

13장

연속계: 파동

우리는 지난 시간 마지막으로
결합된 단진자 계의 진동이
연속 계의 파동 방정식으로 전환된다는 것을 보았습니다.

$$\begin{aligned}
 q_j &= \sum_r \beta'_r a_{jr} e^{i\omega_r t} \\
 &= \sum_r \beta'_r a_r \sin\left(j \frac{r\pi}{n+1}\right) e^{i\omega_r t} \\
 &= \sum_r \beta_r \sin\left(j \frac{r\pi}{n+1}\right) e^{i\omega_r t}
 \end{aligned}$$

$$\omega_r = 2 \sqrt{\frac{\tau}{md}} \sin\left(\frac{r\pi}{2(n+1)}\right)$$

연성 진동 문제에서의 최종적인 해는
고유 진동 모드의 선형 중첩으로
위와 같이 기술될 것입니다.

$$\left. \begin{array}{l} n \rightarrow \infty, \quad d \rightarrow 0, \quad \text{such that } (n+1)d = L \\ m \rightarrow 0, \quad d \rightarrow 0, \quad \text{such that } \frac{m}{d} = \rho = \text{constant} \end{array} \right\}$$

$$j \frac{r\pi}{n+1} = r\pi \frac{jd}{(n+1)d} = r\pi \frac{x}{L}$$

$$q_j(t) = \sum_r \eta_r(t) \sin\left(j \frac{r\pi}{n+1}\right)$$

연속체의 극한에서 앞에서 구한 해가
위와 같이 기술됨을 알 수 있습니다.

$$q(x, 0) = \sum_r \mu_r \sin\left(\frac{r\pi x}{L}\right)$$

$$\dot{q}(x, 0) = -\sum_r \omega_r \nu_r \sin\left(\frac{r\pi x}{L}\right)$$

초기 조건

$$\int_0^L \sin\left(\frac{r\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{s\pi x}{L}\right) dx = \frac{L}{2} \delta_{rs}$$

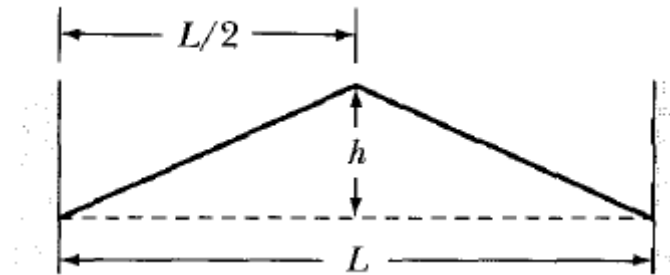
$$\mu_r = \frac{2}{L} \int_0^L q(x, 0) \sin\left(\frac{r\pi x}{L}\right) dx$$

$$\nu_r = -\frac{2}{\omega_r L} \int_0^L \dot{q}(x, 0) \sin\left(\frac{r\pi x}{L}\right) dx$$

초기 조건을 부여하면
함수 공간의 직교성에 의해
위와 같이 계수들을 결정할 수 있습니다.

$$q(x, 0) = \begin{cases} \frac{2h}{L}x, & 0 \leq x \leq L/2 \\ \frac{2h}{L}(L - x), & L/2 \leq x \leq L \end{cases}$$

$$\dot{q}(x, 0) = 0$$



예제 13.1 초기 조건으로부터 푸리에 전개 및 계수 구하기

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} \rho \int_0^L \left(\frac{\partial q}{\partial t} \right)^2 dx \\
&= \frac{1}{2} \rho \int_0^L \left[\sum_r \dot{\eta}_r \sin \left(\frac{r\pi x}{L} \right) \right]^2 dx \\
&= \frac{1}{2} \rho \sum_{r,s} \dot{\eta}_r \dot{\eta}_s \int_0^L \sin \left(\frac{r\pi x}{L} \right) \sin \left(\frac{s\pi x}{L} \right) dx \\
&= \frac{\rho L}{4} \sum_{r,s} \dot{\eta}_r \dot{\eta}_s \delta_{rs} \\
&= \frac{\rho L}{4} \sum_r \omega_r^2 (\mu_r \sin \omega_r t + \nu_r \cos \omega_r t)^2
\end{aligned}$$

$$\eta_r(t) = \beta_r e^{i\omega_r t}$$

실수부 선택

이번에는 앞에서 얻은 해로부터
진동하는 현의 에너지를 구해 봅시다.

$$\begin{aligned}
U &= \frac{1}{2} \tau \int_0^L \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)^2 dx \\
&= \frac{1}{2} \tau \int_0^L \left[\sum_r \frac{r\pi}{L} \eta_r \cos\left(\frac{r\pi x}{L}\right) \right]^2 dx \\
&= \frac{\tau}{2} \sum_{r,s} \frac{r\pi}{L} \frac{s\pi}{L} \eta_r \eta_s \int_0^L \cos\left(\frac{r\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{s\pi x}{L}\right) dx \\
&= \frac{\tau}{2} \sum_{r,s} \frac{r\pi}{L} \frac{s\pi}{L} \eta_r \eta_s \cdot \frac{L}{2} \delta_{rs} \\
&= \frac{\tau}{2} \sum_r \frac{r^2 \pi^2}{L^2} \cdot \frac{L}{2} \eta_r^2 \\
&= \frac{\rho L}{4} \sum_r \omega_r^2 \eta_r^2 \\
&= \frac{\rho L}{4} \sum_r \omega_r^2 (\mu_r \cos \omega_r t - \nu_r \sin \omega_r t)^2
\end{aligned}$$

이번에는 앞에서 얻은 해로부터
진동하는 현의 에너지를 구해 봅시다.

$$\begin{aligned}
 E &= T + U \\
 &= \frac{\rho L}{4} \sum_r \omega_r^2 (\mu_r^2 + \nu_r^2) \\
 &= \frac{\rho L}{4} \sum_r \omega_r^2 |\beta_r|^2
 \end{aligned}$$

따라서 총 에너지는 위와 같습니다.
따라서 총 에너지는 각 모드들의 에너지의 합으로
표시됨을 알 수 있습니다.

$$\begin{aligned}
\langle T \rangle &= \frac{\rho L}{4} \sum_r \omega_r^2 \langle (\mu_r \sin \omega_r t + \nu_r \cos \omega_r t)^2 \rangle & \langle U \rangle &= \frac{\rho L}{4} \sum_r \omega_r^2 \langle (\mu_r \cos \omega_r t - \nu_r \sin \omega_r t)^2 \rangle \\
&= \frac{\rho L}{8} \sum_r \omega_r^2 (\mu_r^2 + \nu_r^2) & &= \frac{\rho L}{8} \sum_r \omega_r^2 (\mu_r^2 + \nu_r^2) \\
&= \frac{\rho L}{8} \sum_r \omega_r^2 |\beta_r|^2 & &= \frac{\rho L}{8} \sum_r \omega_r^2 |\beta_r|^2
\end{aligned}$$

$$\langle T \rangle = \langle U \rangle$$

한 편, 에너지의 시간 평균은 위와 같습니다.
즉, 운동 에너지와 퍼텐셜 에너지의
시간 평균은 같음을 알 수 있습니다.

그러면 이 때,
장 전체를 기술하는 라그랑지안은
어떻게 될까요?

$$L = T - U$$

$$= \int \left[\frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial q}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \tau \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)^2 \right] dx$$

라그랑지안 밀도

장의 라그랑지안을 적으면
국소적으로 정의되는 라그랑지안 밀도를 얻게 됩니다.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial q}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \tau \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)^2$$

$$\delta \mathcal{L} = \left(-\rho \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + \tau \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \right) \delta q + (\text{boundary terms}) = 0$$

일반적으로 장 이론에서는
 라그랑지안 밀도를 사용하여 계를 기술하게 됩니다.
 이것을 변분하여 운동 방정식을 얻을 수도 있습니다.

$$\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = \frac{\rho}{\tau} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = \frac{\rho}{\tau} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2}}$$

여기에서 위와 같은 방정식을 얻게 됩니다.
 이것은 우리가 지난 장에서 얻은 파동 방정식과
 같은 방정식입니다.

$$\begin{aligned}
 L &= T - U \\
 &= \frac{\rho b}{4} \sum_r \dot{\eta}_r^2 - \frac{\rho b}{4} \sum_r \omega_r^2 \eta_r^2 \\
 &= \frac{\rho b}{4} \sum_r (\dot{\eta}_r^2 - \omega_r^2 \eta_r^2)
 \end{aligned}$$

$$\ddot{\eta}_r + \omega_r^2 \eta_r = 0$$

각 모드들의 운동 방정식

흥미롭게도 방정식의 **선형성**에 의해
 라그랑지안을 위와 같이 모드들의 합으로
 기술하는 것도 가능합니다.

$$\rho \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + D \frac{\partial q}{\partial t} - \tau \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = F(x, t)$$

$$q(x, t) = \sum_r \eta_r(t) \sin\left(\frac{r\pi x}{b}\right)$$

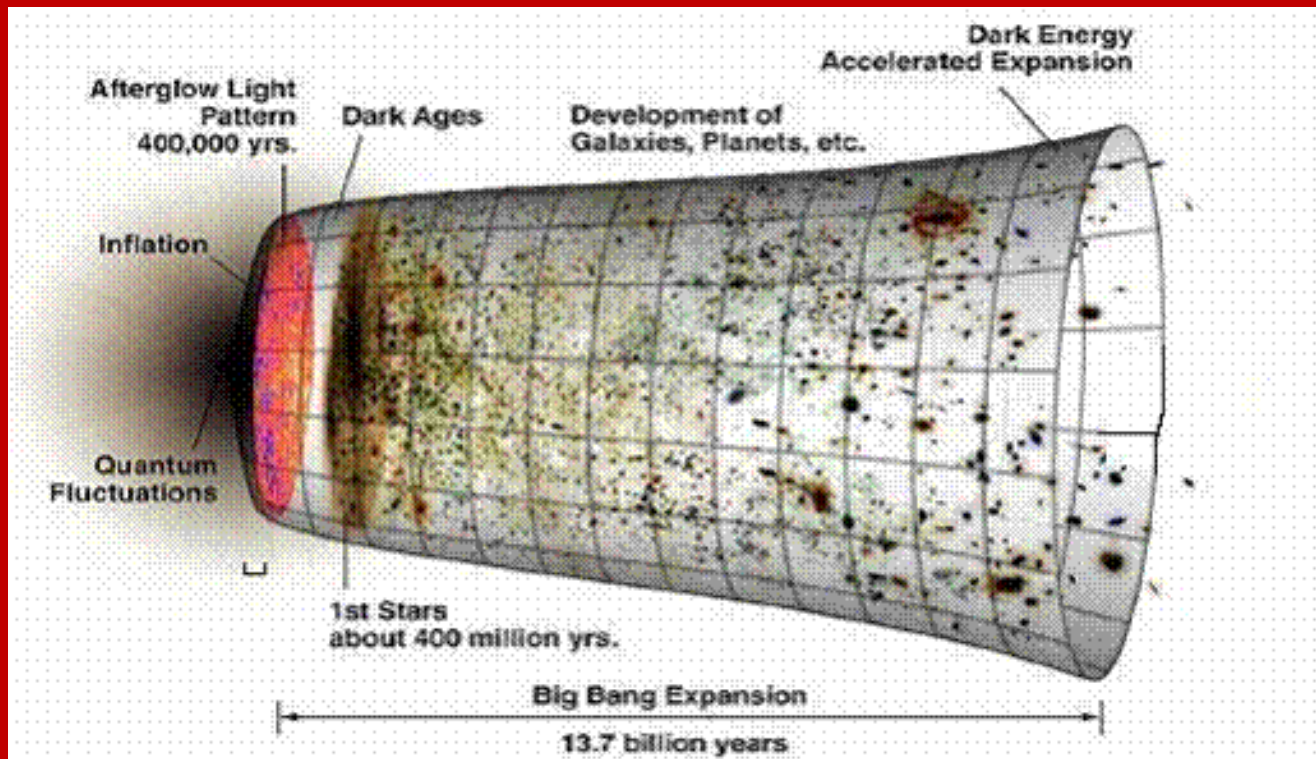
$$\ddot{\eta}_s + \frac{D}{\rho} \dot{\eta}_s + \frac{s^2 \pi^2 \tau}{\rho b^2} \eta_s = \frac{2}{\rho b} \int_0^b F(x, t) \sin\left(\frac{s\pi x}{b}\right) dx = \frac{2}{\rho b} f_s(t)$$

여기에 감쇠 효과를 고려하면
각 모드별로 다음과 같은 방정식을 만족함을 알 수 있습니다.

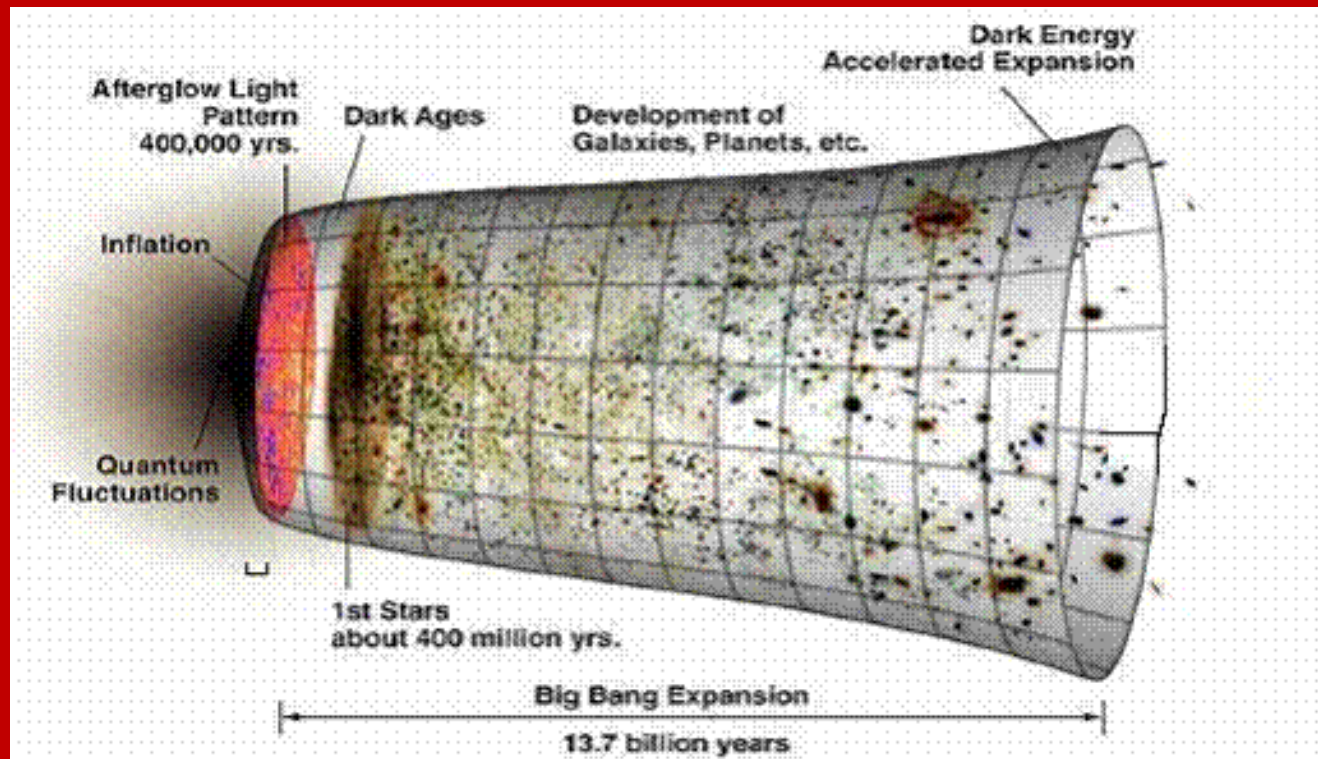
따라서 우리가 장을 다룰 때,
장이 선형적인 방정식을 따른다면,
아래의 두 관점으로 연구할 수 있습니다.

