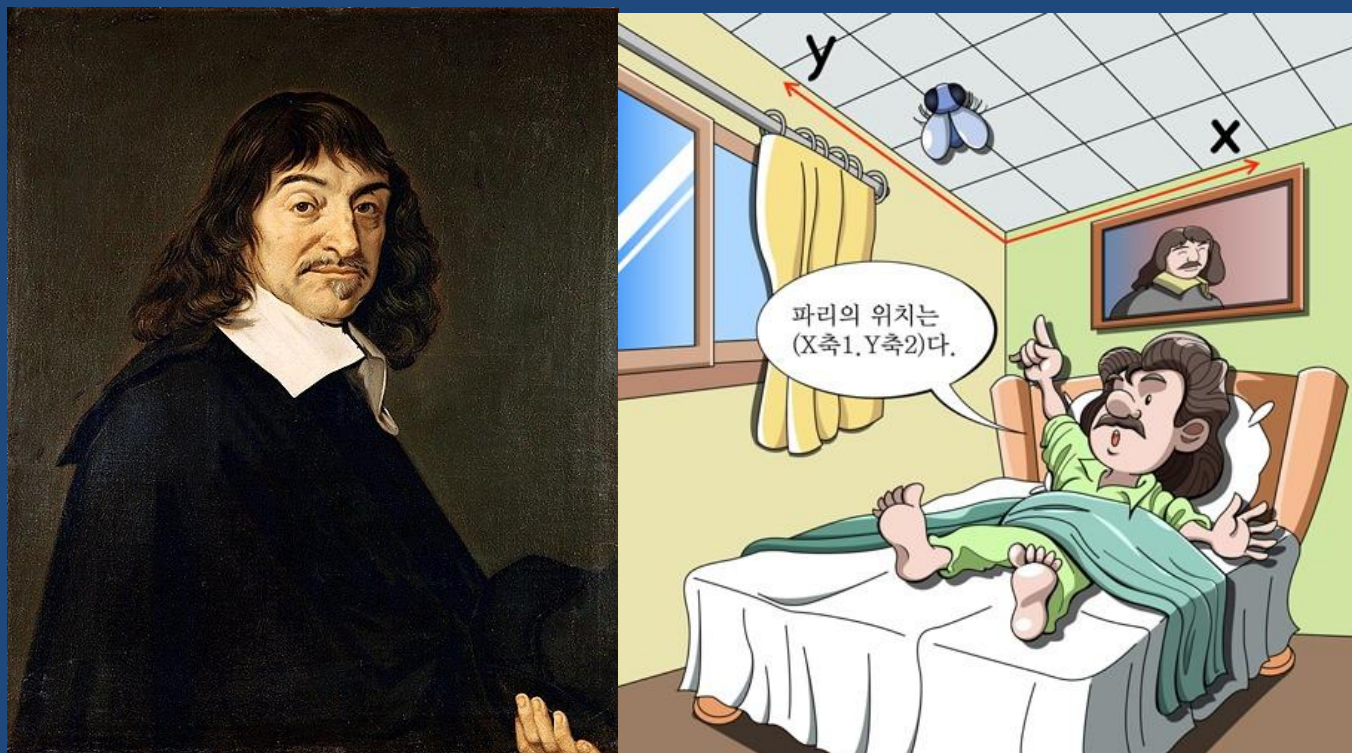


14장 특수 상대성 이론

이번 장에서는 마지막으로
아인슈타인의 특수 상대성 이론에 대해서 살펴봅시다.
특수 상대성 이론을 이해하기전에
먼저 우리는 **공변성**에 대해서 다시 환기해 봅시다.

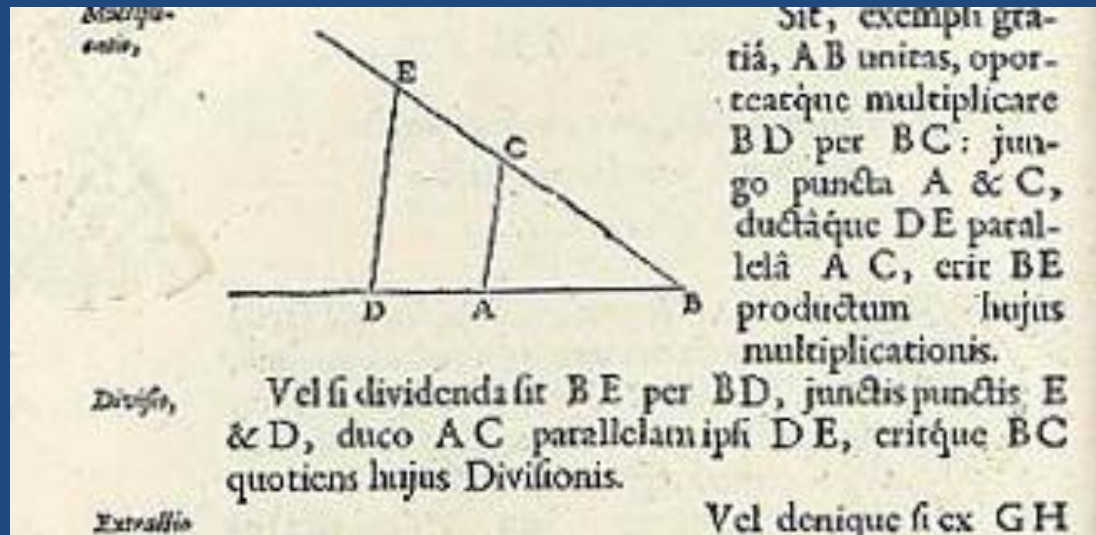
이 이야기를 시작하기 위해 우리는
17세기의 위대한 철학자, 수학자, 물리학자인
르네 데카르트를 떠올려 봅시다.



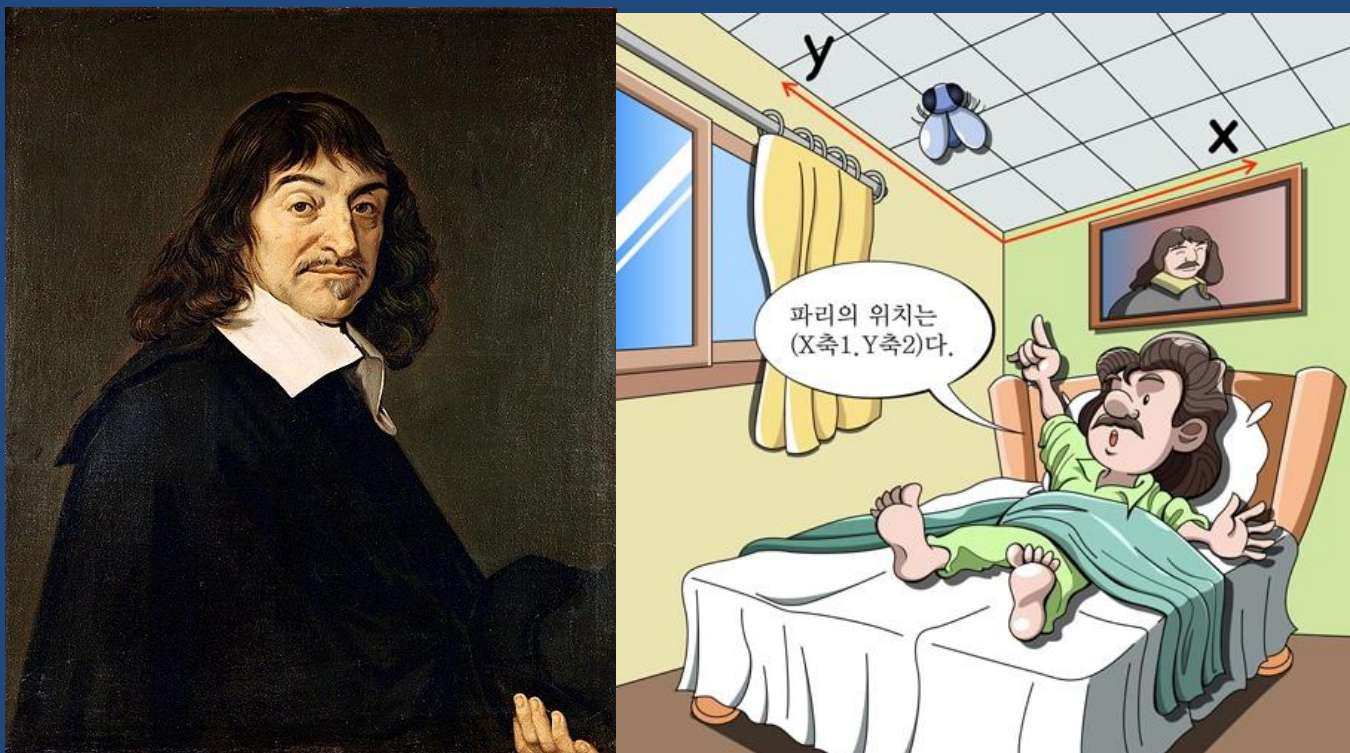
데카르트는 침대에 누워서 천장을 보다가
천장에 벌레가 날아다니는 것을 보게 됩니다.
이것으로부터 그는 **좌표계**의 개념을 도입하게 됩니다.

“세상을 수로 기술하다.”

