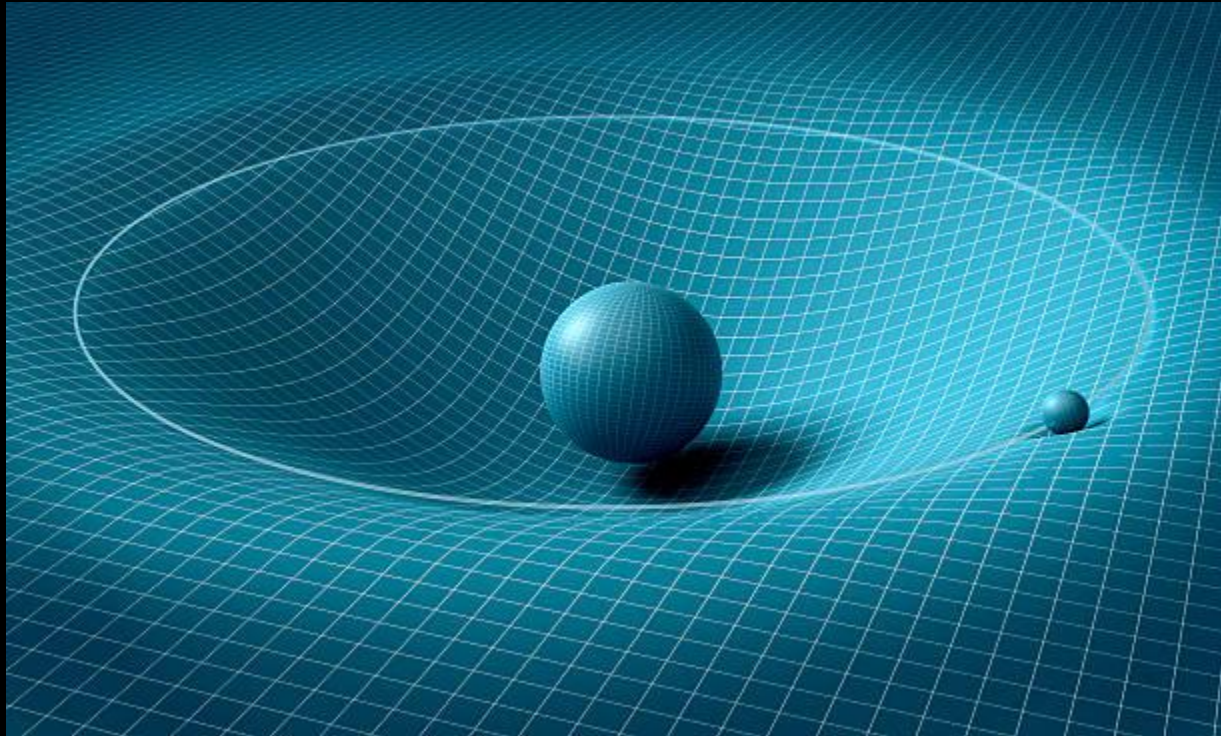
입자의 개수가 많아져서 연속체가 되면, 장_{field}을 도입하게 됩니다.



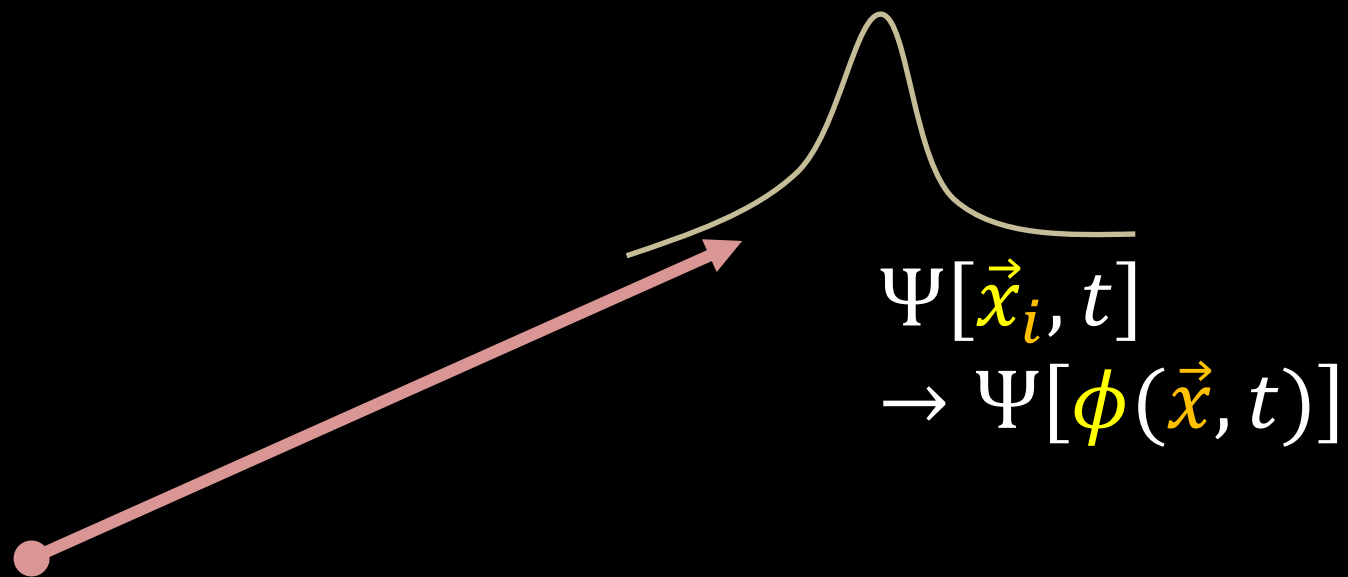
장_{field}이란 시공간에 정의된 함수를 말합니다.
따라서 파동 함수도 일종의 장_{field}이 됩니다.



따라서 물질도 장으로 표현할 수 있습니다.



전자기력 또는 중력과 같은 힘, 또는 상호 작용도
장에 의해서 표현됩니다.



최종적으로, 우리는 이렇게 이해합니다.
“이 세상을 구성하는 모든 존재는 일종의 장이다.
따라서 모든 장들의 파동 함수를 이해하는 것이
바로 자연을 완전히 이해하는 것이다.”

감사합니다