첫째는 장의 운동 방정식을 직접 푸는 것이고,
둘째는 장을 모드별로 분해해서,
각 모드들에 대해서 푸는 것입니다.

모드별로 분해해서 계를 이해하는 아주 흥미로운 예로
우주 배경 복사에 대한 문제가 있습니다.



1980년 앨런 구스는 빅뱅 이론의 몇 가지 문제를 해결하기 위해 초기 우주에 **급팽창inflation**이 있었다고 가정합니다.
우리가 평탄한 우주를 보는 것은 사실은 초기에 아주 작은 부분이 크게 늘어났기 때문이라는 것입니다.



이것을 **인플레이션 우주론** *inflationary cosmology*이라고 합니다.
인플레이션 우주론은 아직 실험적으로 검증된 이론은 아니지만
빅뱅 이론이 가진 몇 가지 문제를
해결해주는 중요한 아이디어로 생각됩니다.

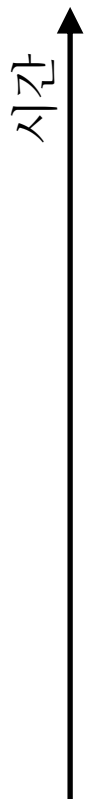
인플레이션 우주론은
빅뱅 우주론의 문제를 해결해줄 뿐만 아니라
실은 우주 배경 복사의 비등방성 문제도
놀랄 만큼 정교하게 설명해 줍니다.
어떻게 이런 일이 가능할까요?

시간



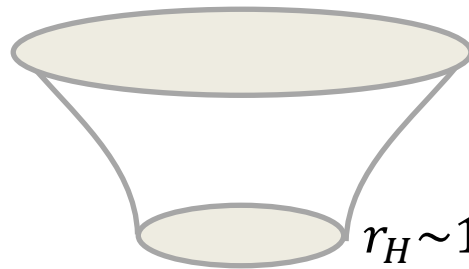
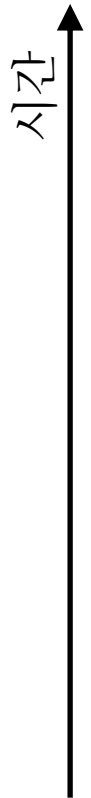
급팽창하는 우주

급팽창하는 우주



$r_H \sim 1/H$
우주의 크기

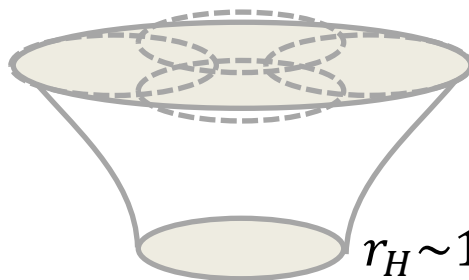
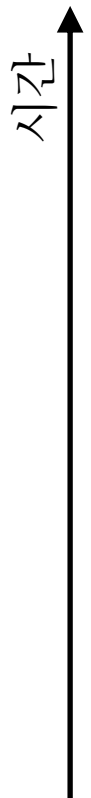
급팽창하는 우주



우주의 크기는
인플레이션에 의해
점점 커집니다.

$r_H \sim 1/H$
우주의 크기

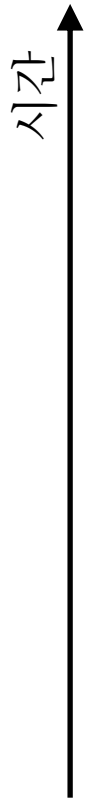
급팽창하는 우주



앞에서 보다
격자의 개수가 더 많아집니다

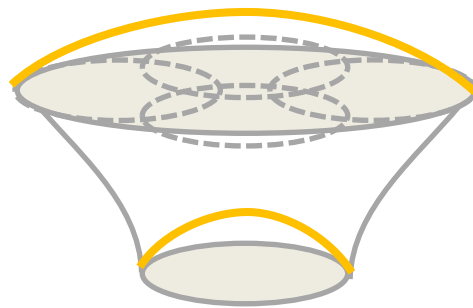
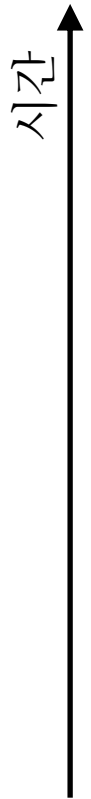
$r_H \sim 1/H$
우주의 크기

급팽창하는 우주



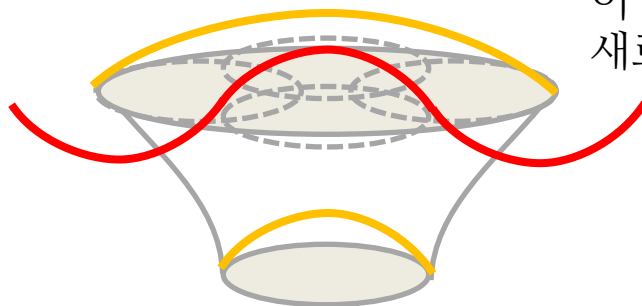
각 격자에 대해
양자 요동이 존재합니다.
 $T \sim H$

급팽창하는 우주



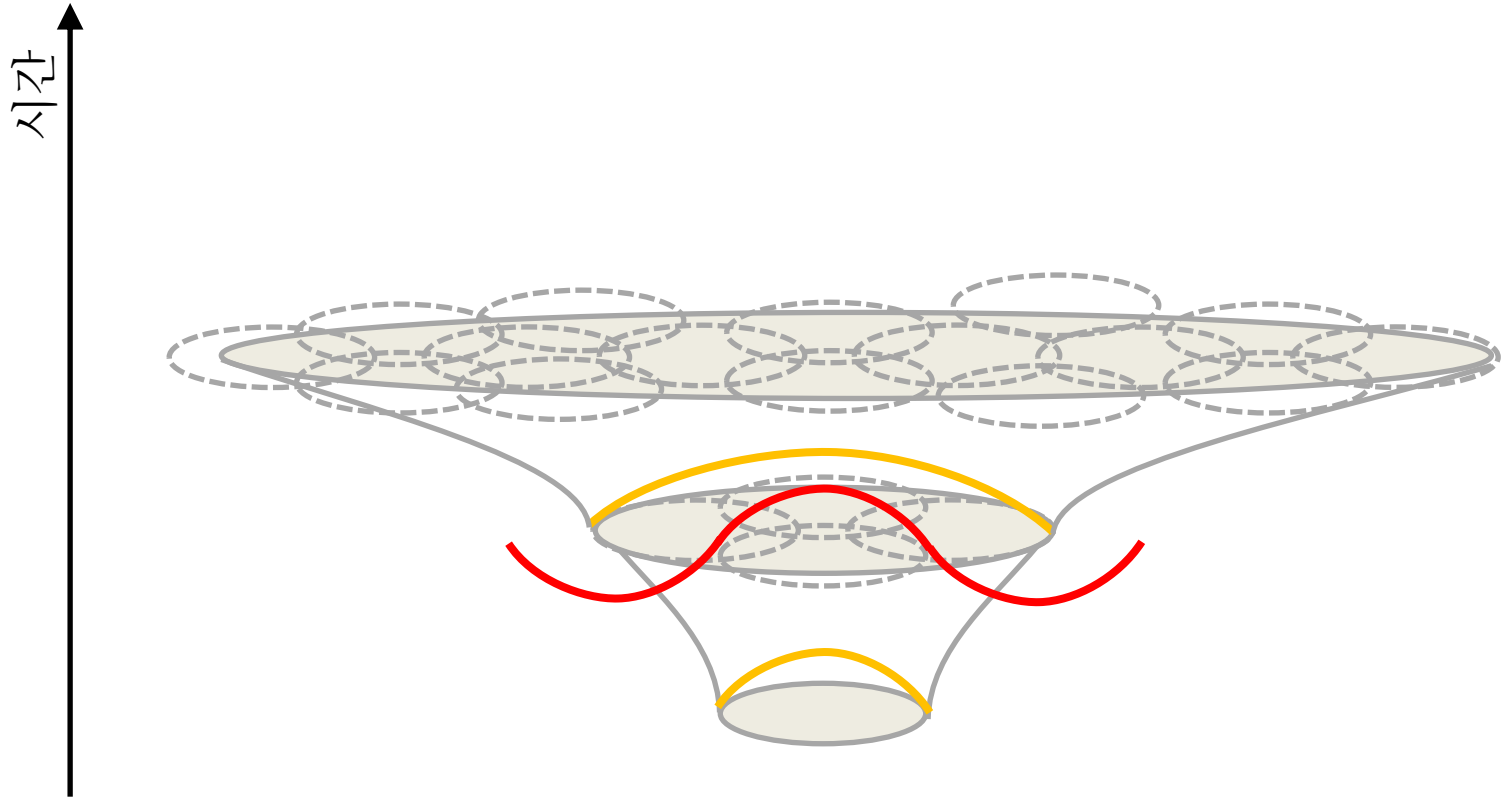
앞의 요동이 우주가 커짐에 따라
펼쳐집니다.
따라서 파장이 길어집니다.

급팽창하는 우주

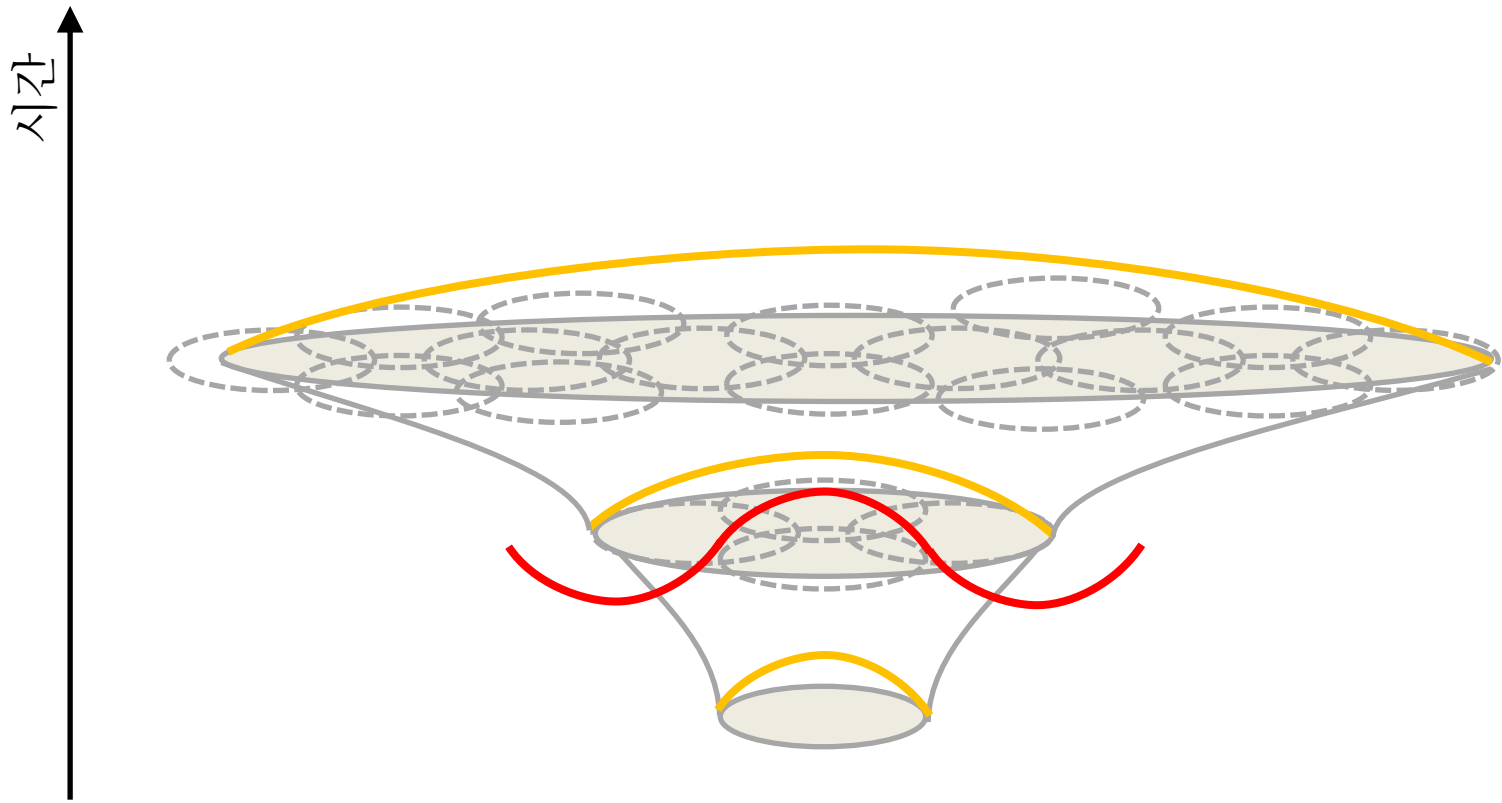


이 때 격자별로 아까와 같은 파장의 새로운 요동이 추가됩니다.