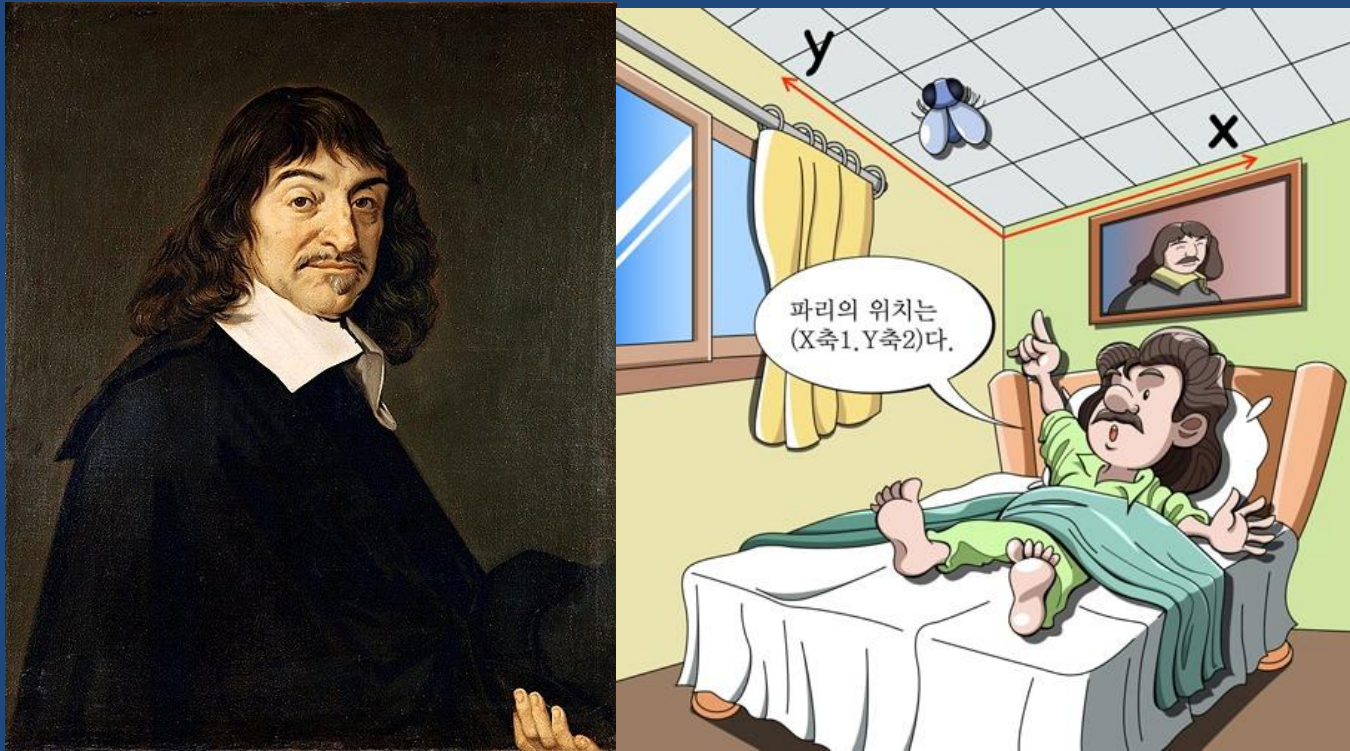
데카르트의 멋진 업적을 이렇게 요약해 봅니다.



그러나 데카르트가 곧 발견한 것은
자연에 수를 부여하기 위해서는
우리의 선택이 필요하다는 것입니다.



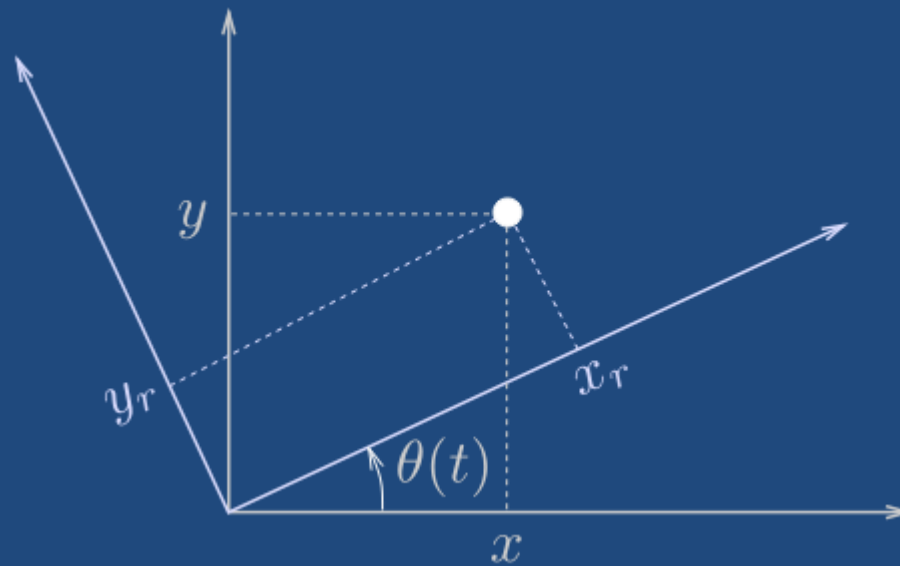
벌레가 움직이는 것은 **객관적**인 현상입니다.
우리는 이 벌레에 수를 부여할 수 있습니다.
그런데 사실 우리는 어떤 수든지 부여할 수 있습니다.
즉, 수를 부여하는 활동은 **주관적**입니다.



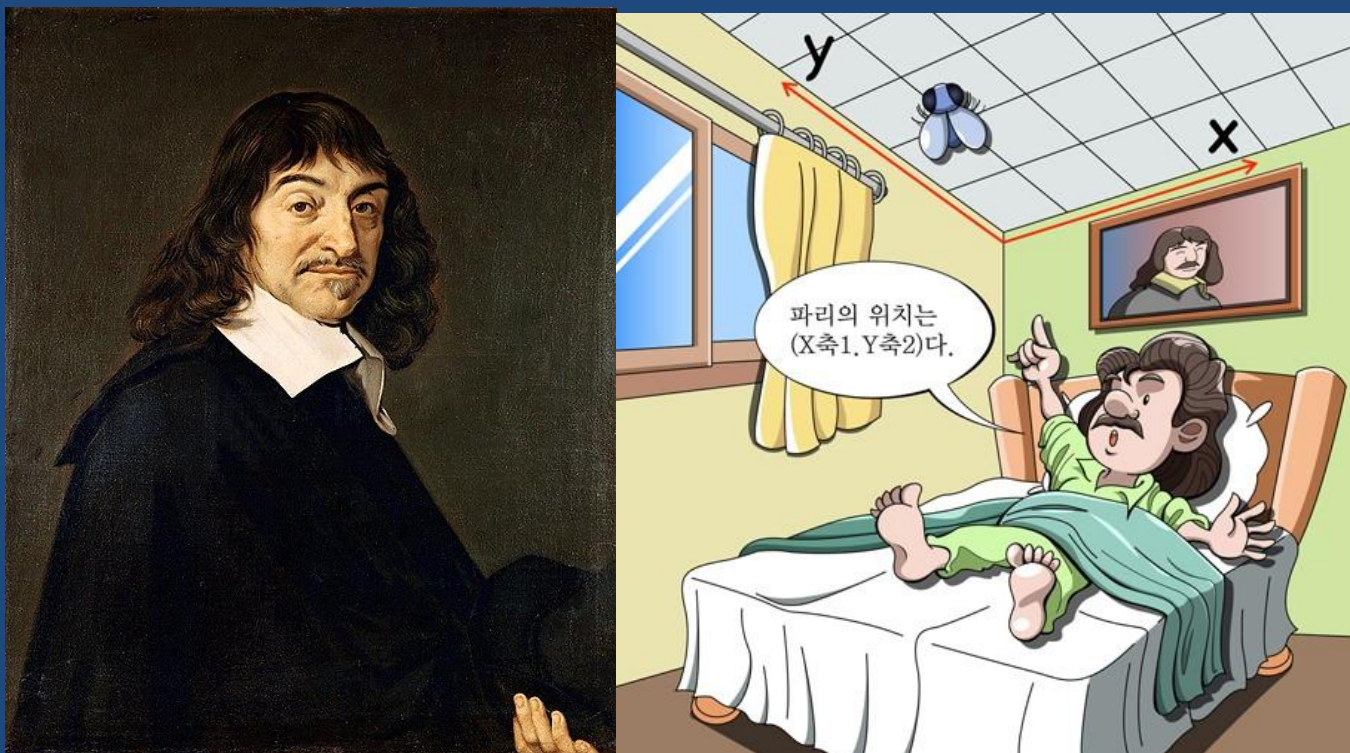
따라서 객관적인 대상에 수를 부여하는 주관적인 작업이
의미를 가지기 위해서는
이 주관적인 활동이 객관적인 뭔가를
담아낼 수 있어야 합니다.



여기에서 **수학**은 주관적인 도구를 사용하더라도
그 너머에서 객관적인 요소를 다룰 수 있도록 해 줍니다.



예를 들어, 내가 좌표를 다르게 잡더라도,
두 개의 수를 묶어서 기술하면
원점으로부터의 거리는 좌표축의 선택과는 무관하게 됩니다.



이것이 바로 데카르트가 파리를 기술하기 위해
하나의 수가 아니라 두 개의 수를 묶어서 기술한 이유입니다.
이러한 수의 묶음을 **벡터**라고 합니다.

객관적인 세계의 물리 현상은
주관적인 좌표의 설정에 무관해야 합니다.

그렇다면 우리가 자연을 이해하는 방식,
즉 자연을 결정하는 방정식은
그 값 자체는 좌표의 설정에 의존하지만
수학적인 형태가 좌표의 설정과 무관하게,
즉 좌표 변환에 대해 일정한 방식으로
함께 변해야 한다는 것을
말할 수 있습니다.

이것을 공변성covariance이라고 합니다.

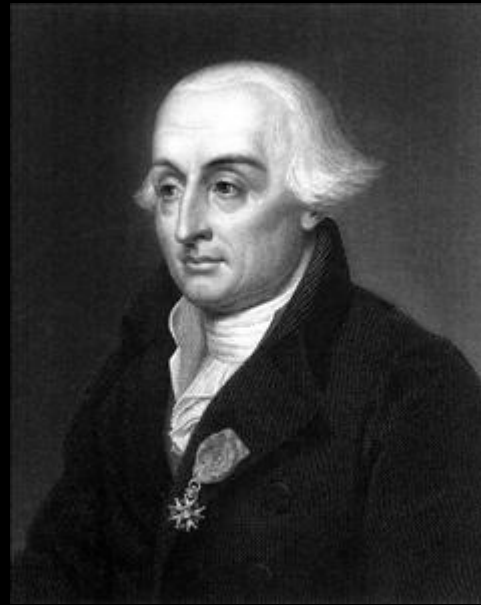
따라서 자연의 근본적인 방정식을 구성하는 요소들은
공변성을 표현하기 쉬운 방식으로 표현되어야 합니다.
즉, 좌표 변환에 대해서 일정한 패턴으로 변환하는 요소들을
기본적인 구성 요소building block로 삼아야 합니다.

이렇게 공변성을 확장하는 과정이
역학의 발전과 관련됩니다.

