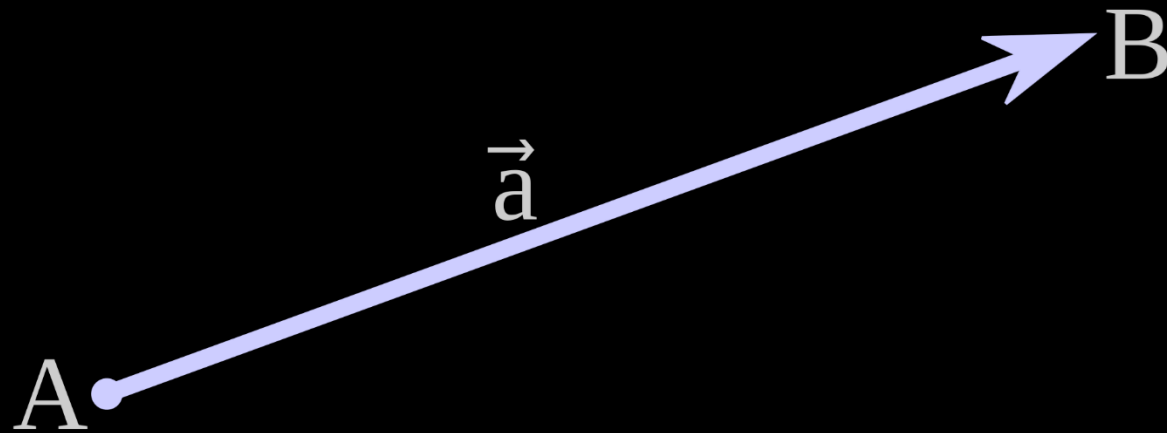
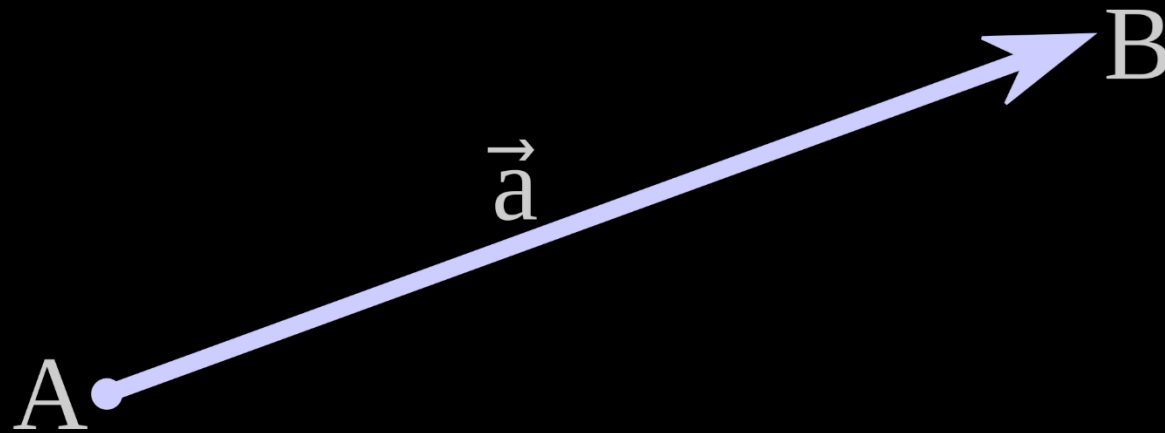


제1장 벡터해석



이제 벡터에 대해서,
그리고 그 미분과 적분에 대해서
살펴봅시다.



벡터는 보통 크기와 방향을 가진 양으로 생각됩니다.
수학적으로 벡터는 다음 두 가지 연산이 정의된
원소들을 의미합니다.