급팽창하는 우주

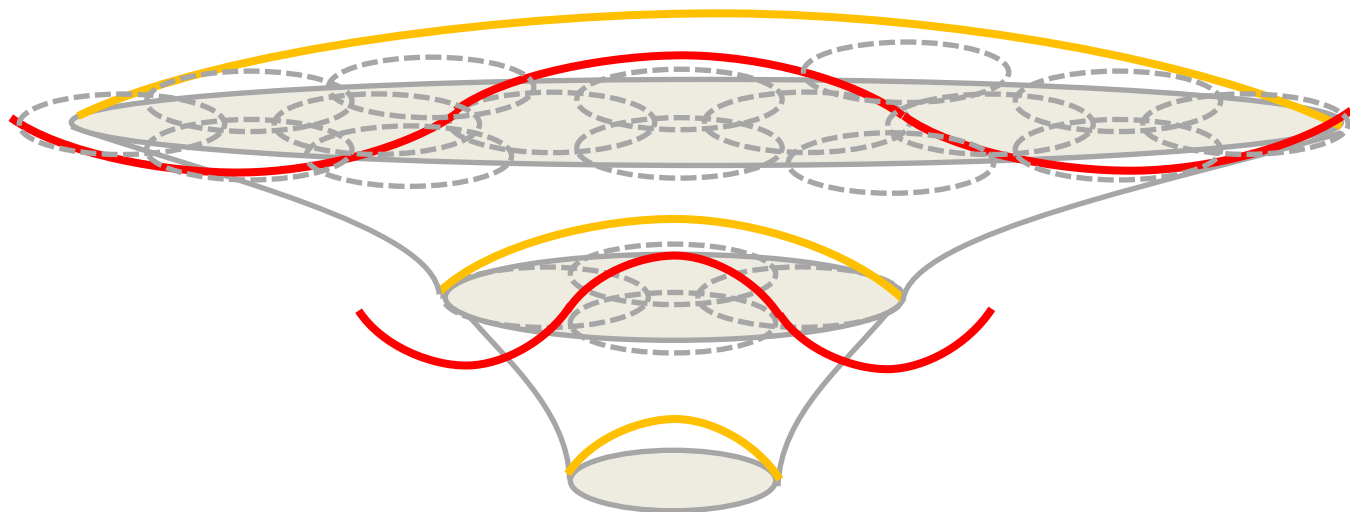


급팽창하는 우주



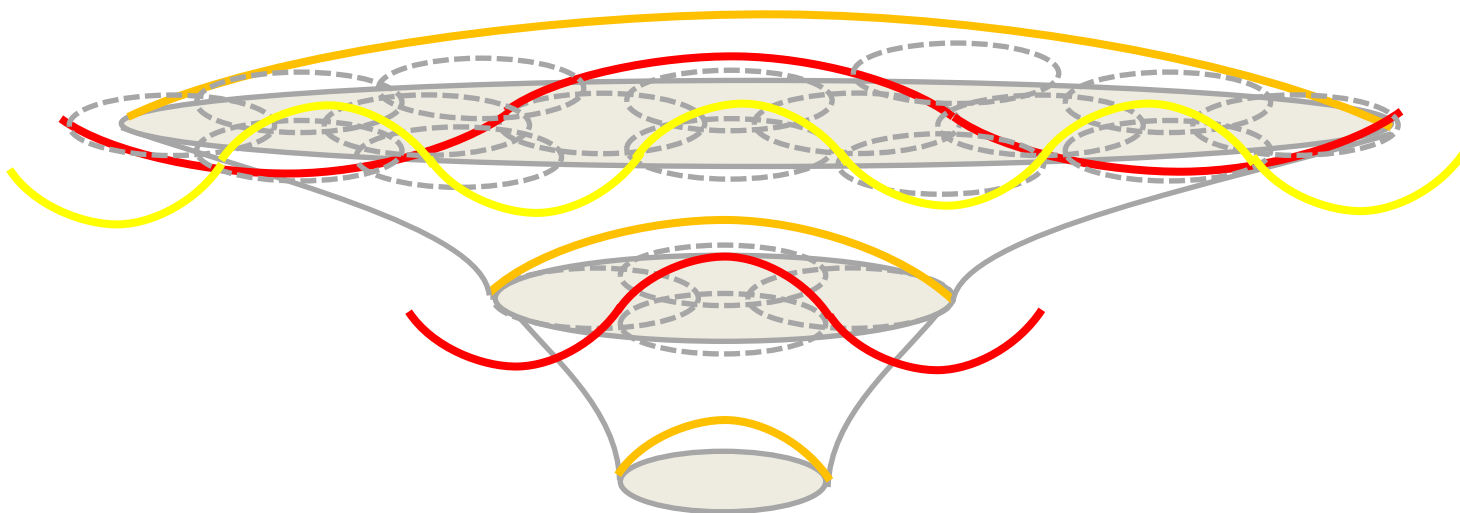
급팽창하는 우주

시간



급팽창하는 우주

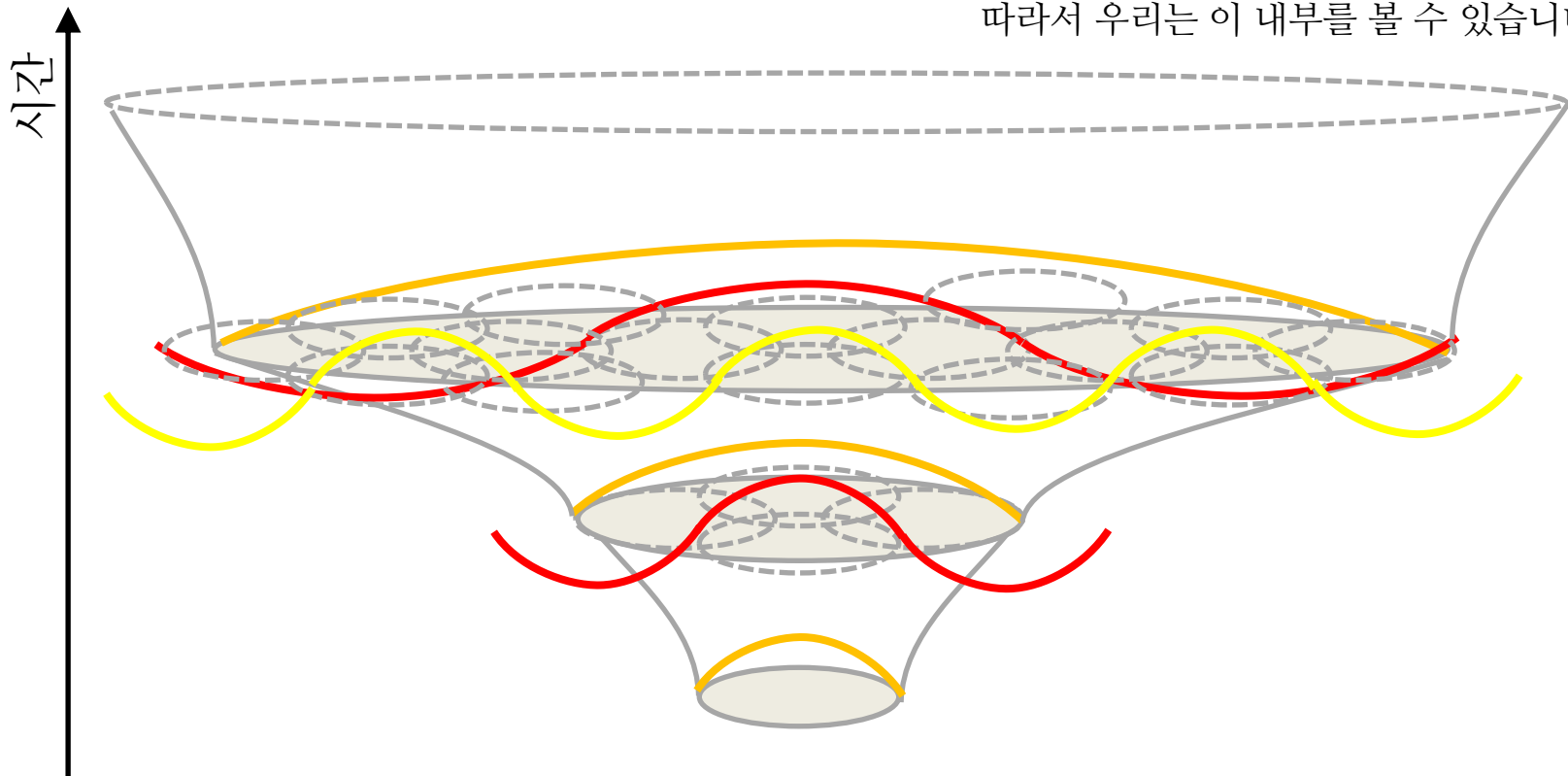
시간



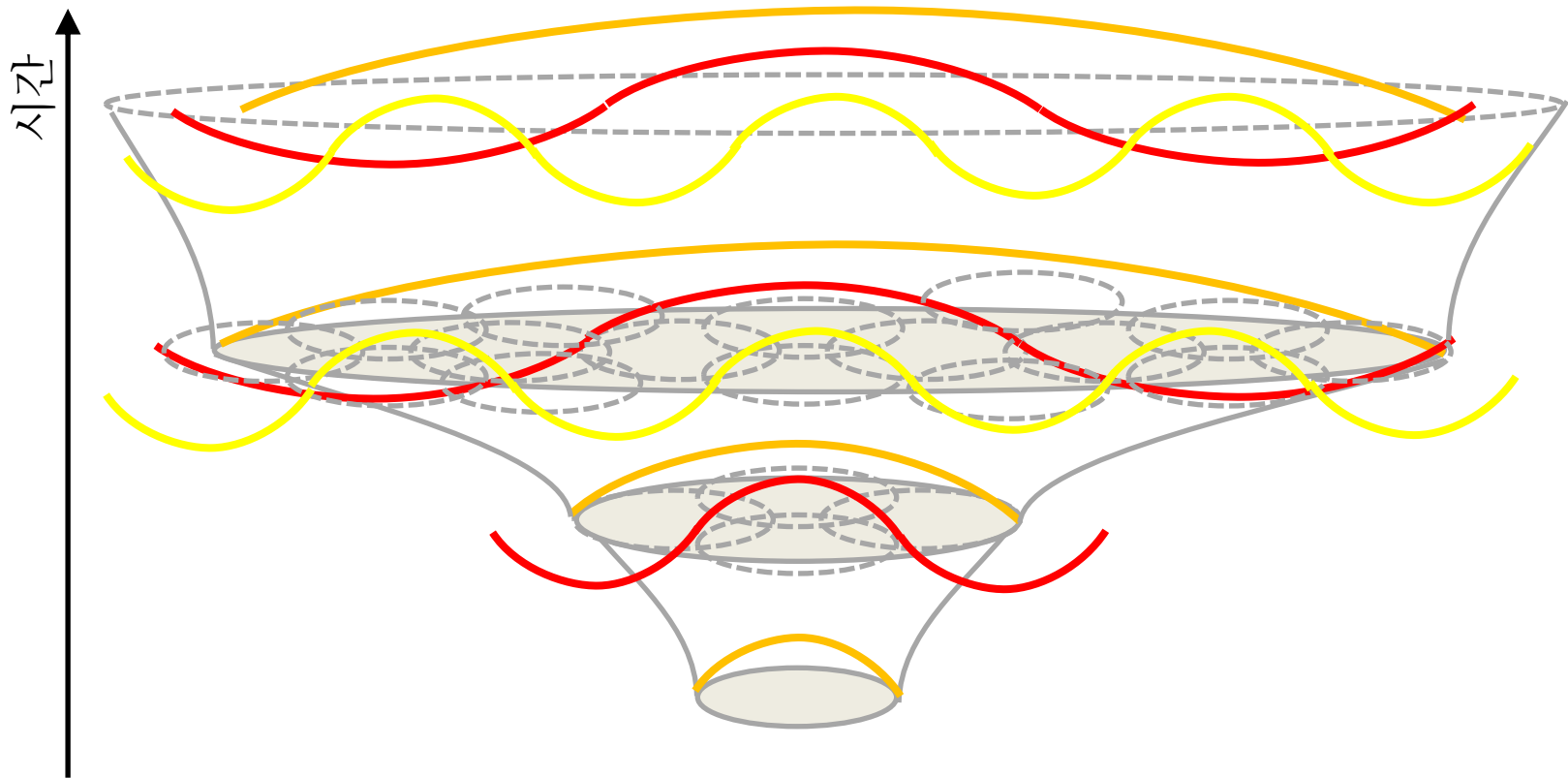
급팽창하는 우주

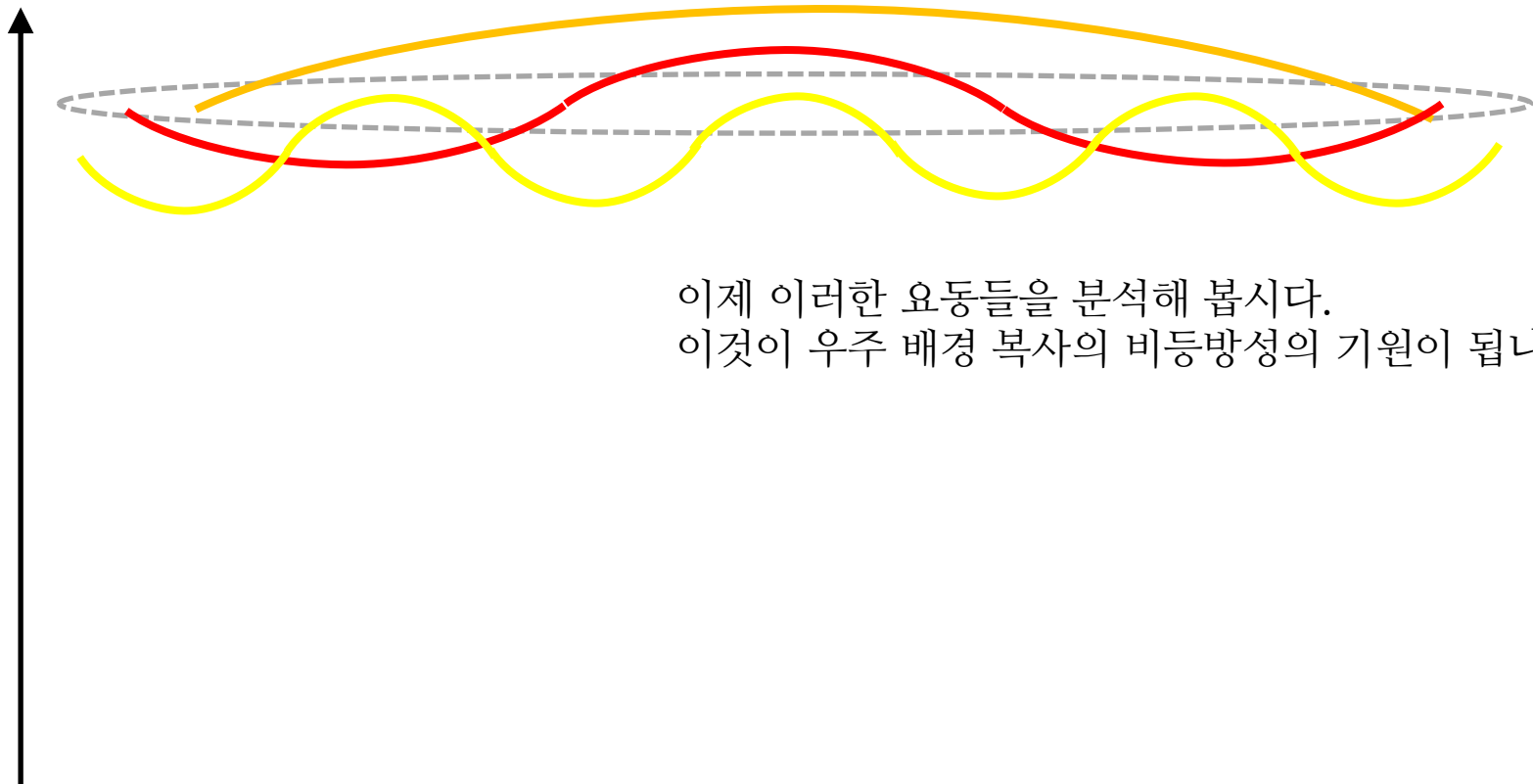
인플레이션 종료:

이 때 우주의 격자가 굉장히 커지게 됩니다.
따라서 우리는 이 내부를 볼 수 있습니다.