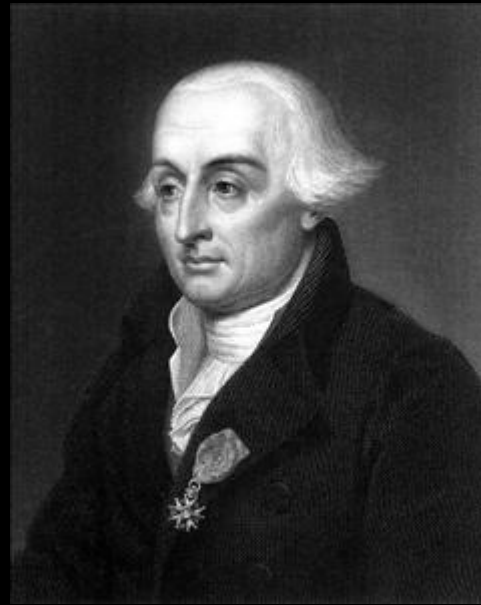
뉴턴 역학에서 라그랑주 역학으로,
그리고 특수 상대성 이론과 일반 상대성 이론으로 확장되는 과정은
자연의 법칙을 조금 더 공변적으로 표현하려는 노력과
깊이 연관되어 있는 것입니다.

즉, 상대성relativity이란
자연 법칙 또는 방정식이
좌표의 설정과는 무관하게
또는 좌표의 설정에 따라 적당히 공변적으로
기술되어야 한다는 것을 의미합니다.

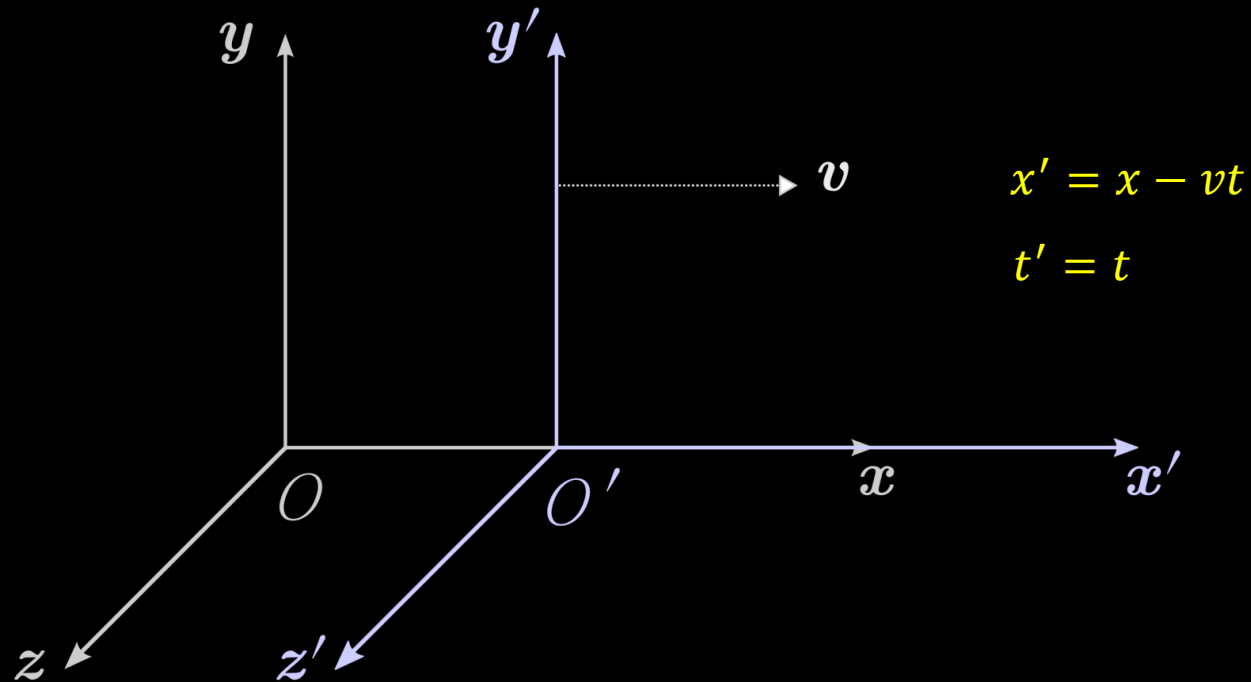
그러면 좌표의 설정에 있어서
우리가 고려해야 할 사항은
어떤 것이 있을까요?



예를 들어, 오일러와 라그랑주는
일반화 좌표계를 사용해서
운동 방정식을 일반화 좌표계의 선택과는 무관하게
기술하는 방법을 고안했습니다.



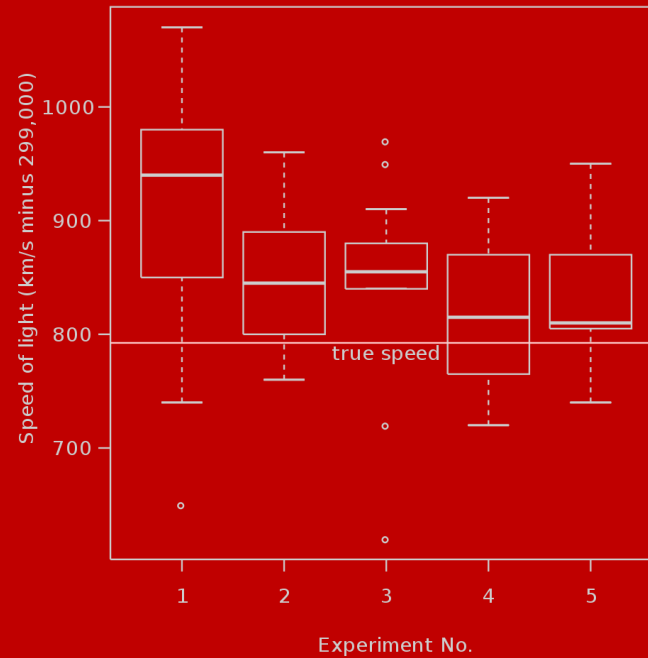
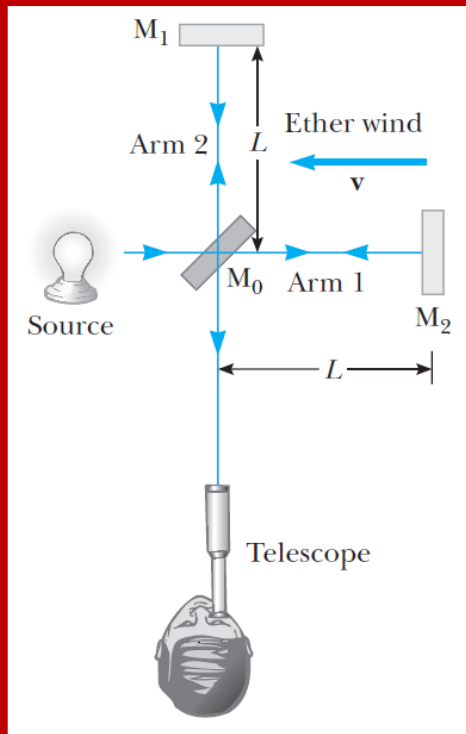
그러나 여기에는 좌표의 운동에 대한 정보는
반영되어 있지 않습니다.



등속 운동하는 좌표계에 대한 상대성을 다룬 것이
특수 상대성 이론이고,
좀 더 일반적인 좌표계에 대한 상대성을 다룬 것이
일반 상대성 이론입니다.

뉴턴의 운동 방정식은 갈릴레이 변환에 대해 공변합니다.
그러나 맥스웰 방정식은 그렇지 않습니다.

어쩌면 이것은 뉴턴 역학의 관점에서는
맥스웰 방정식을 기술하는 올바른 좌표계가 있다는 것,
또는 전자기파가 전달되는 어떤 매질이 있다는 것을
의미할 수도 있습니다.



그러나 전자기파를 매개하는 매질,
즉 **에테르**의 존재를 실험적으로 확인하는 것은
마이켈슨-몰리의 실험으로도
실패하고 맙니다.

그렇다면 맥스웰 방정식을
공변적이게 하는
맞춤형 변환은 무엇일까요?

3. Zur Elektrodynamik bewegter Körper;
von A. Einstein.

Daß die Elektrodynamik Maxwells — wie dieselbe gegenwärtig aufgefaßt zu werden pflegt — in ihrer Anwendung auf bewegte Körper zu Asymmetrien führt, welche den Phänomenen nicht anzuhafien scheinen, ist bekannt. Man denke z. B. an die elektrodynamische Wechselwirkung zwischen einem Magneten und einem Leiter. Das beobachtbare Phänomen hängt hier nur ab von der Relativbewegung von Leiter und Magnet, während nach der üblichen Auffassung die beiden Fälle, daß der eine oder der andere dieser Körper der bewegte sei, streng voneinander zu trennen sind. Bewegt sich nämlich der Magnet und ruht der Leiter, so entsteht in der Umgebung des Magneten ein elektrisches Feld von gewissem Energiewerte, welches an den Orten, wo sich Teile des Leiters befinden, einen Strom erzeugt. Ruht aber der Magnet und bewegt sich der Leiter, so entsteht in der Umgebung des Magneten kein elektrisches Feld, dagegen im Leiter eine elektromotorische Kraft, welcher an sich keine Energie entspricht, die aber — Gleichheit der Relativbewegung bei den beiden ins Auge gefaßten Fällen vorausgesetzt — zu elektrischen Strömen von derselben Größe und demselben Verlaufe Veranlassung gibt, wie im ersten Falle die elektrischen Kräfte.

Beispiele ähnlicher Art, sowie die mißlungenen Versuche, eine Bewegung der Erde relativ zum „Lichtmedium“ zu konstatieren, führen zu der Vermutung, daß dem Begriffe der absoluten Ruhe nicht nur in der Mechanik, sondern auch in der Elektrodynamik keine Eigenschaften der Erscheinungen entsprechen, sondern daß vielmehr für alle Koordinatensysteme, für welche die mechanischen Gleichungen gelten, auch die gleichen elektrodynamischen und optischen Gesetze gelten, wie dies für die Größen erster Ordnung bereits erwiesen ist. Wir wollen diese Vermutung (deren Inhalt im folgenden „Prinzip der Relativität“ genannt werden wird) zur Voraussetzung erheben und außerdem die mit ihm nur scheinbar unverträgliche

움직이는 물체의 전기 동역학에 대하여
- 아인슈타인, 1905년

1905년 아인슈타인은 다음과 같은 두 가지 가정을 합니다.

1. 상대성 원리
2. 광속도 불변의 원리

1905년 아인슈타인은 다음과 같은 두 가지 가정을 합니다.

1. 상대성 원리
2. 광속도 불변의 원리

이 두 가지 가정에 추가로
좌표 변환이 연속적인 선형 변환이며
속력이 작을 때는 갈릴레이 변환이 된다고 한다면
수학적으로 다음과 같은 형태의 변환만이 허용됩니다.

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

이 변환을 로렌츠 변환 Lorentz transformation 이라고 합니다.