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$$

덧셈의 교환법칙

$$(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C})$$

덧셈의 결합법칙

$$0 + \vec{A} = \vec{A}$$

덧셈의 항등원의 존재

$$\vec{A} + (-\vec{A}) = 0$$

덧셈의 역원의 존재

먼저 벡터의 덧셈에 대한 위의 네 가지 공리입니다.

$$a(b\vec{A}) = (ab)\vec{A}$$

스칼라곱의 결합법칙

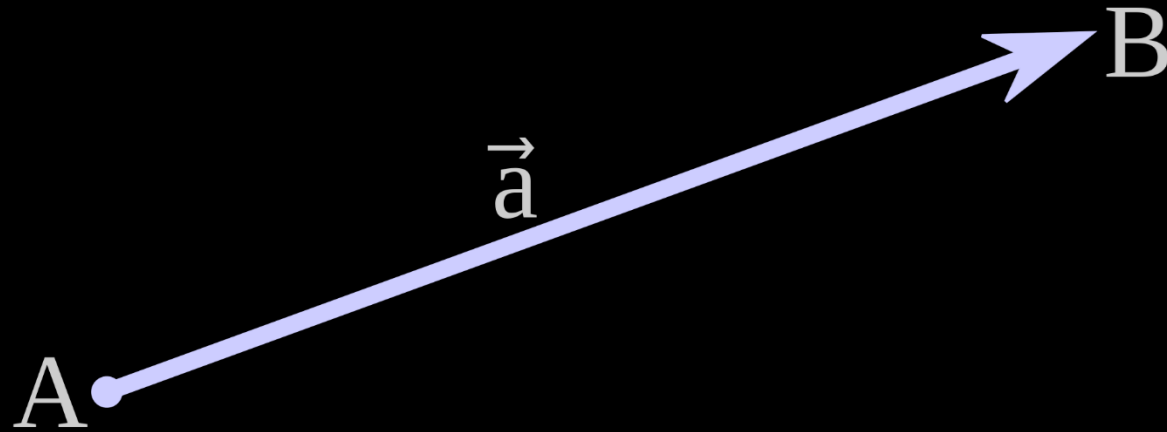
$$1\vec{A} = \vec{A}$$

스칼라곱의 항등원의 존재

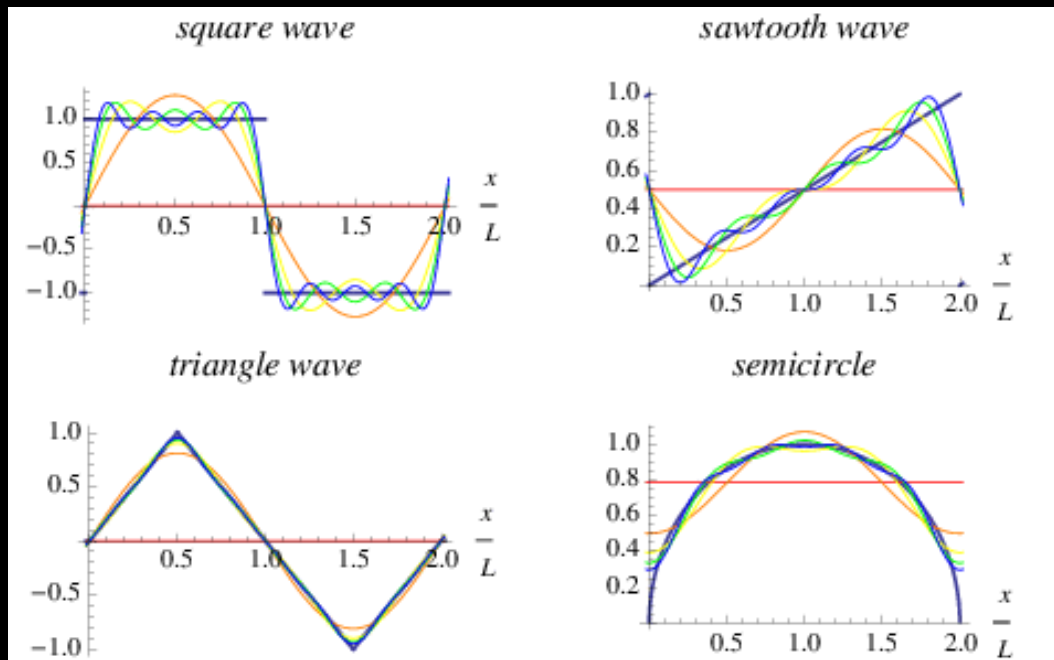
그리고 스칼라곱에 대한 위의 두 가지 공리입니다.