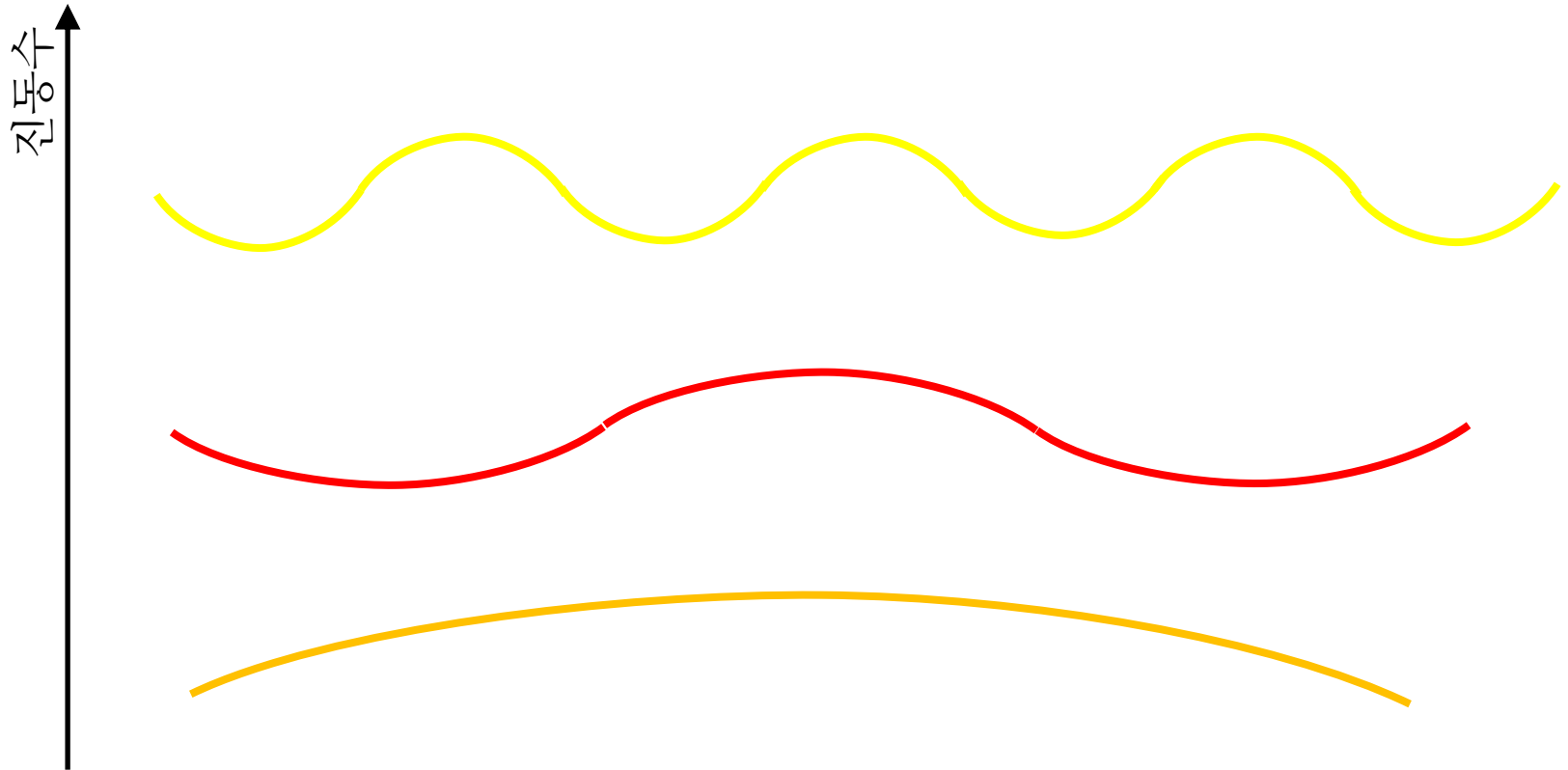


급팽창하는 우주

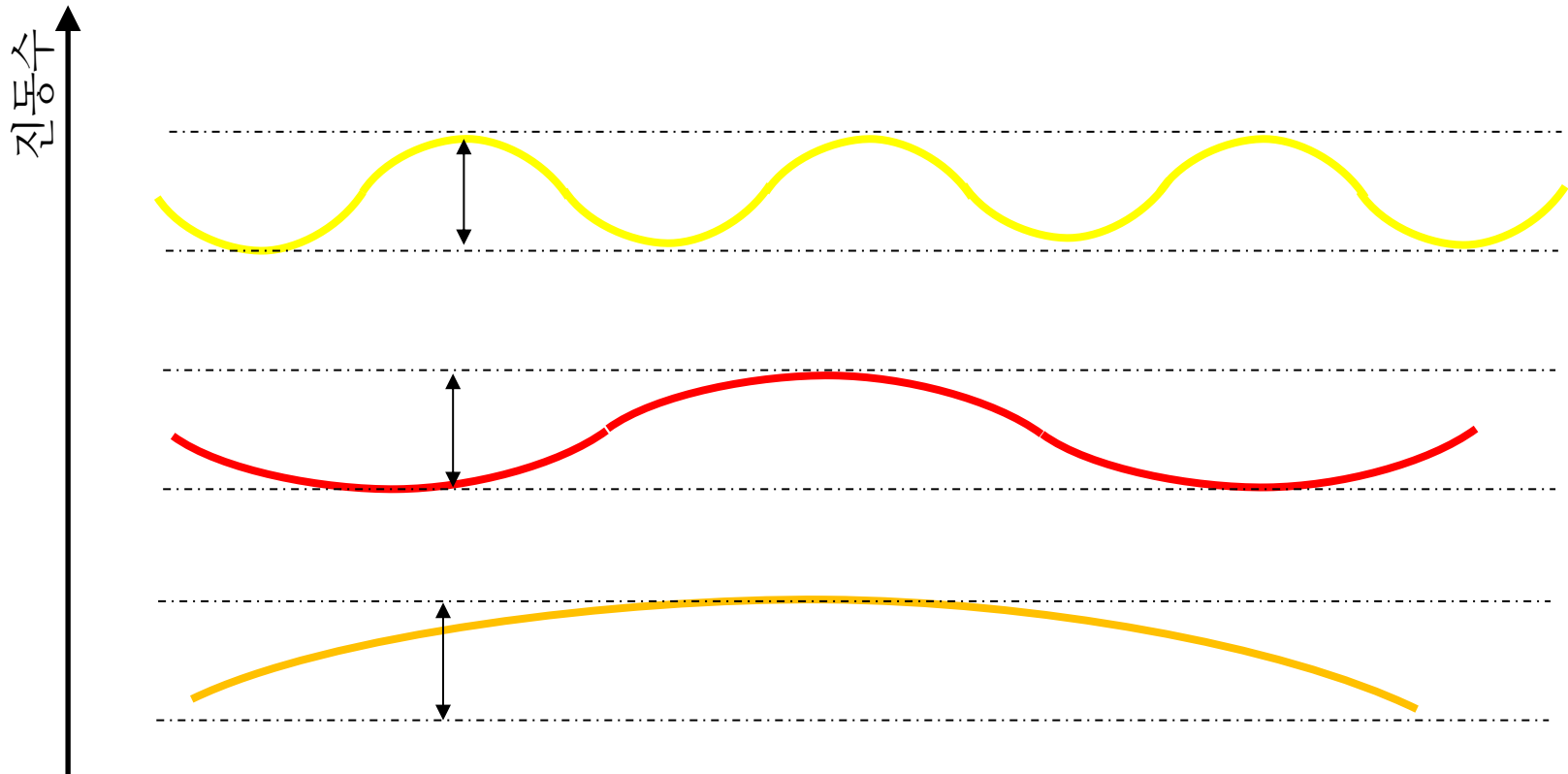


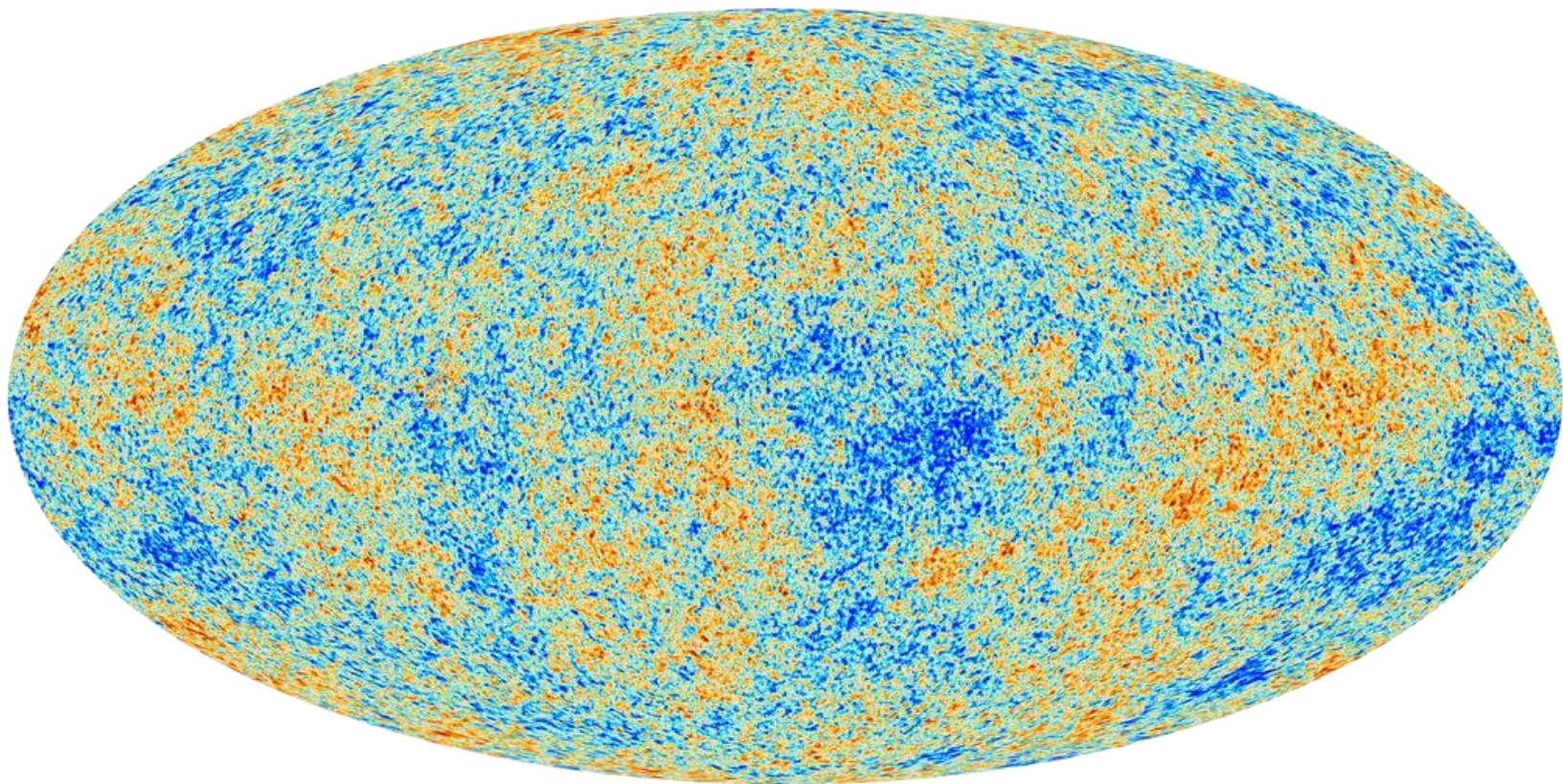


요동들을 진동수에 따라 나누어 볼 수 있습니다.
요동들의 방정식이 선형적이기 때문에, 이런 일이 가능합니다.

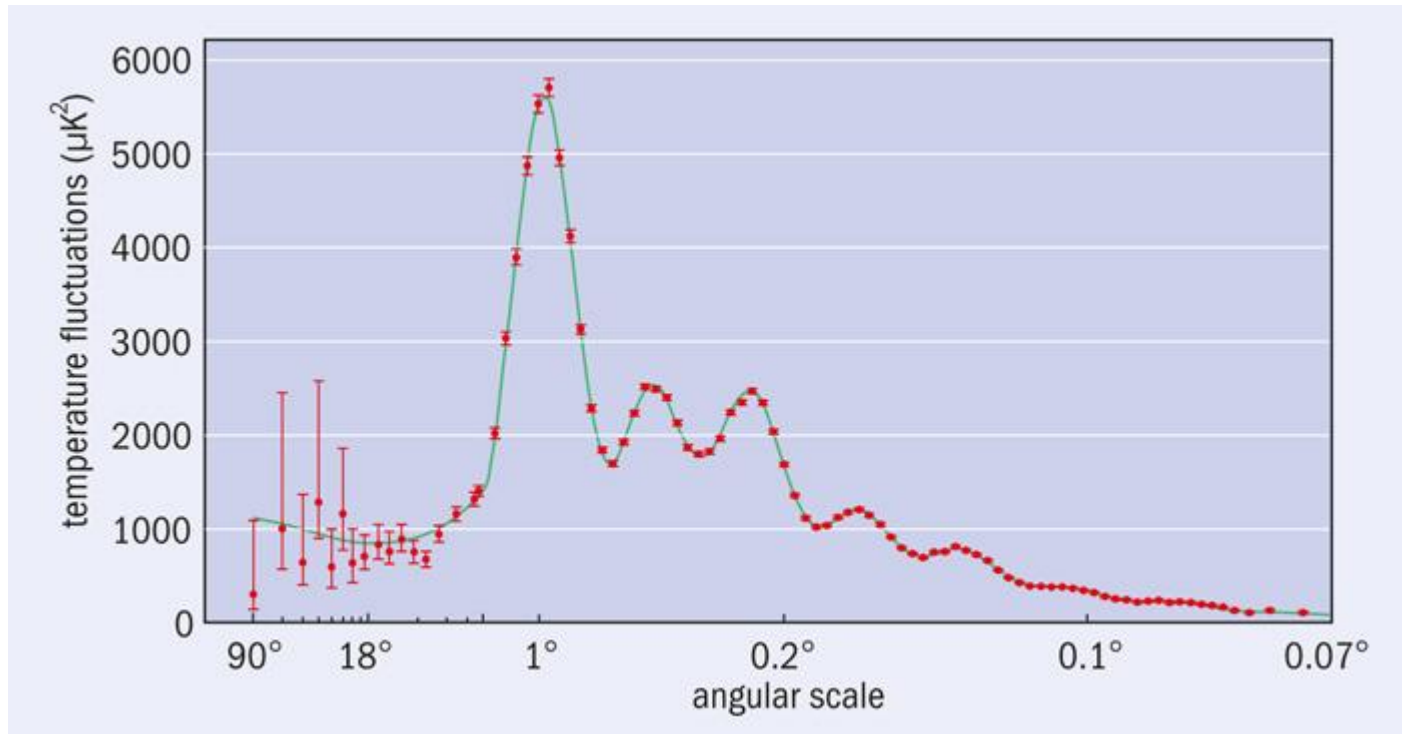


가장 간단한 경우, 보통은 파장만 다르고 진폭은 일정하게 됩니다.
그러나 자세한 것은 인플레이션이 시작하고 끝나는 메커니즘에 달려있습니다.





이러한 방식으로 우주 배경 복사의
비등방성을 설명할 수 있습니다.



이러한 비등방성은 인플레이션 이론으로 아주 잘 설명됩니다.
그러나 아직 추가로 검증되어야 할 여지가 남아있습니다.

이렇게 인플레이션 우주론은
우주의 비등방성에 대한 정교한 예측을 가능하게 하며,
이러한 예측은 우주 배경 복사에 대한 관측 결과와
비교가 가능합니다.

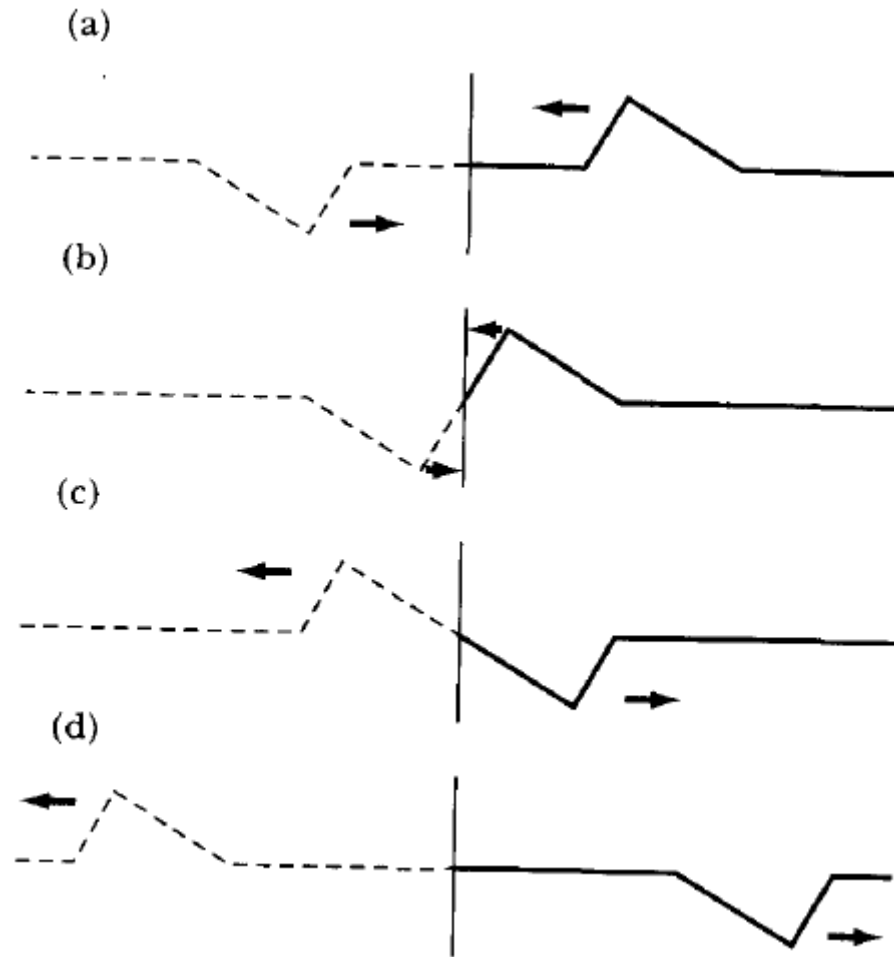
바로 이것이 인플레이션 우주론이
현대 우주론의 중심 가설로 자리잡게 된 이유라고 할 수 있습니다.

$$\sqrt{\tau/\rho} = v$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0}$$

$$\Psi = f(x + vt) + g(x - vt)$$

위와 같이 파동의 속력을 정의하면
 파동 방정식의 일반해를 적을 수 있습니다.
 즉, 왼쪽으로 진행하는 파동과 오른쪽으로 진행하는 파동의
 선형 중첩이라는 것입니다.