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

x 방향으로
등속 운동하는 좌표계

정지 좌표계

이 변환을 로렌츠 변환 Lorentz transformation 이라고 합니다.

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \beta \equiv \frac{v}{c}$$

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

x 방향으로
등속 운동하는 좌표계

정지 좌표계

이 변환을 로렌츠 변환 Lorentz transformation 이라고 합니다.

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$$

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

좀 더 추상적으로는 위와 같은 텐서로 표현이 가능합니다.

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$$

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

여기에 아인슈타인의 덧셈 규약 summation convention이
사용되었습니다.

$\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ 이고, 특히 0은 시간을 의미합니다.

$$dx^\mu dx_\mu = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

광속도 불변이라는 것은
위와 같은 조합이 상수라는 것을 의미합니다.
여기에서 시간 부분의 부호가 공간 부분의 부호와
다르다는 것이 중요합니다.

$$dx^\mu dx_\mu = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

$$dx^\mu = (cdt, d\vec{x}) \quad \text{반변 벡터}$$

$$dx_\mu = (-cdt, d\vec{x}) \quad \text{공변 벡터}$$

이 문제를 다루기 위해 허수를 도입할 수도 있지만,
반변contravariant 벡터와 공변covariant 벡터를 사용해서
표현하는 것이 좀 더 잘 알려진 방식입니다.

$$dx^\mu dx_\mu = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

$$x^\mu = (ct, \vec{x})$$

$$dx^\mu = (cdt, dx, dy, dz)$$

기본적으로 우리가 사용하는 위치 벡터,
그리고 이와 같은 차원의 벡터는
반변 벡터로 표현하는 것이 기본이라고 기억하면 됩니다.

$$dx^\mu dx_\mu = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

$$x^\mu = (ct, \vec{x})$$

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{c\partial t}, \nabla \right)$$

한 편, 위치 벡터의 차원에 해당하는 양이 분모로 들어가게 되면
공변 벡터의 형태가 기본이라고 생각하면 됩니다.

$$dx^\mu dx_\mu = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

$$x^\mu = (ct, \vec{x})$$

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu \quad g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

편의에 따라 공변 벡터와 반변 벡터를 바꾸어 줄 수 있는데,
이 변환에 해당하는 행렬을
민코프스키 메트릭이라고 합니다.

$$t' = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x \right)$$

$$x' = \gamma(x - vt)$$

이것을 정리하면 위와 같은 로렌츠 변환식을 얻습니다.

로렌츠 변환의 기본적인 결과들을 다음과 같이 정리해 봅시다.

1. 시간 지연 time dilation
2. 길이 수축 length contraction
3. 동시성 simultaneity
4. 속도 합성
5. 상대론적 에너지, 운동량, 힘

시간 지연, 길이 수축, 동시성을 이해하기 위해서는
로렌츠 변환에서 우리가 무엇과 무엇을 비교하는지를
이해해야 합니다.

	사건 1	사건 2
정지 좌표계	(ct_1, x_1)	(ct_2, x_2)
운동 좌표계	(ct'_1, x'_1)	(ct'_2, x'_2)

1. 시간 지연

	사건 1	사건 2
정지 좌표계	(ct_1, x_1)	(ct_2, x_2)
운동 좌표계	(ct'_1, x'_1)	(ct'_2, x'_1)

운동하는 좌표계에서의 시간을 측정하기 위해서는
운동하는 좌표계의 특정한 지점을 고정시켜야만 합니다.

1. 시간 지연

	사건 1	사건 2
정지 좌표계	(ct_1, x_1)	(ct_2, x_2)
운동 좌표계	(ct'_1, x'_1)	(ct'_2, x'_1)

운동하는 좌표계에서의 시간을 측정하기 위해서는

운동하는 좌표계의 특정한 지점을 고정시켜야만 합니다.

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1$$

운동하는 관찰자의 고유 시간 proper time

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

정지한 관찰자가 측정한 시간 간격

1. 시간 지연

	사건 1	사건 2
정지 좌표계	(ct_1, x_1)	(ct_2, x_2)
운동 좌표계	(ct'_1, x'_1)	(ct'_2, x'_1)

운동하는 좌표계에서의 시간을 측정하기 위해서는

운동하는 좌표계의 특정한 지점을 고정시켜야만 합니다.

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1$$

운동하는 관찰자의 고유 시간 proper time

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

정지한 관찰자가 측정한 시간 간격

로렌츠 변환을 통해 다음을 유도할 수 있습니다.

$$x_2 - x_1 = v(t_2 - t_1)$$

$$t'_2 - t'_1 = -\left(\frac{v\gamma}{c^2}\right)(x_2 - x_1) + \gamma(t_2 - t_1)$$

1. 시간 지연

	사건 1	사건 2
정지 좌표계	(ct_1, x_1)	(ct_2, x_2)
운동 좌표계	(ct'_1, x'_1)	(ct'_2, x'_1)

운동하는 좌표계에서의 시간을 측정하기 위해서는

운동하는 좌표계의 특정한 지점을 고정시켜야만 합니다.

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1$$

운동하는 관찰자의 고유 시간 proper time

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

정지한 관찰자가 측정한 시간 간격

로렌츠 변환을 통해 다음을 유도할 수 있습니다.

$$x_2 - x_1 = v(t_2 - t_1)$$

$$\begin{aligned} t'_2 - t'_1 &= -\left(\frac{v\gamma}{c^2}\right)(x_2 - x_1) + \gamma(t_2 - t_1) \\ &= -\left(\frac{v^2\gamma}{c^2}\right)(t_2 - t_1) + \gamma(t_2 - t_1) = \frac{t_2 - t_1}{\gamma} \end{aligned}$$

1. 시간 지연

	사건 1	사건 2
정지 좌표계	(ct_1, x_1)	(ct_2, x_2)
운동 좌표계	(ct'_1, x'_1)	(ct'_2, x'_1)

따라서 다음 결과를 얻습니다.

운동하는 물체의 시간을 정지 좌표계에서 보면,

시간이 **느리게** 가는 것처럼 보입니다.

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\gamma}$$

2. 길이 수축

	사건 1	사건 2
정지 좌표계	(ct_1, x_1)	(ct_1, x_2)
운동 좌표계	(ct'_1, x'_1)	(ct'_2, x'_2)

운동하는 좌표계에서의 거리를 정지 좌표계에서 측정하기 위해서는
정지 좌표계에서 특정한 시간을 고정시켜야만 합니다.

2. 길이 수축

	사건 1	사건 2
정지 좌표계	(ct_1, x_1)	(ct_1, x_2)
운동 좌표계	(ct'_1, x'_1)	(ct'_2, x'_2)

운동하는 좌표계에서의 거리를 정지 좌표계에서 측정하기 위해서는
정지 좌표계에서 특정한 시간을 고정시켜야만 합니다.

$$\Delta x' = x'_2 - x'_1$$

운동하는 관찰자의 고유 길이 proper length

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

정지한 관찰자가 측정한 길이 간격

2. 길이 수축

	사건 1	사건 2
정지 좌표계	(ct_1, x_1)	(ct_1, x_2)
운동 좌표계	(ct'_1, x'_1)	(ct'_2, x'_2)

운동하는 좌표계에서의 거리를 정지 좌표계에서 측정하기 위해서는
정지 좌표계에서 특정한 시간을 고정시켜야만 합니다.

$$\Delta x' = x'_2 - x'_1$$

운동하는 관찰자의 고유 길이 proper length

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

정지한 관찰자가 측정한 길이 간격

로렌츠 변환을 통해 다음을 유도할 수 있습니다.

$$x'_2 - x'_1 = \gamma(x_2 - x_1)$$

2. 길이 수축

	사건 1	사건 2
정지 좌표계	(ct_1, x_1)	(ct_1, x_2)
운동 좌표계	(ct'_1, x'_1)	(ct'_2, x'_2)

따라서 다음 결과를 얻습니다.

운동하는 물체를 정지 좌표계에서 보면,
길이가 **짧아진** 것처럼 보입니다.

$$\Delta x' = \gamma \Delta x$$

이것을 **로렌츠-피츠제럴드 수축**이라고도 합니다.

3. 동시성

	사건 1	사건 2
정지 좌표계	(ct_1, x_1)	(ct_2, x_2)
운동 좌표계	(ct'_1, x'_1)	(ct'_1, x'_2)

운동하는 좌표계의 동시 개념을 정지 좌표계에서 비교하기 위해서는
운동하는 좌표계의 특정한 시간을 고정시켜야만 합니다.

3. 동시성

	사건 1	사건 2
정지 좌표계	(ct_1, x_1)	(ct_2, x_2)
운동 좌표계	(ct'_1, x'_1)	(ct'_1, x'_2)

운동하는 좌표계의 동시 개념을 정지 좌표계에서 비교하기 위해서는
운동하는 좌표계의 특정한 시간을 고정시켜야만 합니다.

로렌츠 변환을 통해 다음을 유도할 수 있습니다.

$$\Delta x = x_2 - x_1 = \frac{c^2}{v}(t_2 - t_1) = \frac{c^2}{v}\Delta t$$

$$\Delta x' = x'_2 - x'_1 = \gamma(x_2 - x_1) - v\gamma(t_2 - t_1) = \frac{c^2}{v\gamma}(t_2 - t_1) = \frac{c^2}{v\gamma}\Delta t$$

3. 동시성

	사건 1	사건 2
정지 좌표계	(ct_1, x_1)	(ct_2, x_2)
운동 좌표계	(ct'_1, x'_1)	(ct'_1, x'_2)

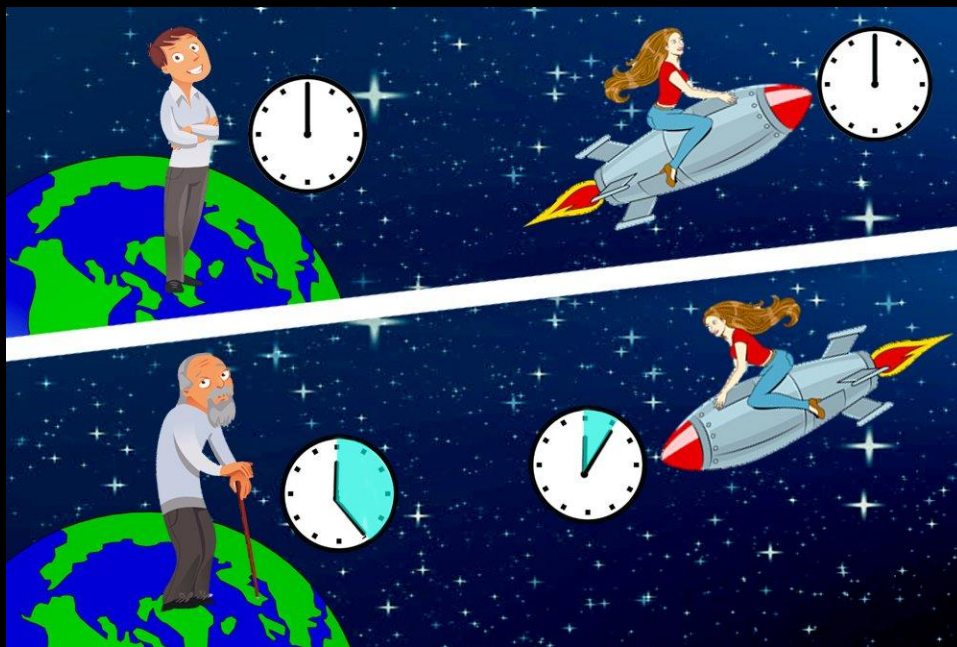
따라서 다음 결과를 얻습니다.