$$(a + b)(\vec{A} + \vec{B}) = a\vec{A} + b\vec{A} + a\vec{B} + b\vec{B}$$

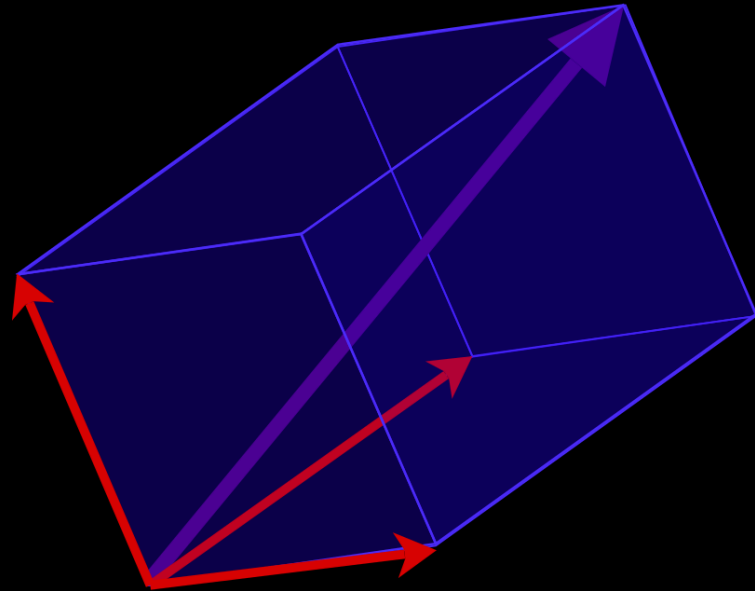
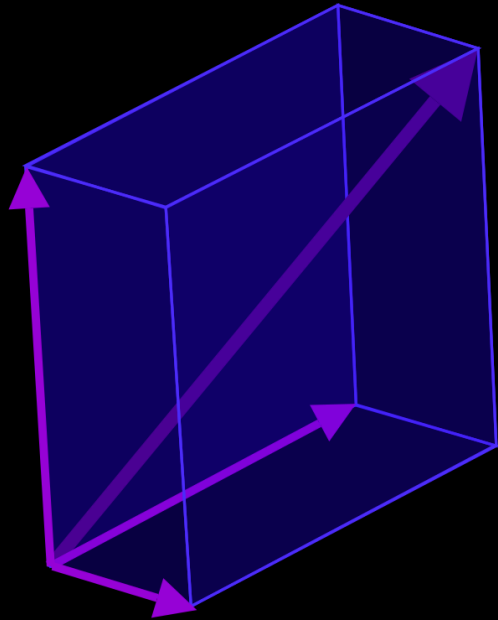
마지막으로 벡터의 덧셈과 스칼라 곱에 대한 분배법칙입니다.



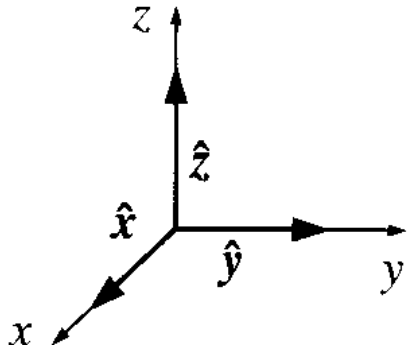
이러한 방식으로 덧셈과 스칼라곱이 정의된 원소들의 공간을
벡터공간vector space이라고 합니다.



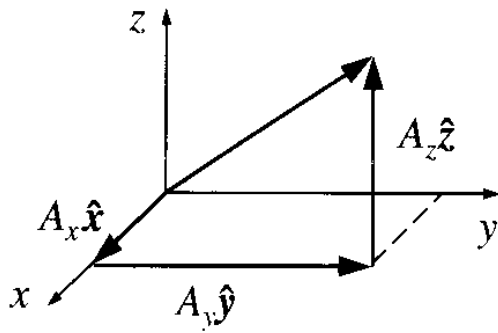
따라서 벡터공간은 반드시 시각적으로 표시되는
유클리드 공간이어야만 하는 것은 아닙니다.
예를 들면, 함수들도 벡터공간을 만들 수 있습니다.