이러한 관점을 통해서 경계 조건을 부여하고
고정단 반사와 같은 현상을
이해할 수 있습니다.

$$\Psi(x, t) \equiv \psi(x) \cdot \chi(t)$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{\omega^2}{v^2}\psi = 0$$

$$\frac{d^2\chi}{dt^2} + \omega^2\chi = 0$$

이번에는 변수 분리의 방법을 사용해서
방정식을 풀어 봅시다.
여기에서 분리 상수가 도입되어야 합니다.

$$\psi(x) = Ae^{i(\omega/v)x} + Be^{-i(\omega/v)x}$$

$$\chi(t) = Ce^{i\omega t} + De^{-i\omega t}$$

$$\Psi_r(x, t) \sim \exp[\pm i(\omega_r/v)(x \pm vt)]$$

변수 분리된 각 방정식의 일반해는 위와 같습니다.
 따라서 두 항을 곱하면
 일반적으로 위와 같은 항의 선형 중첩으로 기술됩니다.

$$\psi(x) = Ae^{i(\omega/v)x} + Be^{-i(\omega/v)x}$$

$$\chi(t) = Ce^{i\omega t} + De^{-i\omega t}$$

$$\Psi_r(x, t) \sim \exp[\oplus i(\omega_r/v) (x \ominus vt)]$$

따라서 일반 해는 **왼쪽 또는 오른쪽 방향**의 선형 중첩이며
 진폭이 실수 값을 가지게 하도록
허수 앞의 부호를 선택해서 조합할 수 있습니다.

이제 이 파동으로 기술할 수 있는 두 가지 상태를 살펴봅시다.
하나는 **속박**bound 상태이고
다른 하나는 **산란**scattering 상태입니다.

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2\psi = 0$$

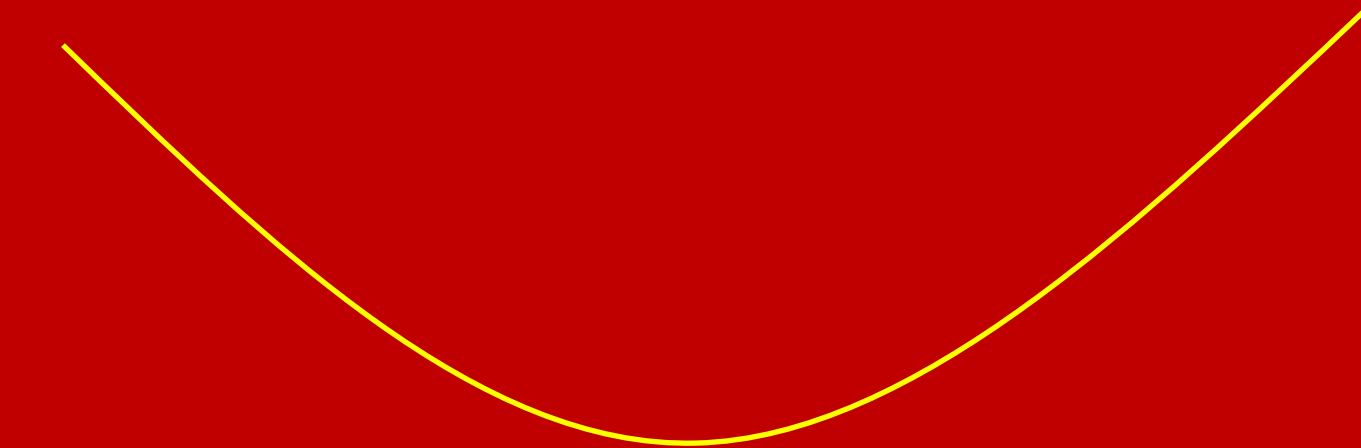
$$k^2 \equiv \frac{\omega^2}{v^2}$$

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{2\pi v}{\omega} \quad \text{파장}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{전파 상수}$$

한 편, 공간 방향의 방정식은
헬름홀츠 방정식의 형태로 적을 수도 있습니다.