운동하는 물체의 동시 개념이

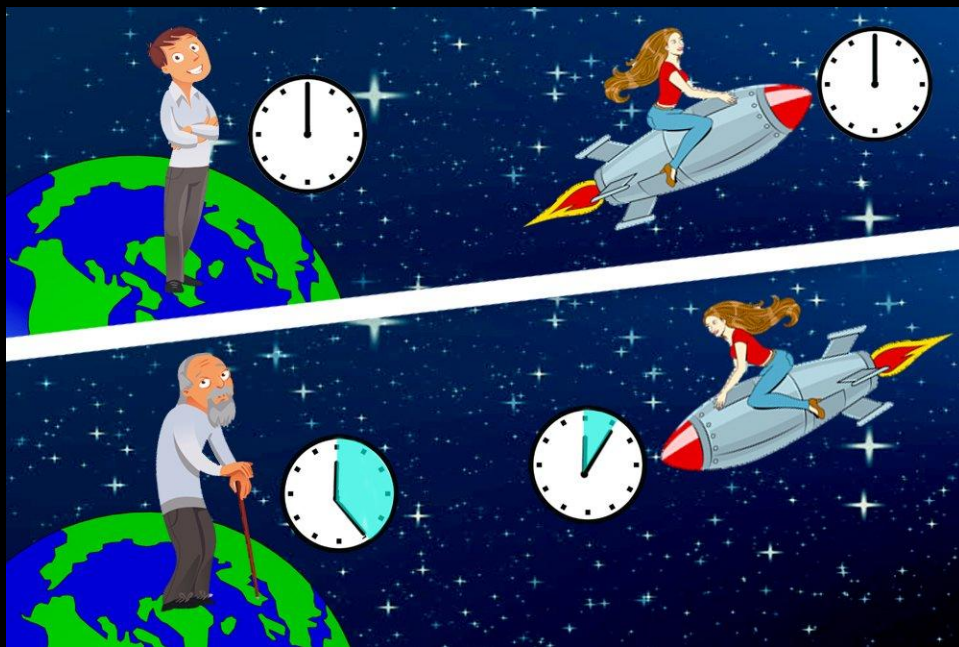
정지 좌표계에서의 동시 개념과 일반적으로 **같지 않습니다**.

$$\Delta t = \frac{v\gamma}{c^2} \Delta x'$$

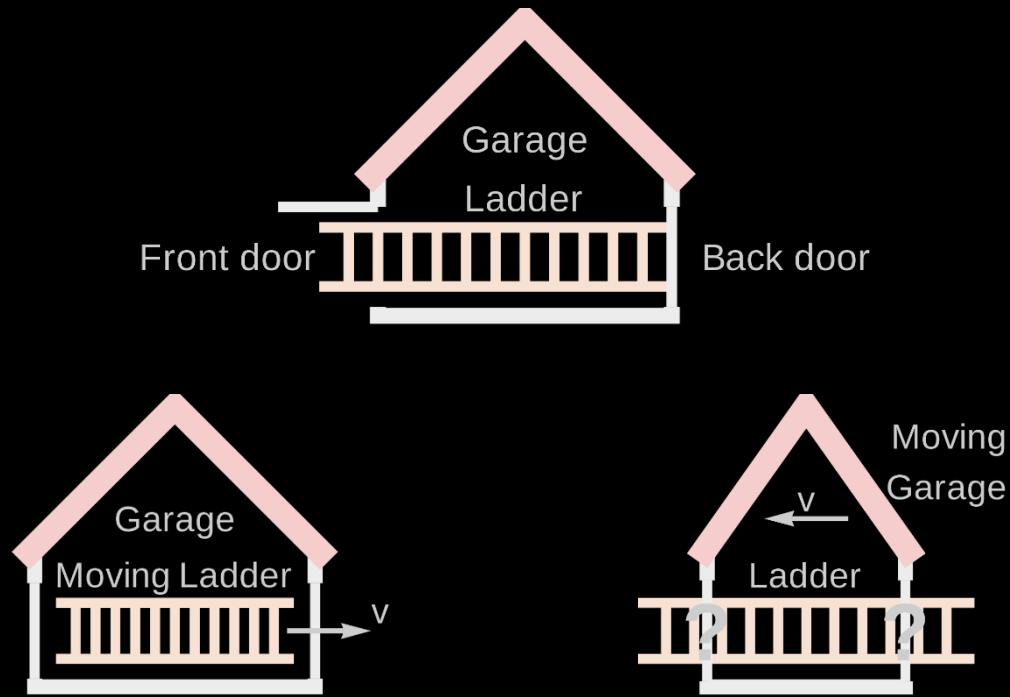
특수 상대성 이론은 시공간에 대한 우리의 개념을
바꾸어야 하는 것처럼 보입니다.
따라서 우리의 직관과 비교해 볼 때
몇 가지 개념적인 역설을 야기하는 것처럼 보입니다.



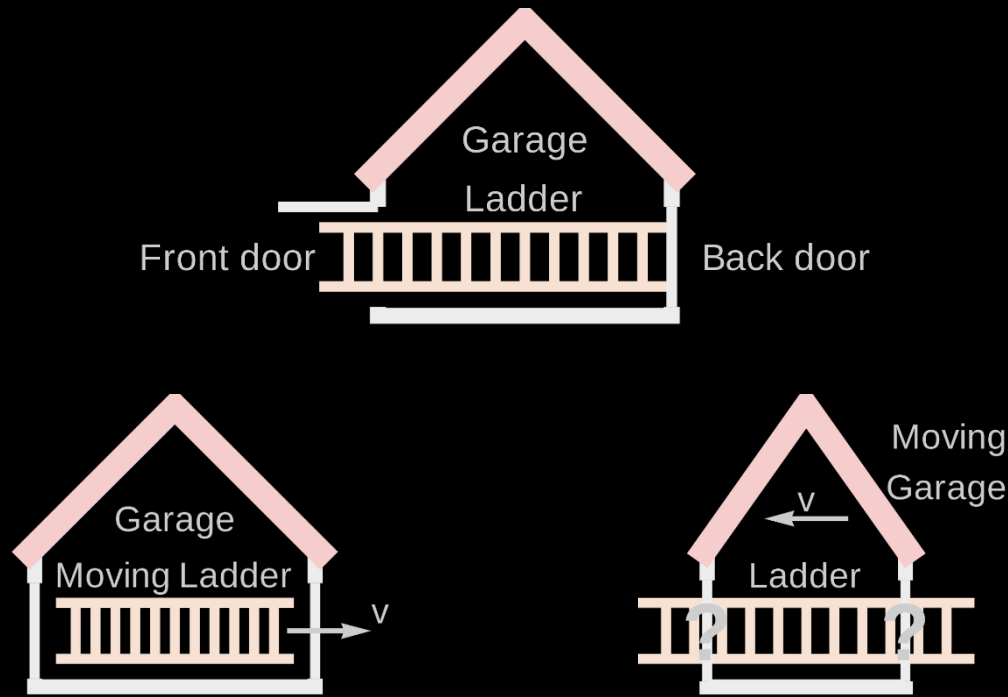
그 중에 하나는 시간 지연이 대칭적이라 할 때,
어느 쪽이 더 느리게 갈 것이냐 하는 질문,
즉 쌍둥이 역설twin paradox로 알려진 것입니다.



이 역설의 핵심은 우주 여행을 하는 쌍둥이는
관성계가 아니라 비관성계라는 것,
즉 두 관찰자는 대칭적이지 않다는 것에 있습니다.



헛간-사다리 역설은 로렌츠 수축이 대칭적이라 할 때,
사다리가 수축을 하는 것과 헛간이 수축을 하는 것이
개념적으로 모순을 일으키는 것처럼 보인다는 것입니다.



이 역설의 경우 로렌츠 수축 자체는 대칭적이지만
그와 함께 동시성의 상대성에 의해
헛간의 문을 닫는 사건이 동시적이지 않을 수 있다는 것을 통해
해결될 수 있습니다.

$$dx = \gamma(dx' + vdt')$$

$$dy = dy'$$

$$dt = \gamma\left(dt' + \frac{v}{c^2}dx'\right)$$

속도의 합성을 이해하기 위해
다음과 같은 미분을 생각합시다.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx' + v dt'}{dt' + \frac{v}{c^2} dx'} = \frac{\frac{dx'}{dt'} + v}{1 + \frac{v}{c^2} \frac{dx'}{dt'}} = \frac{u_x + v}{1 + \frac{v u_x}{c^2}}$$

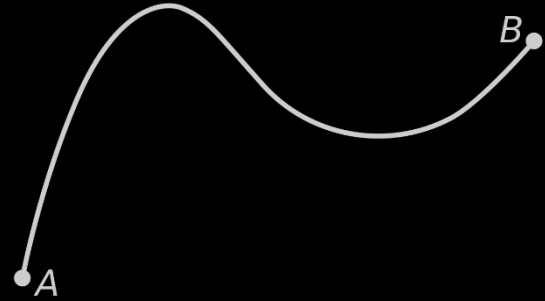
같은 방향의 경우 위와 같은 합성 공식을 얻게 됩니다.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{\gamma \left(dt' + \frac{v}{c^2} dx' \right)} = \frac{\frac{dy'}{dt'}}{\gamma} = \frac{1}{\gamma} u_y$$

$= 0$

수직 방향의 경우에도 시간 지연 효과에 의해
위와 같은 합성 공식을 얻게 됩니다.