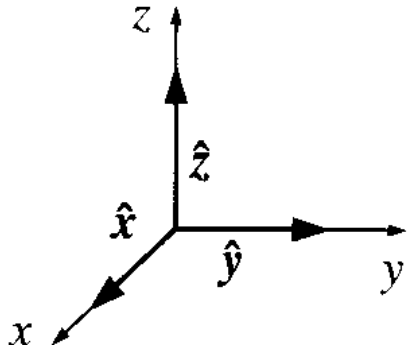
벡터공간이 가지는 한 가지 특징은 모든 벡터가
항상 **기저basis**들의 선형 중첩에 의해서 표현될 수 있다는 것입니다.



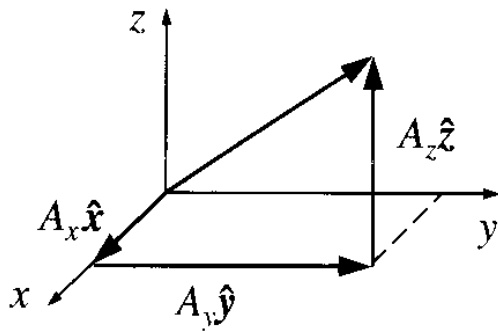
$$\vec{A} = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}$$



예를 들어 유클리드 공간은
위와 같은 표현이 항상 가능합니다.



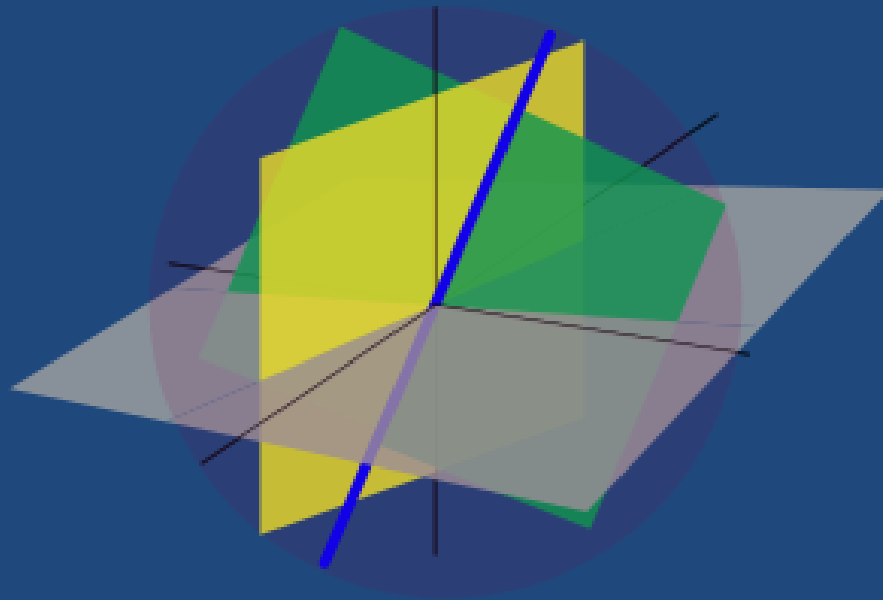
$$\vec{A} = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}$$



이 기저들의 크기가 1이고 서로 직교한다면
사용하기가 더 쉬울 것 같습니다.