$V(x)$

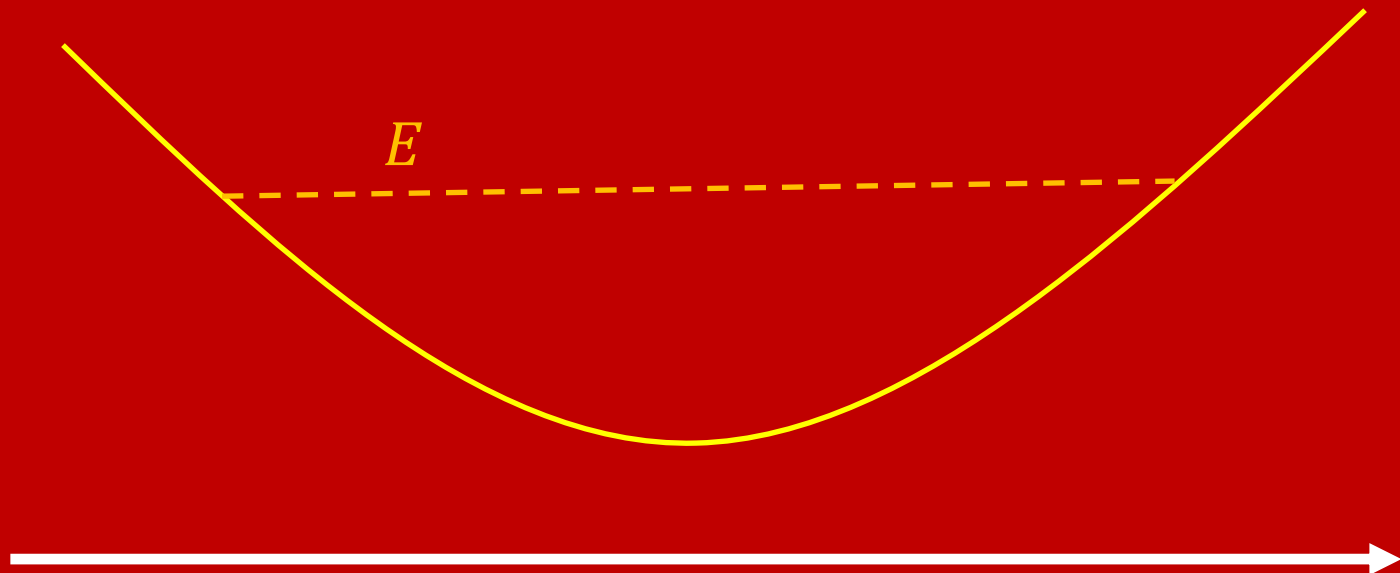


x

$V(x)$

E

x

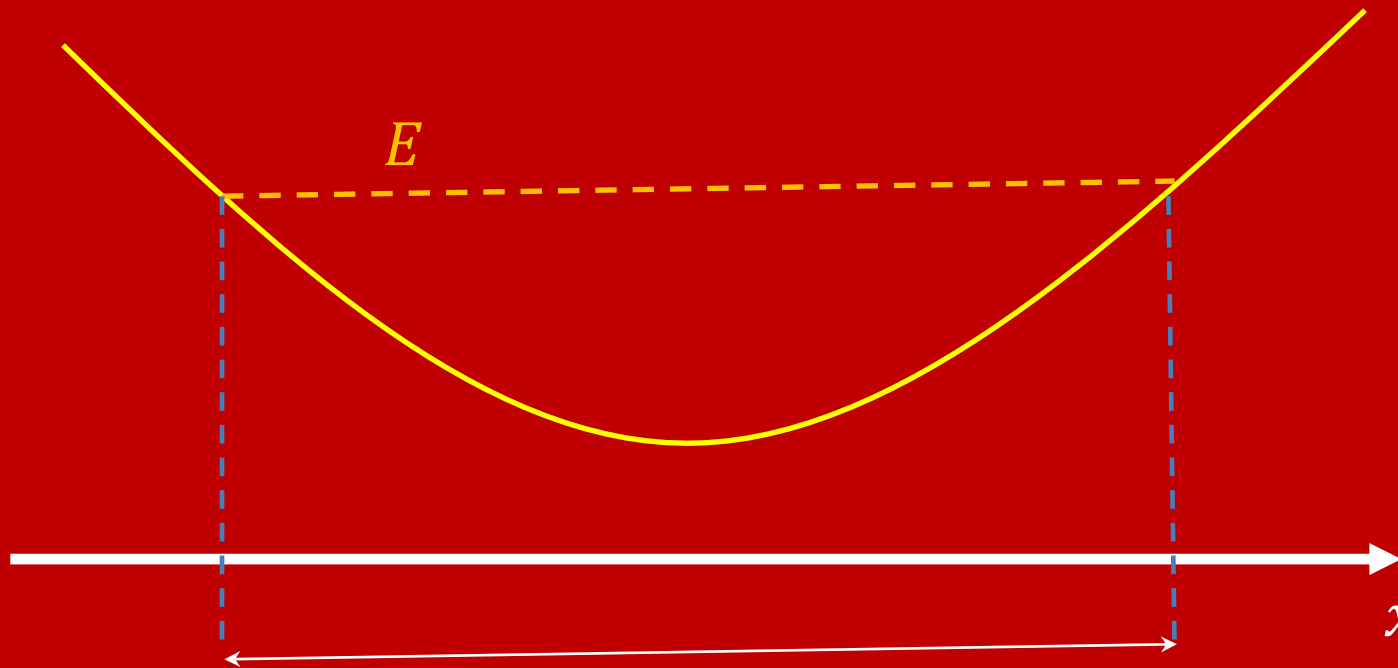


$V(x)$

E

x

허용된 영역



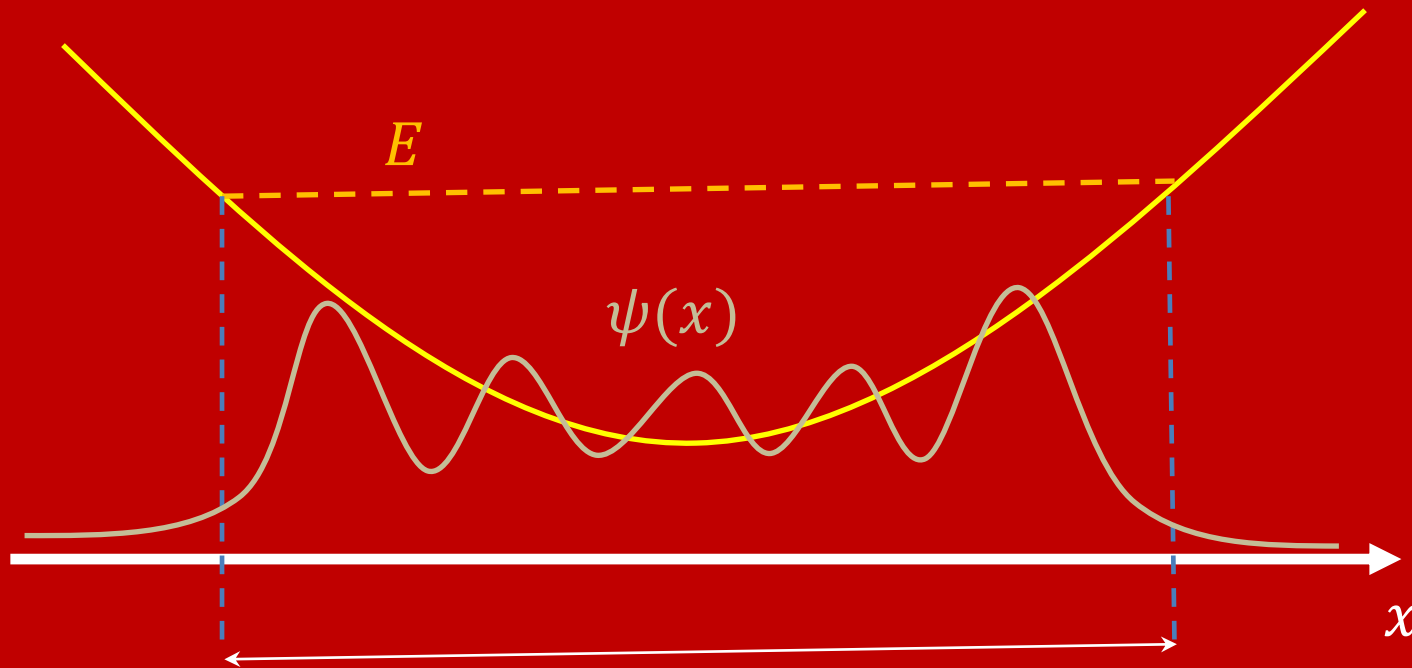
$V(x)$

E

$\psi(x)$

x

허용된 영역



$V(x)$

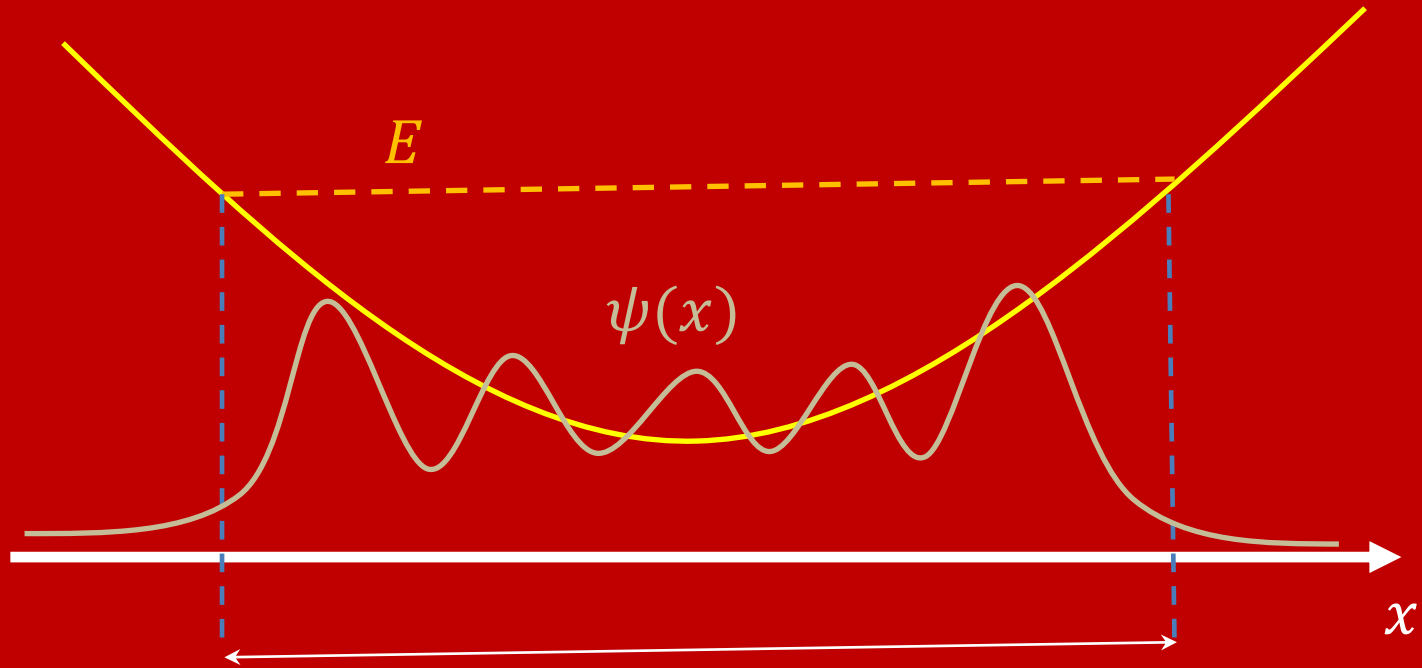
E

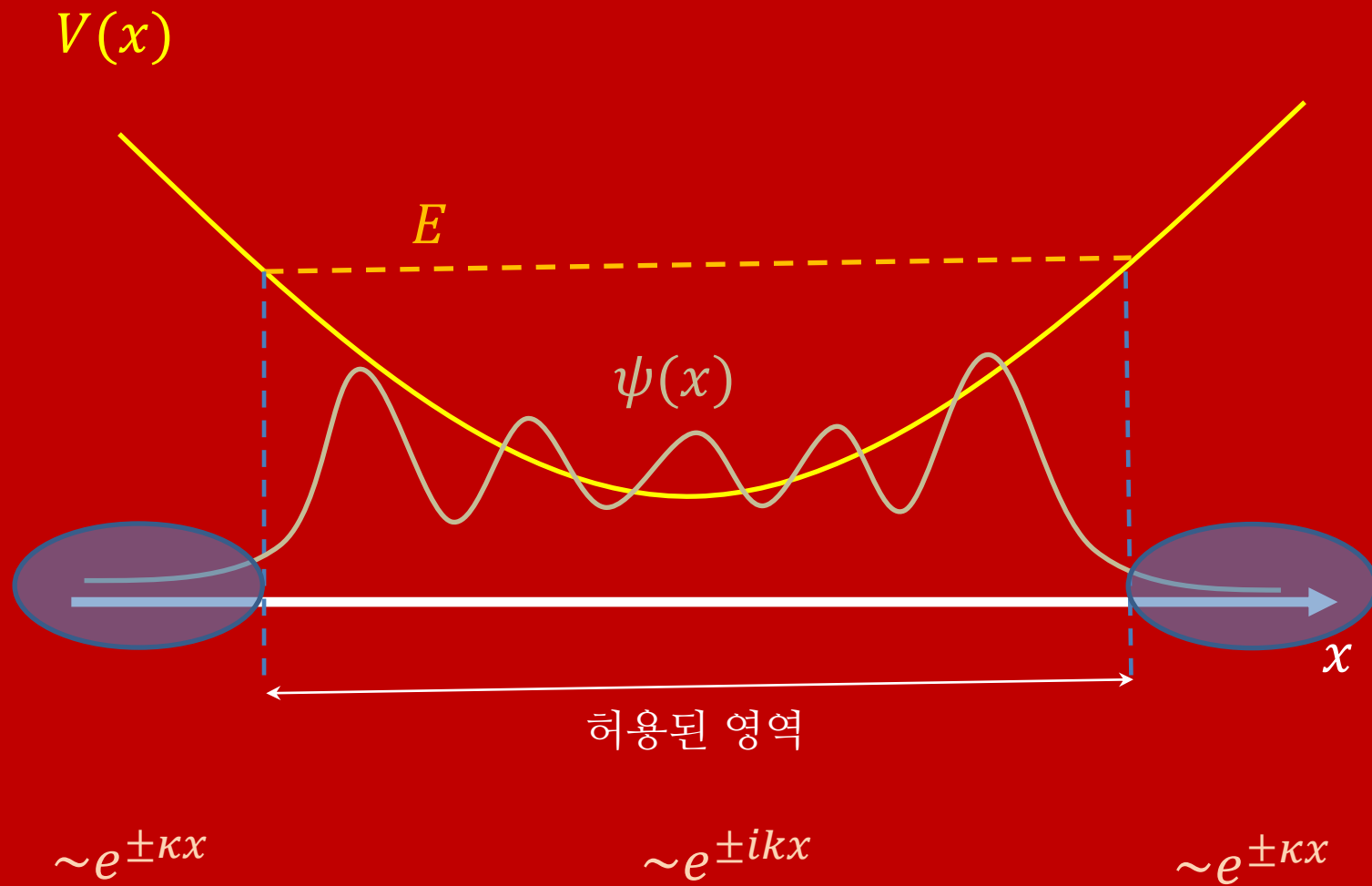
$\psi(x)$

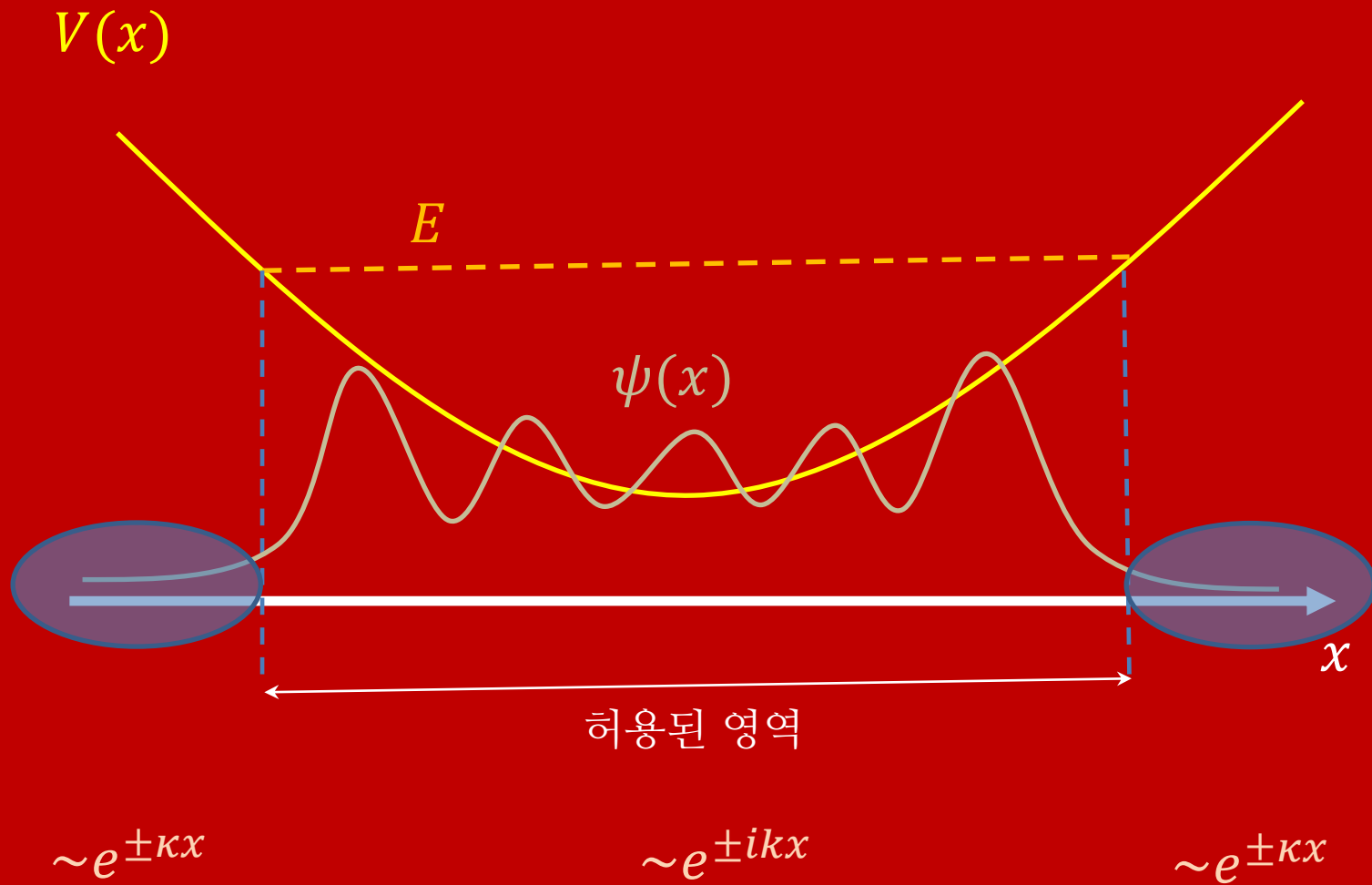
x

허용된 영역

$\sim e^{\pm ikx}$







속박 상태 bound state

$$\Psi(x, t) \sim e^{-ik(x-vt)} = e^{i(\omega t - kx)}$$

$$\Psi = \Psi_+ + \Psi_- = Ae^{-ik(x+vt)} + Ae^{-ik(x-vt)}$$

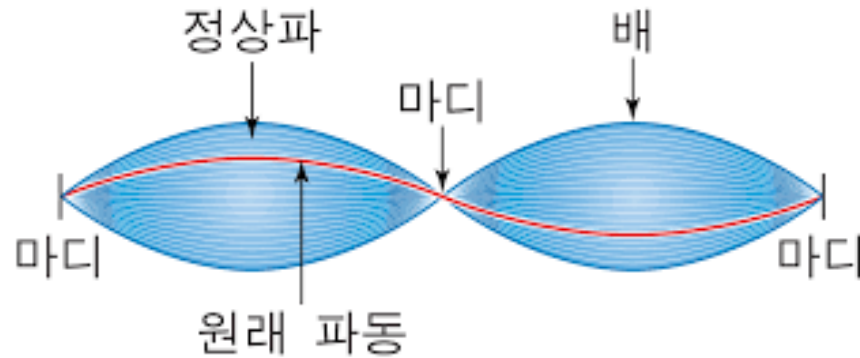
$$= Ae^{-ikx}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$$

$$= 2Ae^{-ikx} \cos \omega t$$

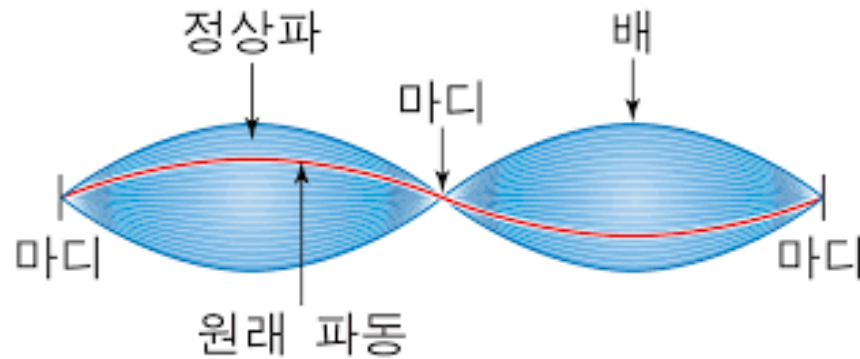
$$= 2A \cos kx \cos \omega t$$

실수 부분

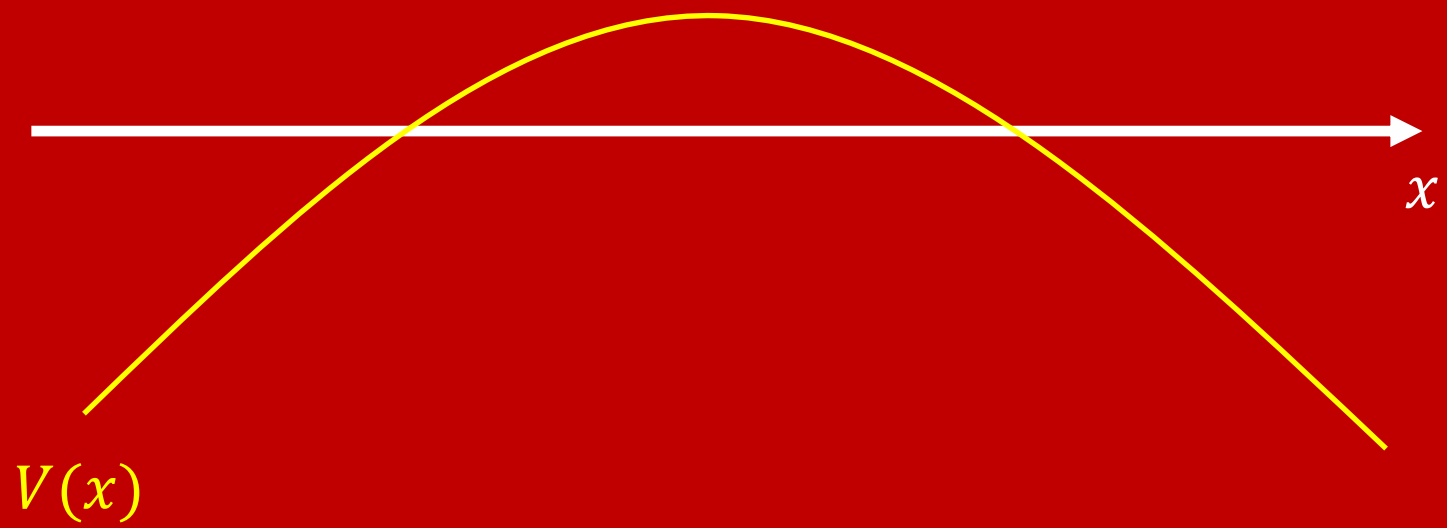
파수와 각진동수로 기술된 기본적인 파동은 위와 같습니다.
이것을 조합하여 정상파standing wave를 기술할 수도 있습니다.