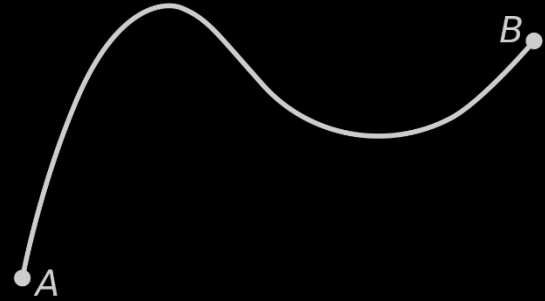
$$x^\mu(\tau) = (ct, \vec{x})$$



마지막으로 상대론적 역학에 대해 살펴봅시다.
상대론적인 관점에서는 입자의 위치는
시간의 함수가 아니라 **고유 시간의 함수**가 됩니다.

$$x^\mu(\tau) = (ct, \vec{x})$$

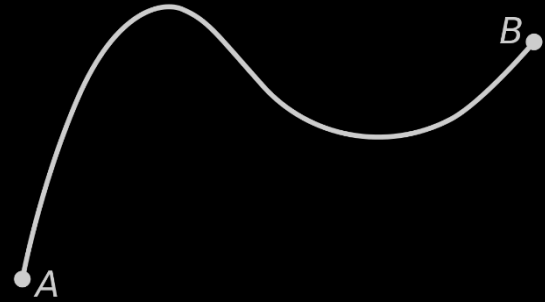
$$v^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau}$$



이 위치 벡터를 고유 시간으로 미분하면 **고유 속도**를 얻습니다.
 한 편, 이와 비교하기 위해 $\frac{d\vec{x}}{dt} \equiv \vec{v}$ 를 **보통 속도**라고 부릅니다.

$$x^\mu(\tau) = (ct, \vec{x})$$

$$v^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau}$$
$$= \left(c \frac{dt}{d\tau}, \frac{d\vec{x}}{d\tau} \right)$$

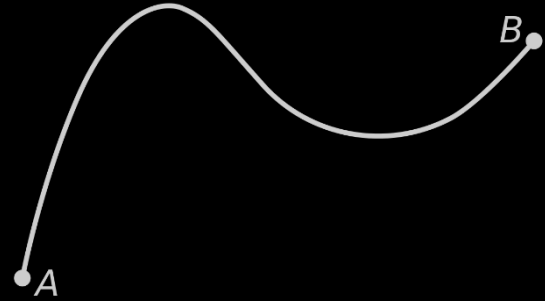


$$x^\mu(\tau) = (ct, \vec{x})$$

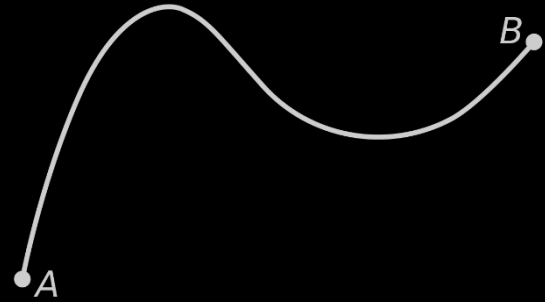
$$v^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

$$= \left(c \frac{dt}{d\tau}, \frac{d\vec{x}}{d\tau} \right)$$

$= \gamma$ 시간 지연



$$x^\mu(\tau) = (ct, \vec{x})$$

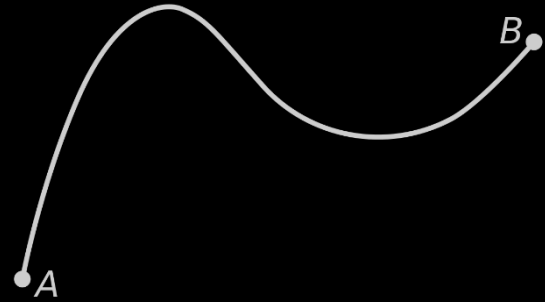


$$v^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

$$= \left(c \frac{dt}{d\tau}, \frac{d\vec{x}}{d\tau} \right) = \left(c\gamma, \frac{dt}{d\tau} \frac{d\vec{x}}{dt} \right)$$

$= \gamma$ 시간 지연

$$x^\mu(\tau) = (ct, \vec{x})$$



$$v^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

$$= \left(c \frac{dt}{d\tau}, \frac{d\vec{x}}{d\tau} \right) = \left(c\gamma, \frac{dt}{d\tau} \frac{d\vec{x}}{dt} \right)$$

$= \gamma$ 시간 지연

$$= (c\gamma, \gamma \vec{v})$$

$$p^\mu \equiv m v^\mu = (mc\gamma, m\gamma\vec{v})$$

이것으로부터 상대론적 운동량을 위와 같이 정의할 수 있습니다.

$$p^\mu \equiv m v^\mu = (mc\gamma, m\gamma\vec{v})$$

$$p_\mu p^\mu = -m^2 c^2 \gamma^2 + m^2 \gamma^2 v^2 = -m^2 c^2$$

따라서 자연스럽게 위와 같은 조합은 로렌츠 스칼라,
즉 로렌츠 변환에 대한 불변량이 됩니다.

$$p^\mu \equiv mv^\mu = (mc\gamma, m\gamma\vec{v})$$

$$p_\mu p^\mu = -m^2 c^2 \gamma^2 + m^2 \gamma^2 v^2 = -m^2 c^2$$

$$cp^0 = \gamma mc^2 \simeq mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3mv^4}{8c^2} + \dots$$

한 편, $cp^0 = \gamma mc^2$ 는 에너지로 해석할 수 있습니다.

$$p^\mu \equiv mv^\mu = (mc\gamma, m\gamma\vec{v})$$

$$p_\mu p^\mu = -m^2 c^2 \gamma^2 + m^2 \gamma^2 v^2 = -m^2 c^2$$

$$cp^0 = \gamma mc^2 \simeq \underbrace{mc^2}_{\text{정지 에너지}} + \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{\text{운동 에너지}} + \frac{3mv^4}{8c^2} + \dots$$

한 편, $cp^0 = \gamma mc^2$ 는 에너지로 해석할 수 있습니다.

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right)$$

즉, 다음과 같은 조합이 상대론적 벡터가 된다는 것을 의미합니다.

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right)$$

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2 c^2$$

그리고 다음과 같은 상대론적 불변량의 관계가 성립합니다.

그런데 질량과 에너지를 교환하는 이 관계가
정말 맞을까요?
이것을 어떻게 정당화할 수 있을까요?

$$\begin{aligned}
W = T &= \int \frac{d}{dt}(\gamma m \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} dt \\
&= m \int_0^u u d(\gamma u) \\
&= \gamma m u^2 - m \int_0^u \frac{u du}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \\
&= \gamma m u^2 + m c^2 \sqrt{1 - u^2/c^2} \Big|_0^u \\
&= \gamma m u^2 + m c^2 \sqrt{1 - u^2/c^2} - m c^2 \\
&= \gamma m c^2 - m c^2
\end{aligned}$$

상대론적 운동량을 시간으로 미분하고
이것을 경로 적분해서 일을 구해 봅시다.

여기에서 에너지를 해석해 봅시다.

여기에서 다시 한 번 상대론적 운동 에너지를 얻게 됩니다.

그러나 사실 아인슈타인은
처음부터 이런 방식으로 질량-에너지 등가 관계를
이해하지는 않았습니다.

아인슈타인은 어떻게 이 발상을 했을까요?

아인슈타인은 먼저 로렌츠 변환이라는 좌표 변환을 사용해서
길이, 시간, 파장, 진동수 등의
기하학적인 값들이 어떻게 변하는지에 대해서
살펴보았습니다.

그렇다면 이러한 기하학적 양들을 이외의
다양한 물리적 대상들에 대해서
특수 상대성 이론이 의미하는 것은 무엇일까요?

13. *Ist die Trägheit eines Körpers von seinem
Energieinhalt abhängig?*
von A. Einstein.

Die Resultate einer jüngst in diesen Annalen von mir publizierten elektrodynamischen Untersuchung¹⁾ führen zu einer sehr interessanten Folgerung, die hier abgeleitet werden soll.

Ich legte dort die Maxwell-Hertzschen Gleichungen für den leeren Raum nebst dem Maxwellschen Ausdruck für die elektromagnetische Energie des Raumes zugrunde und außerdem das Prinzip:

Die Gesetze, nach denen sich die Zustände der physikalischen Systeme ändern, sind unabhängig davon, auf welches von zwei relativ zueinander in gleichförmiger Parallel-Translationsbewegung befindlichen Koordinatensystemen diese Zustandsänderungen bezogen werden (Relativitätsprinzip).

여기에서 아인슈타인의
또 하나의 1905년 논문을 살펴보고자 합니다.

“물체의 관성은 에너지의 내용에 의존하는가?”

13. *Ist die Trägheit eines Körpers von seinem
Energieinhalt abhängig?*
von A. Einstein.

Die Resultate einer jüngst in diesen Annalen von mir publizierten elektrodynamischen Untersuchung¹⁾ führen zu einer sehr interessanten Folgerung, die hier abgeleitet werden soll.

Ich legte dort die Maxwell-Hertzschen Gleichungen für den leeren Raum nebst dem Maxwellschen Ausdruck für die elektromagnetische Energie des Raumes zugrunde und außerdem das Prinzip:

Die Gesetze, nach denen sich die Zustände der physikalischen Systeme ändern, sind unabhängig davon, auf welches von zwei relativ zueinander in gleichförmiger Parallel-Translationsbewegung befindlichen Koordinatensystemen diese Zustandsänderungen bezogen werden (Relativitätsprinzip).

여기에서 아인슈타인의 빛나는 통찰력을
한번 더 살펴볼 수 있습니다.

13. *Ist die Trägheit eines Körpers von seinem
Energieinhalt abhängig?*
von A. Einstein.

Die Resultate einer jüngst in diesen Annalen von mir publizierten elektrodynamischen Untersuchung¹⁾ führen zu einer sehr interessanten Folgerung, die hier abgeleitet werden soll.

Ich legte dort die Maxwell-Hertzschen Gleichungen für den leeren Raum nebst dem Maxwellschen Ausdruck für die elektromagnetische Energie des Raumes zugrunde und außerdem das Prinzip:

Die Gesetze, nach denen sich die Zustände der physikalischen Systeme ändern, sind unabhängig davon, auf welches von zwei relativ zueinander in gleichförmiger Parallel-Translationsbewegung befindlichen Koordinatensystemen diese Zustandsänderungen bezogen werden (Relativitätsprinzip).