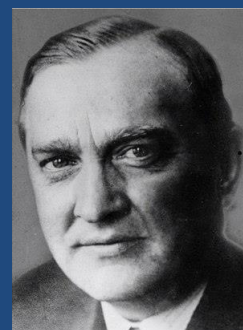
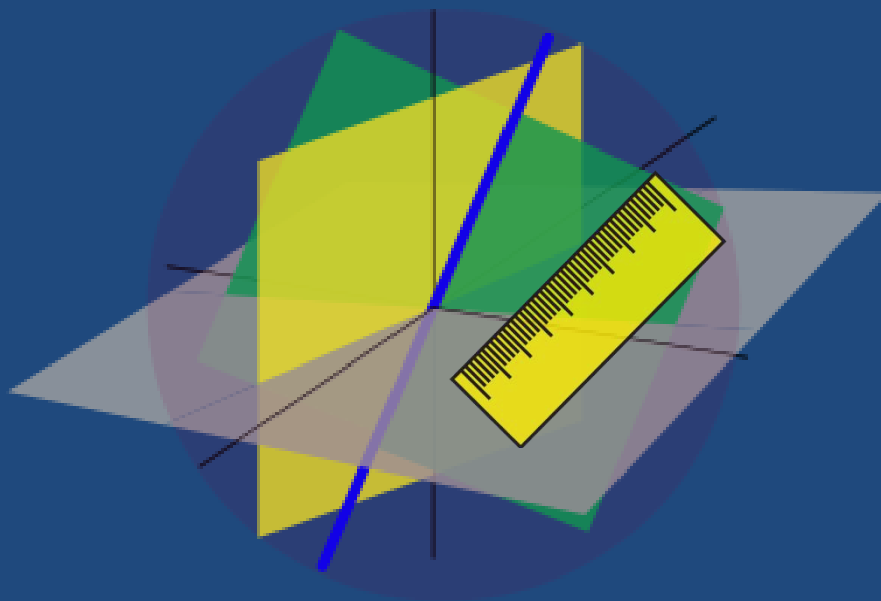
벡터공간에 크기 및 직교성의 개념을 어떻게 줄 수 있을까요?

벡터 공간



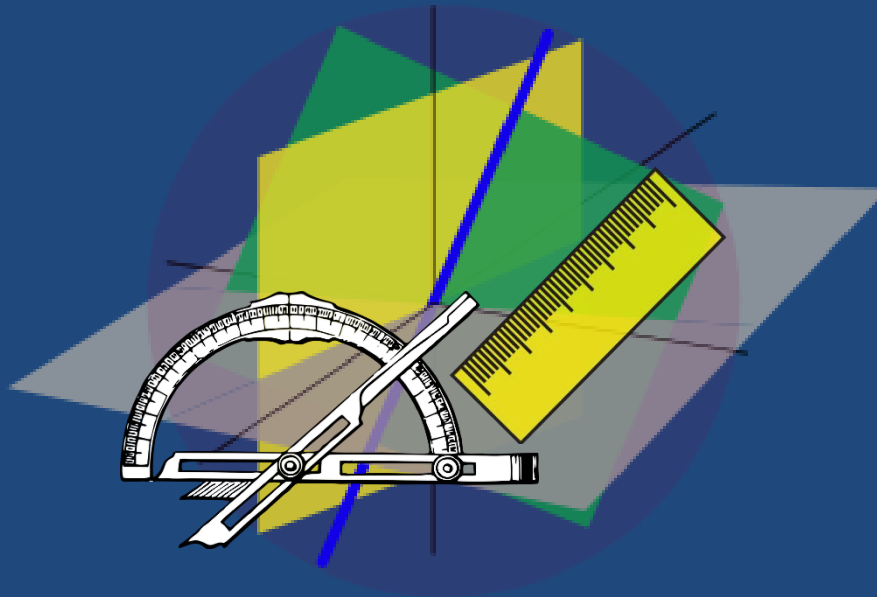
벡터 공간이란 선형연산이 가능한 벡터들이 정의된
수학적 공간을 말합니다.

바나흐 공간



벡터 공간에 거리_{norm} 를 정의할 수 있으면
바나흐 공간이라고 부릅니다.