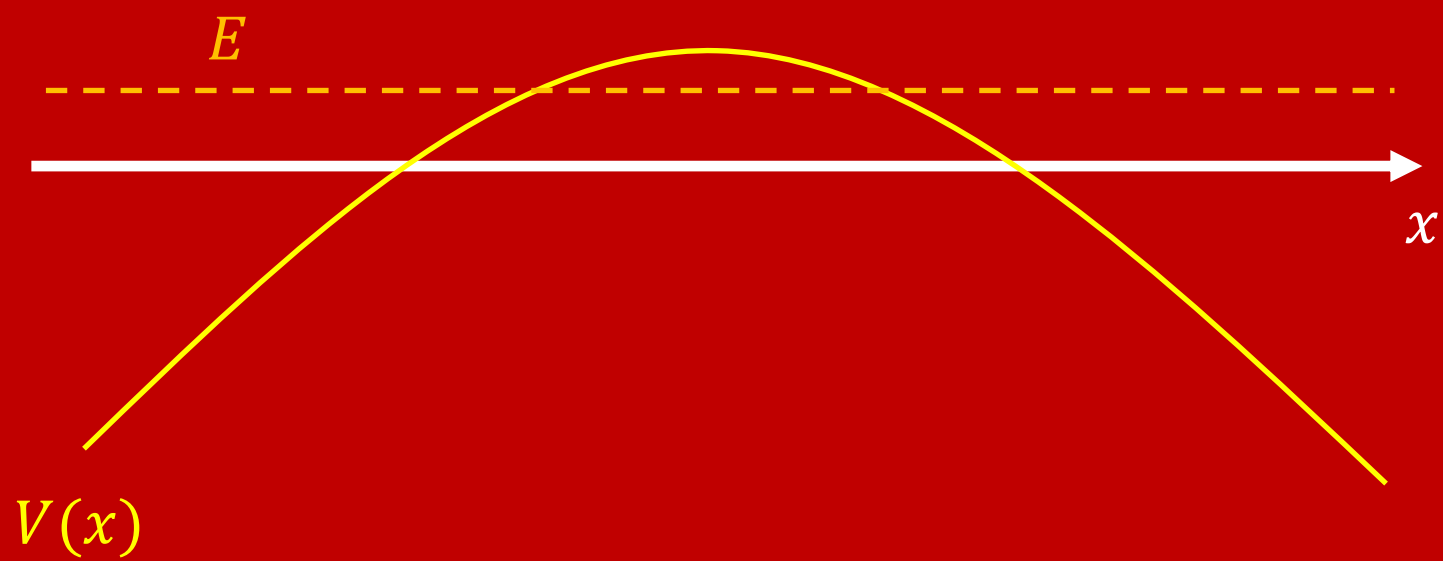


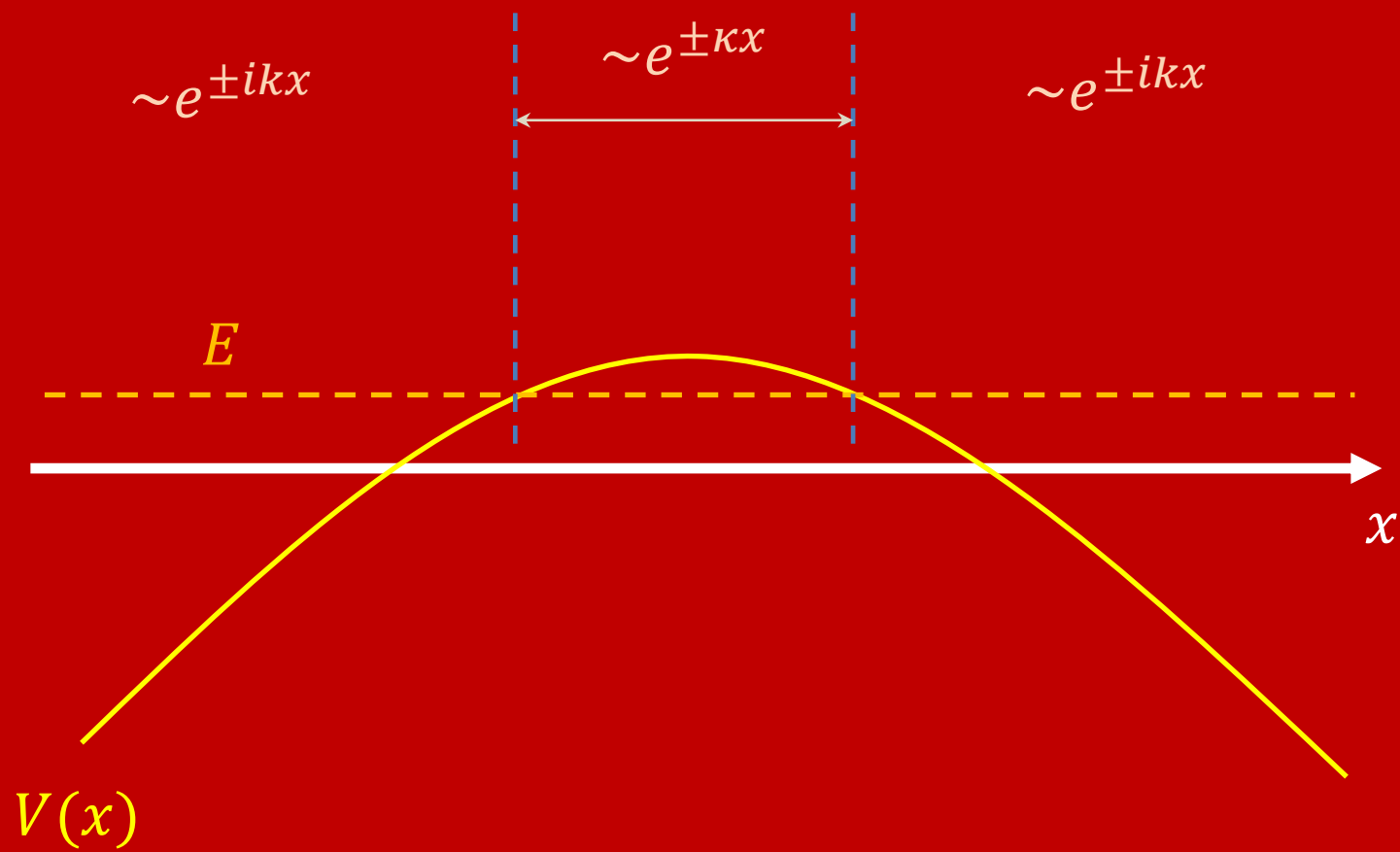
정상파란 왼쪽 또는 오른쪽으로 움직이지 않는 것처럼 보이는 파동을 의미합니다.
이것은 왼쪽으로 움직이는 파동과 오른쪽으로 움직이는 파동이 중첩되어서 보이는 현상입니다.

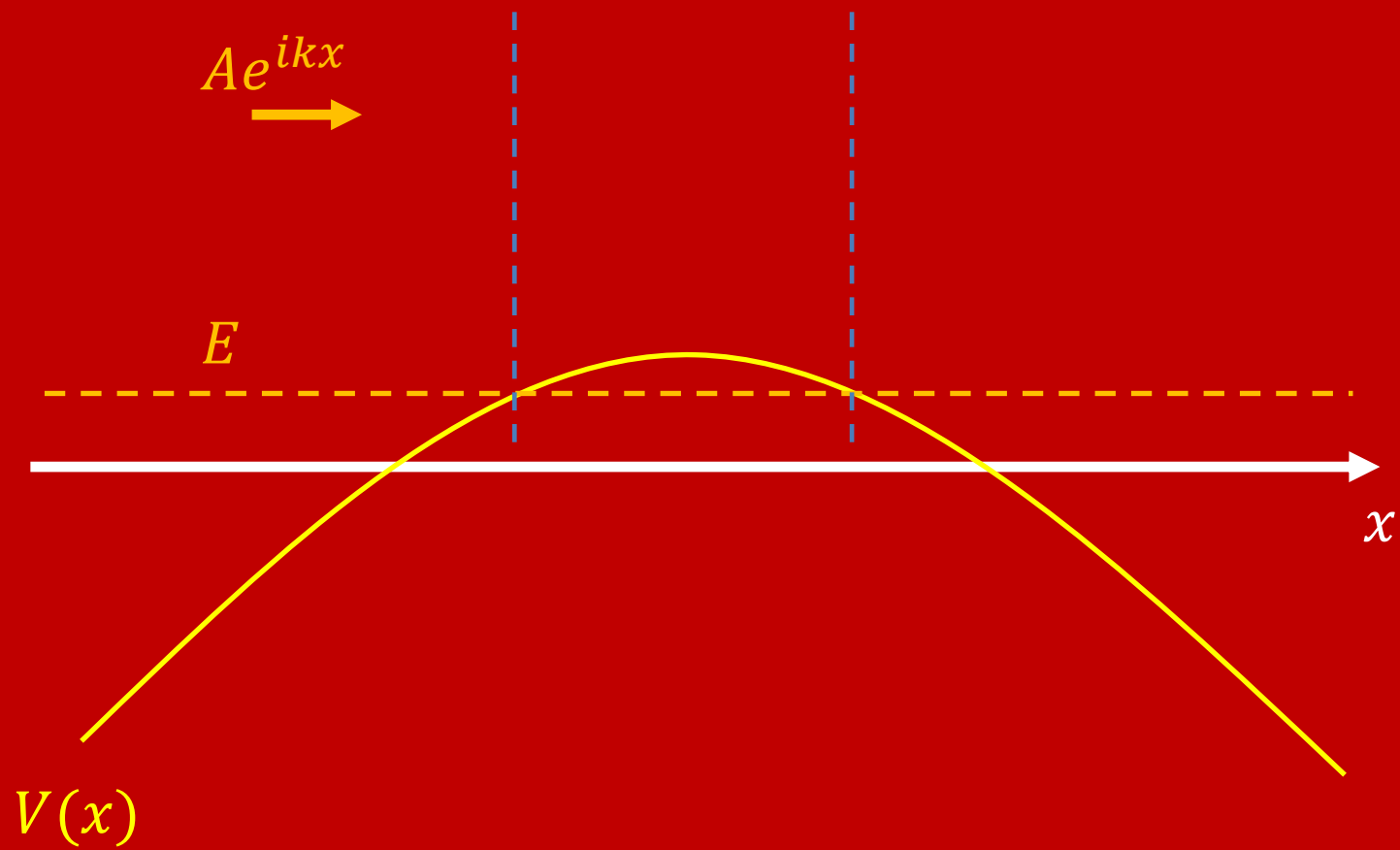


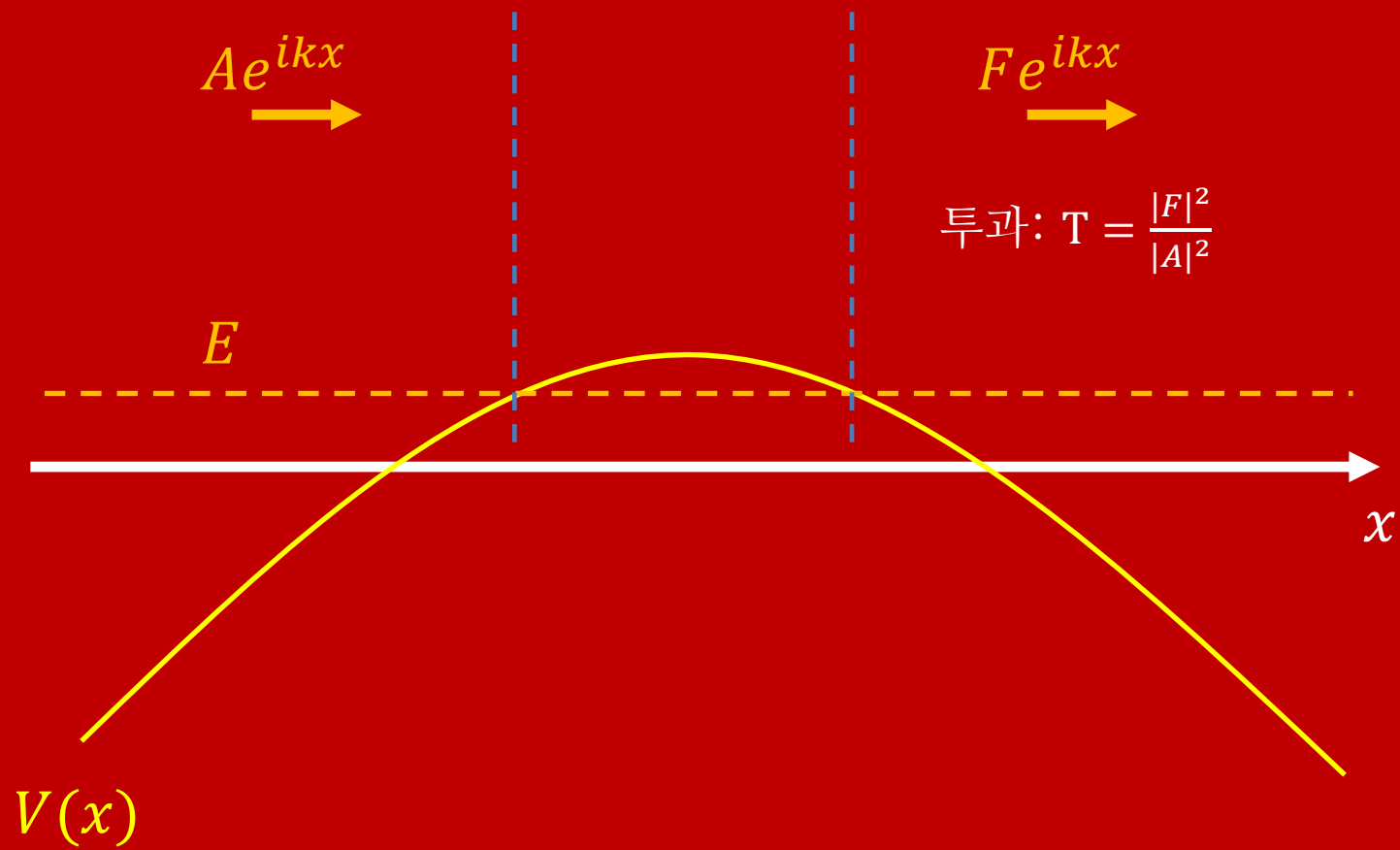
즉 왼쪽 끝과 오른쪽 끝이 고정되었기 때문에 생기는 현상,
즉 파동이 **속박**되었기 때문에
그 경계 조건에 의해서 생기는 현상입니다.