아인슈타인은 이 논문에서 **질량과 에너지의 등가**를 설명합니다.
그런데 중요한 것은 아인슈타인 자신도
질량과 에너지 사이에 구체적으로 어떤 관계가 있는지
처음에는 아직 잘 알지 못했던 것입니다.

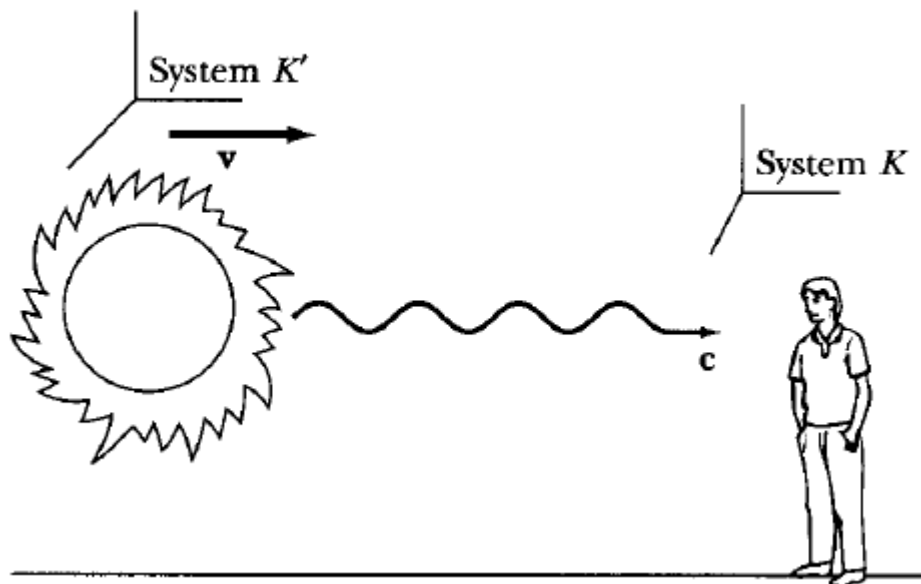
13. *Ist die Trägheit eines Körpers von seinem
Energieinhalt abhängig?*
von A. Einstein.

Die Resultate einer jüngst in diesen Annalen von mir publizierten elektrodynamischen Untersuchung¹⁾ führen zu einer sehr interessanten Folgerung, die hier abgeleitet werden soll.

Ich legte dort die Maxwell-Hertzschen Gleichungen für den leeren Raum nebst dem Maxwellschen Ausdruck für die elektromagnetische Energie des Raumes zugrunde und außerdem das Prinzip:

Die Gesetze, nach denen sich die Zustände der physikalischen Systeme ändern, sind unabhängig davon, auf welches von zwei relativ zueinander in gleichförmiger Parallel-Translationsbewegung befindlichen Koordinatensystemen diese Zustandsänderungen bezogen werden (Relativitätsprinzip).

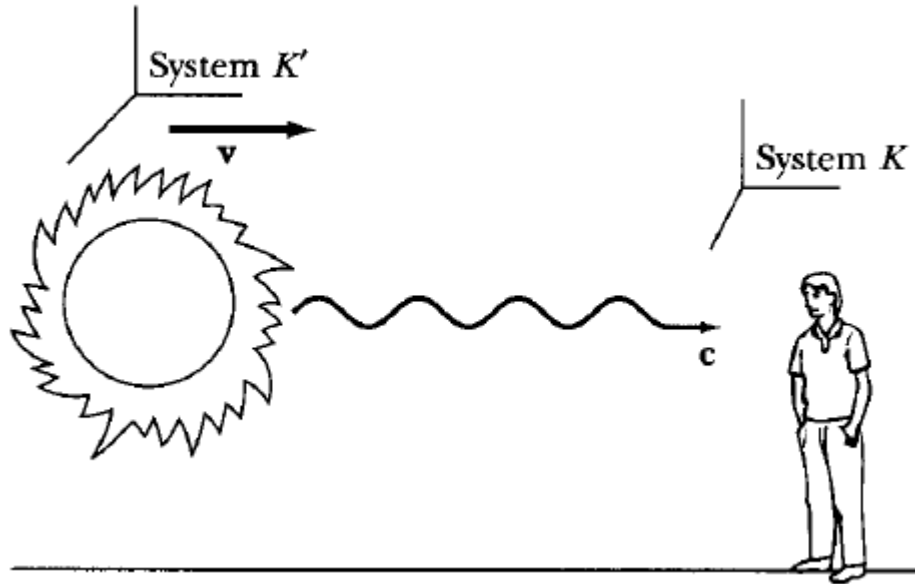
여기에서 그는 어떻게 자신의 생각을 발전시켰을까요?
이제 그의 사고 실험을 따라가 봅시다.



$$\lambda = \frac{c\Delta t - v\Delta t}{n}$$

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{cn}{c\Delta t - v\Delta t}$$

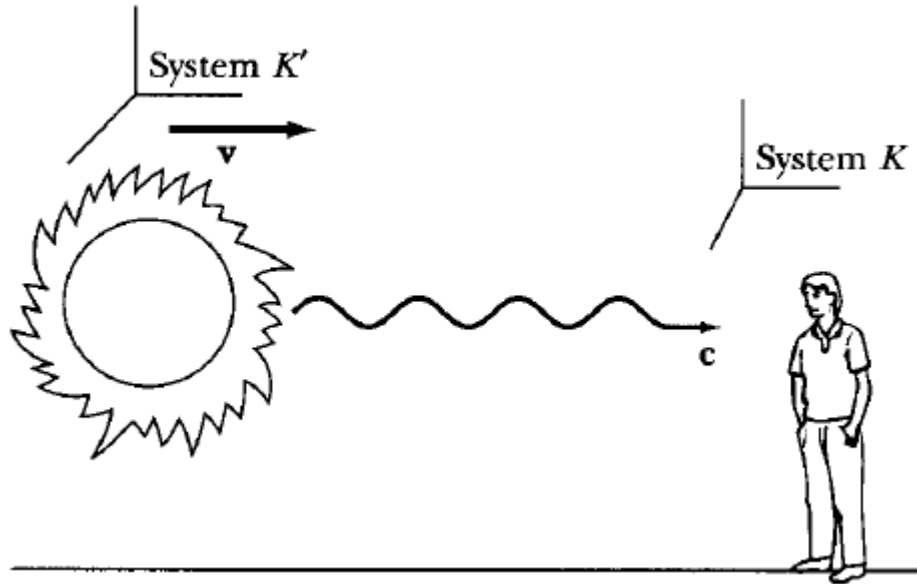
먼저 위와 같은 상대론적 도플러 효과를 살펴봅시다.
 광원이 관찰자에게 접근하는 경우,
 관찰자는 파동이 n 번 진동할 때,
 위와 같은 파장을 측정합니다.



$$n = \nu_0 \Delta t'$$

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\gamma}$$

한 편, 광원의 관점에서는 파동이 n 번 진동한다는 사실은 변하지 않지만 소요되는 시간은 고유 시간이 됩니다.



$$\begin{aligned}
 \nu &= \frac{1}{(1 - v/c)} \frac{\nu_0}{\gamma} \\
 &= \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - v/c} \nu_0 \\
 &= \frac{\sqrt{1 + \beta}}{\sqrt{1 - \beta}} \nu_0
 \end{aligned}$$

이 효과들을 모두 고려하면
 도플러 효과에 대한 공식을 얻게 됩니다.
 즉, 광원이 접근하면 파장은 짧아지게 됩니다.

f : 방출된 파동의 진동수

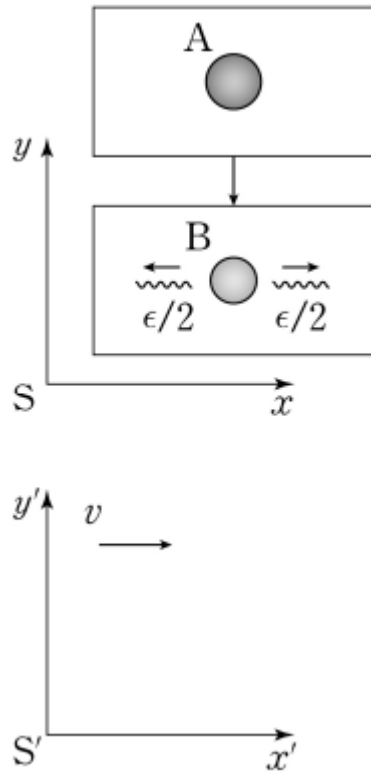
f' : 측정된 파동의 진동수

c : 빛의 속력

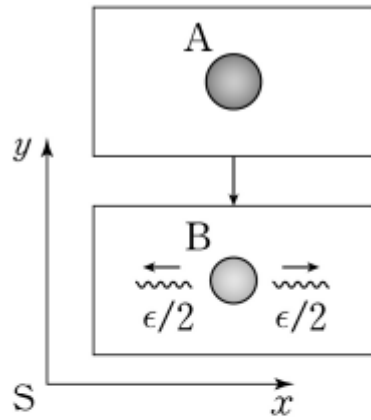
v : 관찰자와 음원 사이의 상대 속력

$$f' = \sqrt{\frac{c \pm v}{c \mp v}} f$$

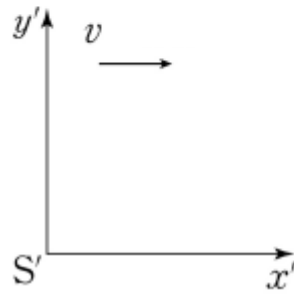
정리하면, 상대론적 도플러 효과는 다음과 같이 설명됩니다.
여기에서 v 는 관찰자와 광원 사이의 상대 속력이며,
위의 관계식은 v 에만 의존합니다.



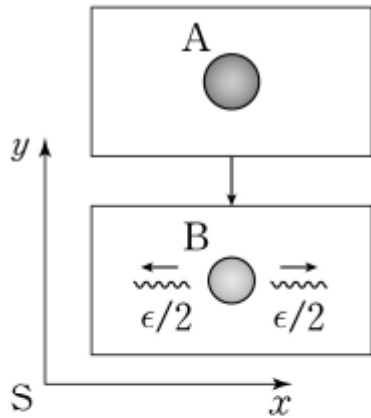
이러한 상대론적 도플러 효과를 염두에 두고
 위와 같은 상황을 생각해 봅시다.
 입자 A에서 광자 두 개가 대칭적으로 방출되어
 B로 붕괴한다고 합시다.



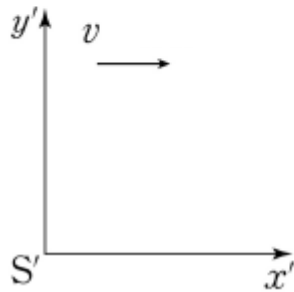
$$E_S = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}$$



정지계에서는 당연히 운동량이 보존됩니다.
이 때, 방출되는 광자들의 에너지의 합을 E_S 라고 합시다.

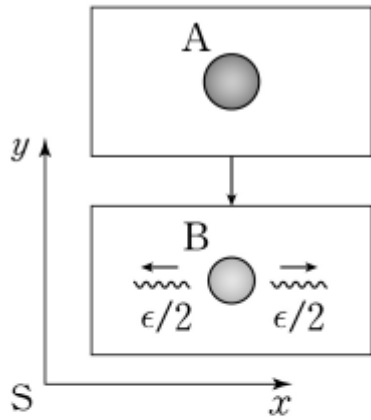


$$E_S = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}$$

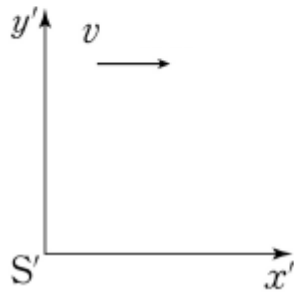


$$E_{S'} = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \frac{\epsilon}{2} + \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} \frac{\epsilon}{2} = \gamma \epsilon$$

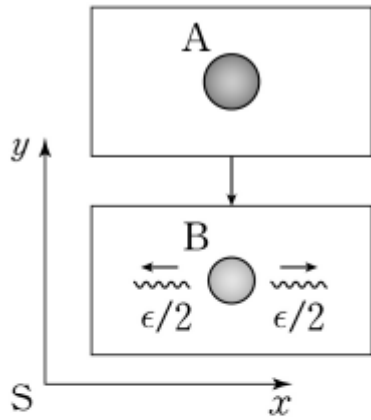
다른 한 편, 이것을 속력 v 로 움직이는 계에서 보면 어떻게 될까요?
 이 때 방출되는 광자의 에너지를 $E_{S'}$ 이라고 합시다.
 광전 효과에 대한 아인슈타인의 이론을 적용하면,
 이 에너지는 상대론적 도플러 효과로 구할 수 있습니다.



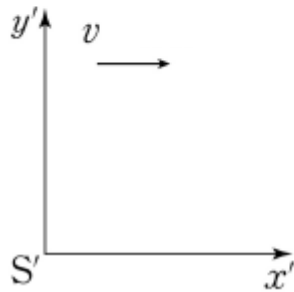
$$E_{S'} - E_S$$



이 둘 사이의 차이는 어떤 의미가 있을까요?
 광자의 에너지가 커진 이유는 관찰자가 운동했기 때문입니다.
 관찰자가 운동하는 계의 관점에서는
 A와 B에도 운동 에너지가 생기게 됩니다.



$$E_{S'} - E_S = K'_A - K'_B$$



에너지 보존을 생각해 보면,
 A와 B의 운동 에너지의 차이가
 광자에게 추가로 전달된 분량에 해당합니다.
 즉, 위와 같은 에너지 관계식이 성립해야 하는 것입니다.

$$K'_A - K'_B \simeq \frac{1}{2}(m_A - m_B)v^2 = \frac{1}{2}\Delta m v^2$$

그러면 속력이 충분히 작은 경우
운동 에너지의 차이는 위와 같이 전개됩니다.

$$K'_A - K'_B \simeq \frac{1}{2} (m_A - m_B) v^2 = \frac{1}{2} \Delta m v^2$$

$$E_{S'} - E_S = \gamma \epsilon - \epsilon \simeq \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \epsilon$$

한 편, 상대론적 도플러 효과에 의해
광자의 에너지 차이는 위와 같이 전개 됩니다.

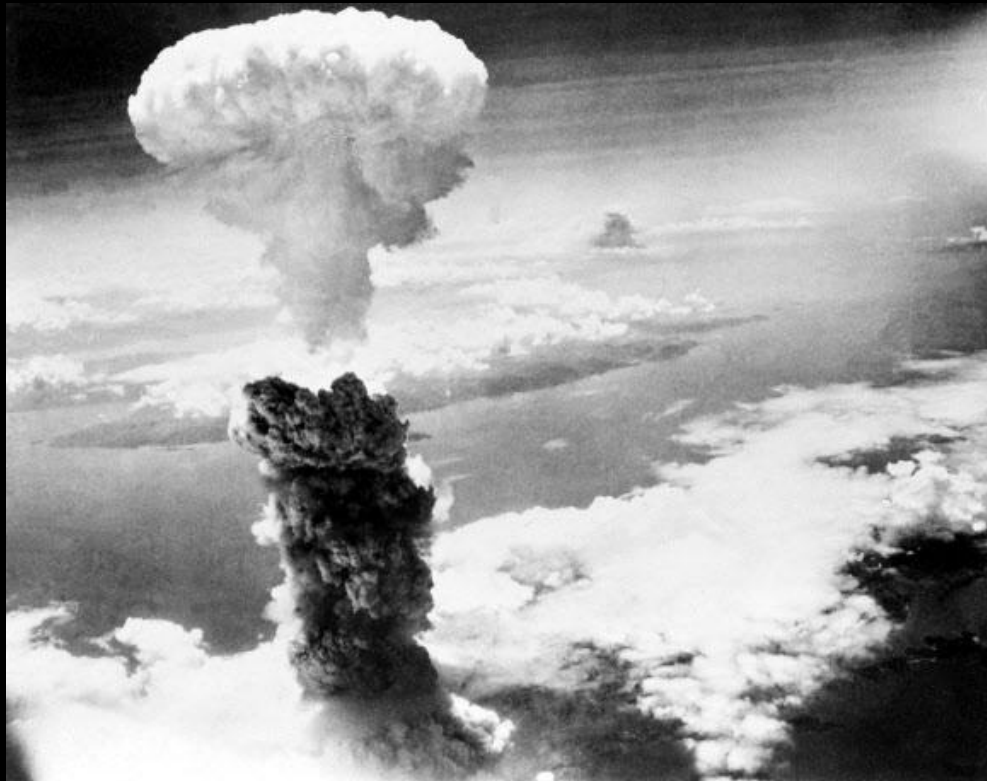
$$K'_A - K'_B \simeq \frac{1}{2} (m_A - m_B) v^2 = \frac{1}{2} \Delta m v^2$$

$$E_{S'} - E_S = \gamma \epsilon - \epsilon \simeq \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \epsilon$$

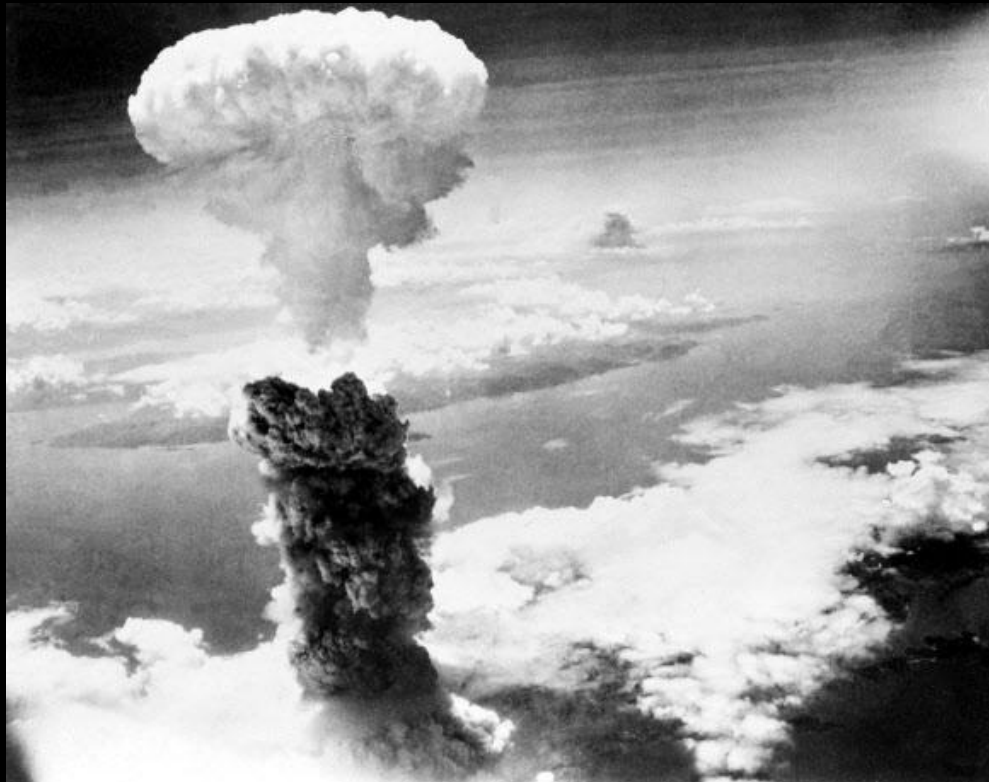
$$\epsilon = \Delta m c^2$$

따라서 위의 두 식을 비교하면 질량 결손과 에너지 사이에
위와 같은 관계를 얻게 됩니다.

이것이 그 유명한 질량-에너지 등가 관계식입니다.



최종적으로 우리는 유명한
질량-에너지 등가 관계식 $E = mc^2$ 을 얻게 됩니다.



이 관계식 역시 상대성 이론의
아주 유명하고 중요한 결과 중 하나입니다.

이것은 입자가 붕괴하는 과정에서 **질량 결손**이 생기면,
이 질량의 차이는 다른 **에너지**로 전환된다는 것을 의미합니다.

사실 아인슈타인의 첫 번째 특수 상대성 이론 논문에서는
로렌츠 변환을 중점적으로 다루었습니다.

여기에서 운동량이나 에너지와 같은 물리량까지
로렌츠 변환의 영향을 받는다고 파악하기는 어려웠던 것입니다.

그러나 놀랍게도 아인슈타인은
자신이 동원할 수 있는 **간접적인 방법들**을 사용해서
질량-에너지 관계식을 증명했던 것입니다.

이러한 통찰은 우리에게 놀라운 사실을 알려줍니다.
정지해 있는 물체도 에너지를 가진다는 것,
더 나아가서 로렌츠 변환을 단순히 시간-공간 뿐 아니라
질량-에너지를 포함한 다양한 물리량 사이의 변환으로
확장할 수 있는 생각에까지 이르게 된 것입니다.

감사합니다