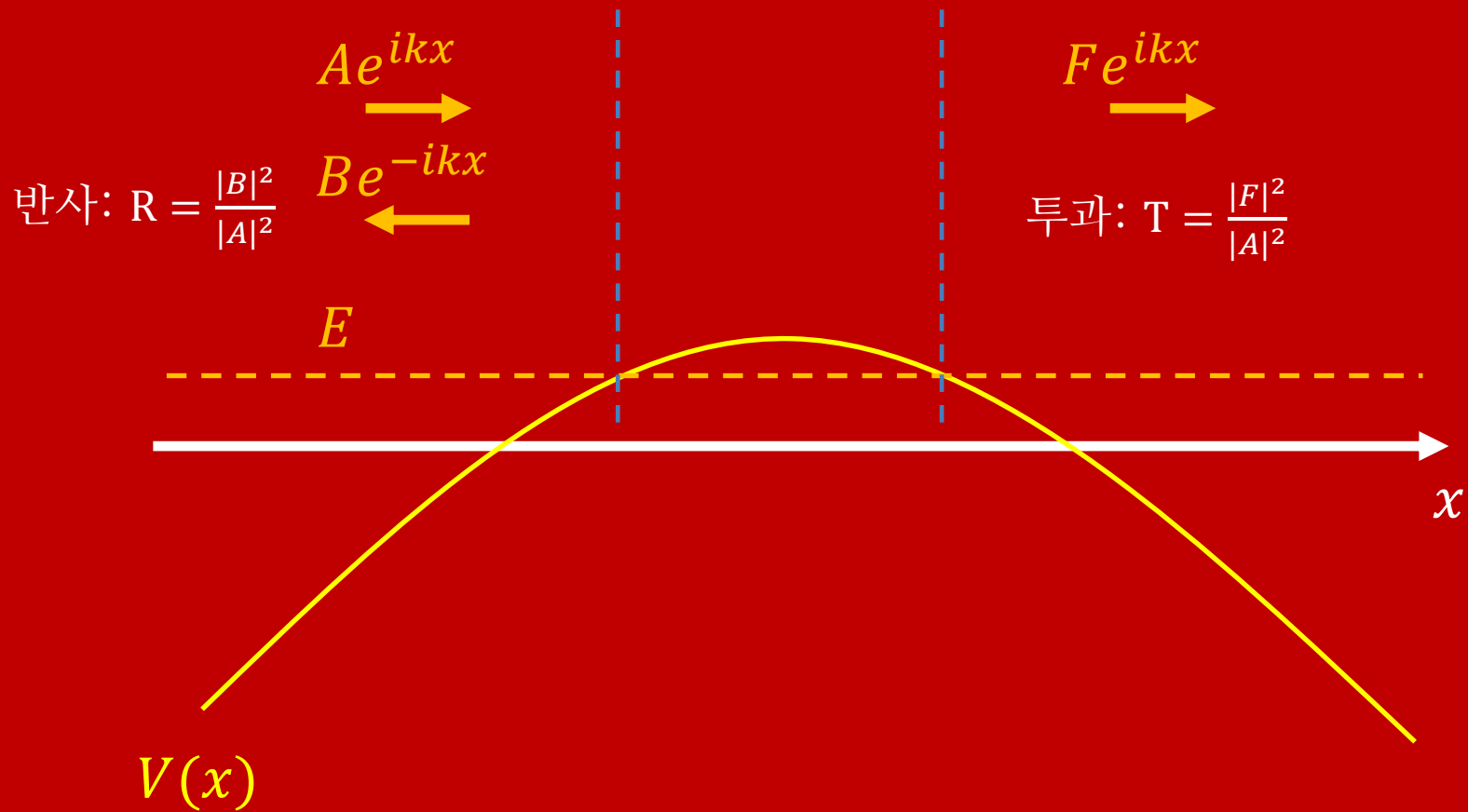


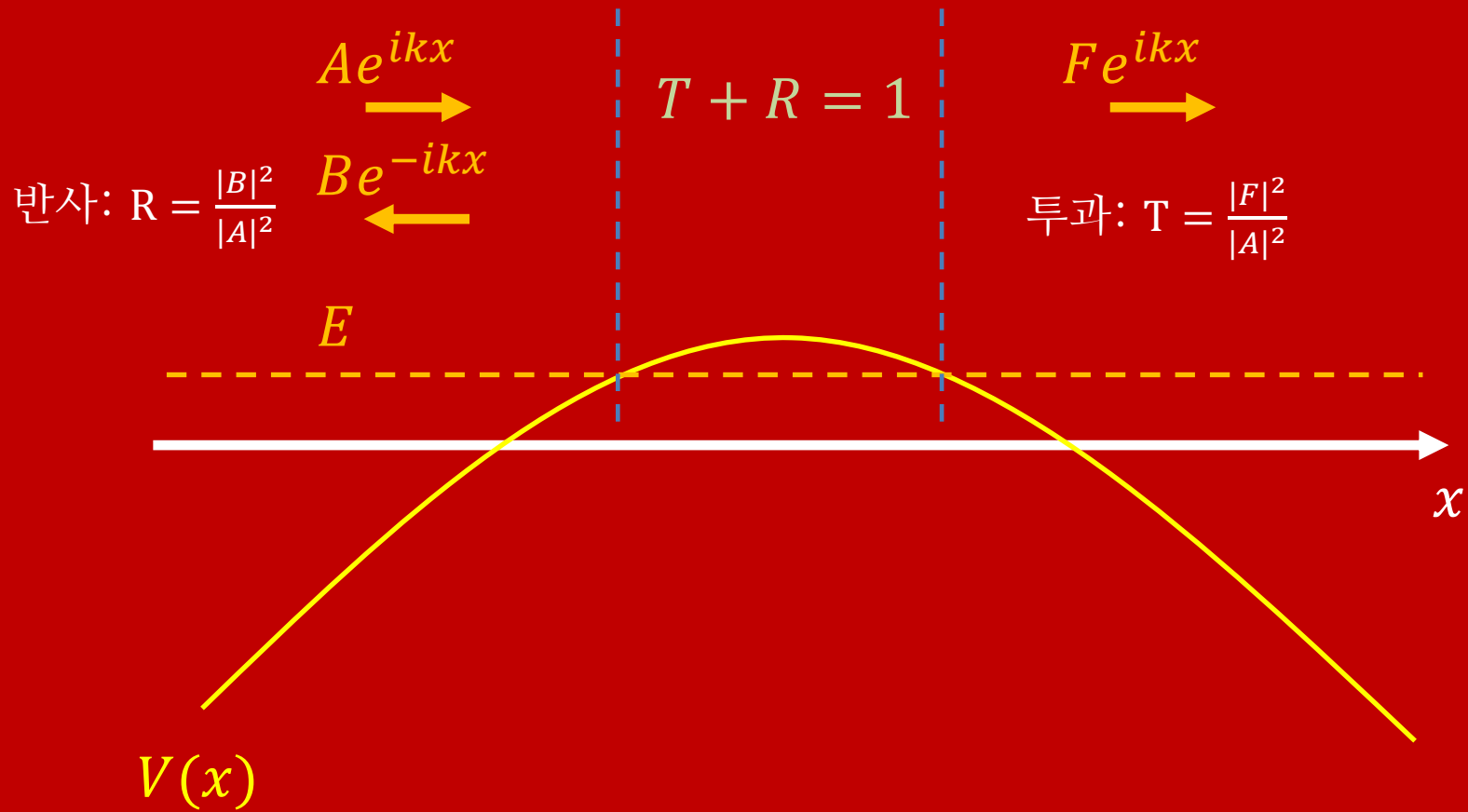


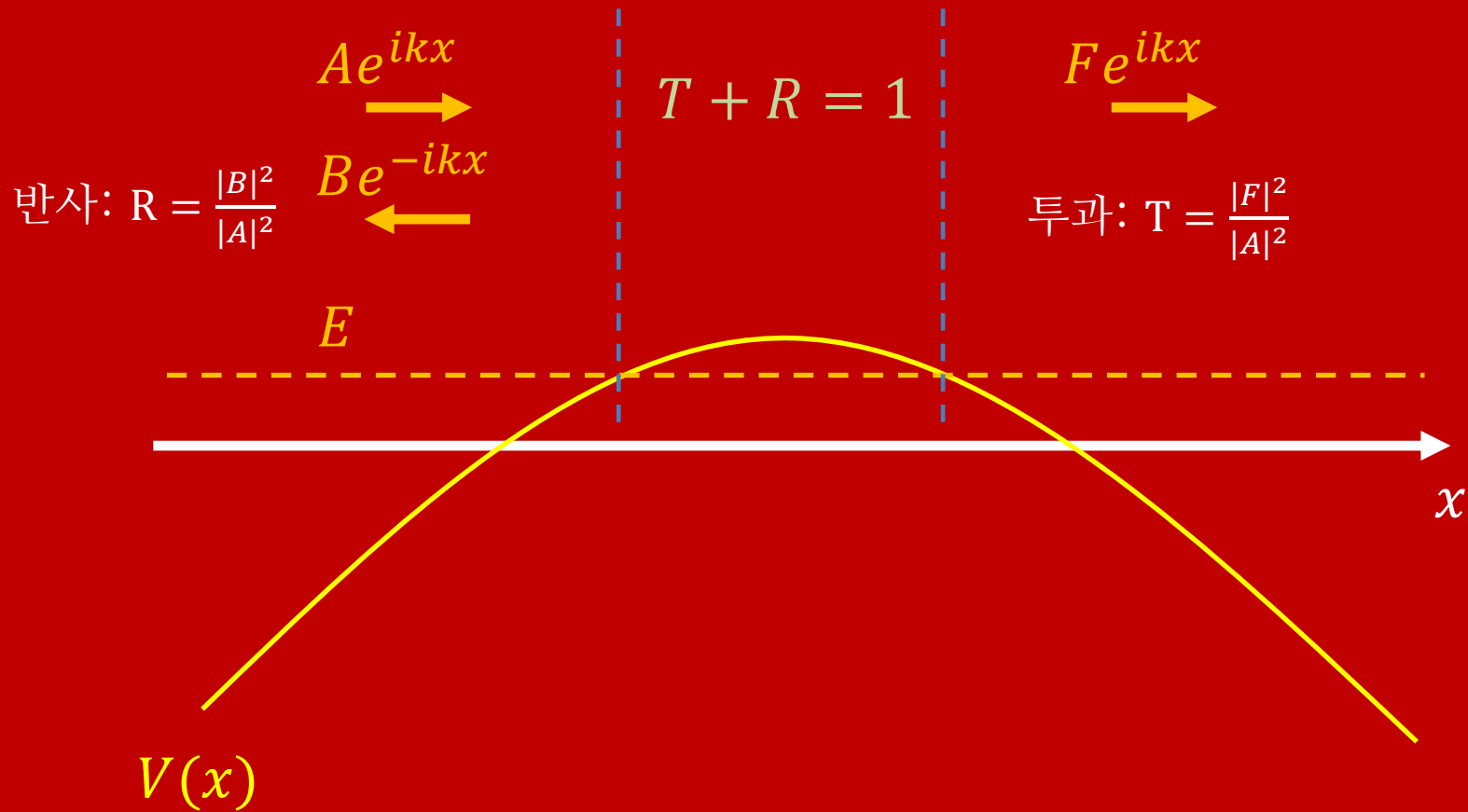












산란 상태 scattering state

$$\left. \begin{aligned} \Psi_1(x, t) &= \Psi_{\text{inc}} + \Psi_{\text{refl}} = Ae^{i(\omega t - k_1 x)} + Be^{i(\omega t + k_1 x)} \\ \Psi_2(x, t) &= \Psi_{\text{trans}} = Ce^{i(\omega t - k_2 x)} \end{aligned} \right\}$$

$$k = \frac{\omega}{v} = \omega \sqrt{\frac{\rho}{\tau}}$$

$$k_2 = k_1 \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}}$$

선 밀도가 다른 두 영역을 생각하고
이 상황에서의 산란 문제를 생각해 봅시다.
두 영역에서 전파 상수가 달라지게 됩니다.

$$\boxed{\begin{aligned}\Psi_1|_{x=0} &= \Psi_2|_{x=0} \\ \frac{\partial \Psi_1}{\partial x}|_{x=0} &= \frac{\partial \Psi_2}{\partial x}|_{x=0}\end{aligned}}$$

$$A + B = C$$

$$-k_1 A + k_1 B = -k_2 C$$

$$B = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} A$$

$$C = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} A$$

경계에서 장의 값과 미분 값이 연속이어야 합니다.
 이것으로부터 산란 이후의 진폭을 얻을 수 있습니다.
 산란 문제에서는 진폭을 유일하게 결정할 수는 없지만
 입사파에 대한 투과 및 반사파의 상대적인 진폭은 구할 수 있습니다.

$$R \equiv \frac{|B|^2}{|A|^2} = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2$$

$$T = \frac{k_2}{k_1} \frac{|C|^2}{|A|^2}$$

$$R + T = 1$$

이것으로부터 반사 계수와 투과 계수를 구할 수 있습니다.
이 둘의 합은 항상 1이 되어야 합니다.
이것은 산란 문제에서 발견되는
아주 일반적인 현상입니다.

파동이 가지는 또 하나의 독특한 성질로
위상 속도 phase velocity 와 군 속도 group velocity 의 구분이 있습니다.

$$\Psi(x, t) = Ae^{i(\omega t - kx)}$$

$$\phi \equiv \omega t - kx \quad \text{위상}$$

$$V = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = v \quad \text{위상 속도}$$

위와 같은 파동을 생각해 봅시다.
이 위상으로부터 구할 수 있는 속도를
위상 속도라고 합니다.

$$\omega_r = 2\sqrt{\frac{\tau}{md}} \sin\left(\frac{k_r d}{2}\right)$$

$$V = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{\tau d}{m}} \frac{|\sin(kd/2)|}{kd/2} = V(k)$$

다른 한 편, 이러한 위상들이 중첩된 경우를 살펴 봅시다.

이 경우는 어떻게 될까요?

위상 속도는 진동수에 의존하는 분산성을 가지게 됩니다.

$$\omega_r = 2\sqrt{\frac{\tau}{md}} \sin\left(\frac{k_r d}{2}\right)$$

$$V = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{\tau d}{m}} \frac{|\sin(kd/2)|}{kd/2} = V(k)$$

$$V(\lambda \rightarrow \infty) = \sqrt{\frac{\tau d}{m}} = v = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}$$

파장이 충분히 길어지는 경우에는
이 속도들이 파동의 속도로 수렴하는 것을 알 수 있습니다.

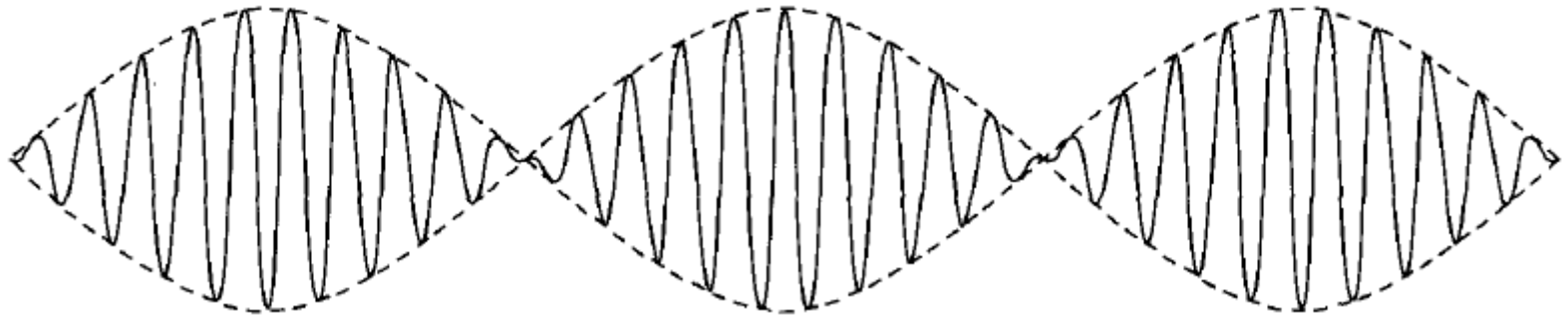
$$\left. \begin{aligned} \Psi_1(x, t) &= Ae^{i(\omega t - kx)} \\ \Psi_2(x, t) &= Ae^{i(\Omega t - Kx)} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \Omega &= \omega + \Delta\omega \\ K &= k + \Delta k \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} \Psi(x, t) &= \Psi_1 + \Psi_2 = A[\exp(i\omega t)\exp(-ikx) \\ &\quad + \exp\{i(\omega + \Delta\omega)t\}\exp\{-i(k + \Delta k)x\}] \\ &= A\left[\exp\left\{i\left(\omega + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t\right\}\exp\left\{-i\left(k + \frac{\Delta k}{2}\right)x\right\}\right] \\ &\quad \cdot \left[\exp\left\{-i\left(\frac{(\Delta\omega)t - (\Delta k)x}{2}\right)\right\} + \exp\left\{i\left(\frac{(\Delta\omega)t - (\Delta k)x}{2}\right)\right\}\right] \end{aligned}$$

그러면 여러 개의 파동이 중첩되었을 때,
이 전체 파동을 대표하는 속도는 어떻게 정의될까요?

$$\Psi(x, t) = 2A \cos\left[\frac{(\Delta\omega)t - (\Delta k)x}{2}\right] \cos\left[\left(\omega + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t - \left(k + \frac{\Delta k}{2}\right)x\right]$$



$$U = \frac{dx}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \quad \text{군 속도}$$

이 경우 중첩된 파동은
앞에서 본 것 처럼 일종의 맥놀이 현상을 보여주게 됩니다.
여기에서 맥놀이의 포락선이 전파되는 속도를
군 속도라고 합니다.

$$\omega(k) = \omega(k_0) + \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{k=k_0} \cdot (k - k_0) + \dots$$

$$\omega t - kx = (\omega_0 t - k_0 x) + (k - k_0)(\omega'_0 t - x)$$

$$\begin{aligned} \Psi(x, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) e^{i(\omega t - kx)} dk \\ &= \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} A(k) e^{i(\omega t - kx)} dk \\ &= \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} A(k) \exp[i(k - k_0)(\omega'_0 t - x)] \exp[i(\omega_0 t - k_0 x)] dk \end{aligned}$$

포락선

포락선의 진행 속도:
군 속도

좀 더 일반적으로, 위와 같이
여러 파동이 중첩되어 파동 묶음 wave packet을 구성할 때,
파동 묶음 전체가 이동하는 속도는
이와 같은 군 속도로 정의됩니다.

$$\begin{aligned}
 U = \omega'_0 &= \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{k=k_0} \\
 &= \frac{v_0}{1 - \frac{\omega_0}{v_0} \left(\frac{dv}{d\omega} \right)_0}
 \end{aligned}$$

따라서 분산성을 가지는 매질의 경우
위상 속도와 군 속도는 일반적으로 다름을 알 수 있습니다.

이런 것이 대체 어떤 의미가 있을까요?
물론 단순히 파동만 생각할 때는 크게 중요하지 않을 수도 있습니다.
그러나 그 파동이 입자이기도 하다면,
이 둘 사이의 구분은 매우 중요해집니다.

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

드 브로이는 운동량을 가지는 입자가
위와 같이 파장을 가져야 한다고 합니다.
이것을 물질파라고 합니다.

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

$$v_p = \lambda f = \frac{h}{p} \cdot \frac{E}{h}$$

$$v_g = \frac{p}{\gamma m}$$

그러면 이 입자의 속력은 어떻게 정의할까요?
파장으로부터 정의할까요, 아니면 운동량으로부터 정의할까요?

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

$$v_p = \lambda f = \frac{h}{p} \cdot \frac{E}{h}$$

$$v_g = \frac{p}{\gamma m}$$

따라서 $v_p \cdot v_g$ 는 비상대론적 극한에서는 $v_g^2/2$ 가 되고,
 상대론적 극한에서는 c^2 이 됩니다.
 따라서 이 둘은 일반적으로 같지 않음을 알 수 있습니다.

따라서 물질파는 두 가지 속도,
즉 파동으로서 정의되는 속도, 즉 위상 속도와
입자로서 정의되는 속도, 즉 군 속도의
두 가지 개념을 모두 가집니다.

물리적인 의미를 가지는 속도는 군 속도입니다.
다시 말하면, 물리적인 의미를 가지는 입자는
여러 파동들의 중첩, 즉
파동 묶음으로 기술되어야 함을 알 수 있습니다.

이 둘 사이의 개념적 구분은
슈뢰딩거가 최초로 슈뢰딩거 방정식을 유도하는 과정에서
중요하게 작용하였습니다.
비록 슈뢰딩거가 아주 엄밀한 방식으로
이 개념들을 사용하지는 않았지만 말입니다.

감사합니다