힐베르트 공간



바나흐 공간에 각도를 측정하는 **내적**inner product을
잘 정의할 수 있으면
힐베르트 공간이라고 부릅니다.

$$\hat{x} \cdot \hat{x} = \hat{y} \cdot \hat{y} = \hat{z} \cdot \hat{z} = 1$$
$$\text{otherwise } 0$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

유클리드 공간에서는 **내적**inner product을 위와 같이 정의합니다.
이렇게 정의하면 우리의 기하학적 개념과 일치하는
좋은 정의를 얻게 됩니다.

$$\begin{aligned}
 \hat{x} \times \hat{y} &= \hat{y} \times \hat{z} = \hat{z} \times \hat{x} = 1 \\
 \hat{y} \times \hat{x} &= \hat{z} \times \hat{y} = \hat{x} \times \hat{z} = -1 \\
 \hat{x} \times \hat{x} &= \hat{y} \times \hat{y} = \hat{z} \times \hat{z} = 0
 \end{aligned}$$

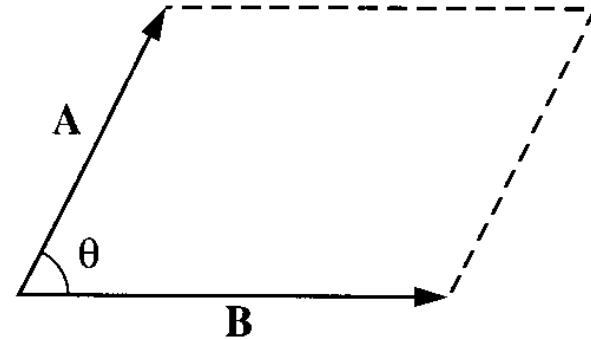
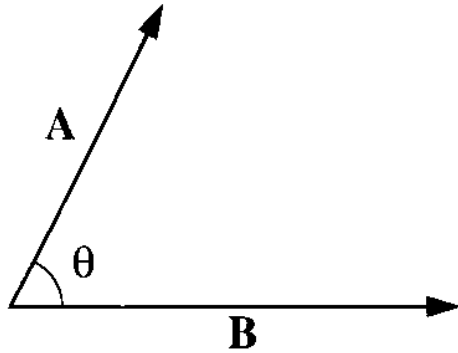
$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

그 밖에 우리는 외적(outer product)이라는 것도
위와 같이 정의할 수 있습니다.

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$$

그러면 정의로부터 위와 같은 분배법칙도 쉽게 유도할 수 있습니다.



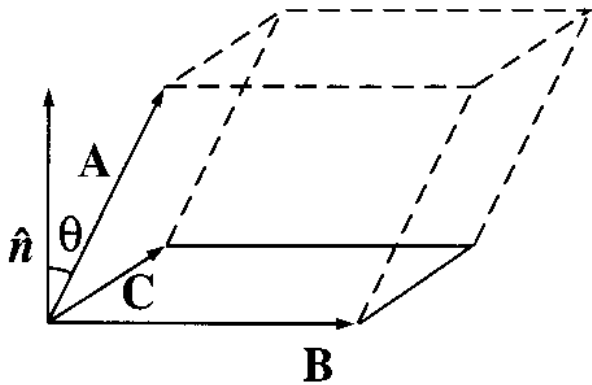
$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |A||B| \cos \theta$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = |A||B| \sin \theta \hat{n}$$

내적과 외적은 위와 같은 기하학적 의미를 가집니다.

내적은 **두 벡터 사이의 각도**를 주고,

외적은 두 벡터가 만들어내는 **평행사변형의 면적**을 줍니다.
이 때, 외적의 벡터는 평행사변형과 수직인 방향을 향합니다.



$$\begin{aligned}\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) &= \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \\ &= \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})\end{aligned}$$

따라서 세 벡터에 대해 내적과 외적을 하는 **스칼라 삼중곱**을 하면
평행육면체의 부피를 얻게 됩니다.

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

세 개의 벡터를 사용해 **벡터 삼중곱**을 하는 경우도 많이 나옵니다.
특히 위와 같은 공식을 기억하시기 바랍니다.

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

$$[\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})]_x = A_y(\vec{B} \times \vec{C})_z - A_z(\vec{B} \times \vec{C})_y$$

이 식을 증명하려면 좌변과 우변을 성분별로 비교하면 됩니다.

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

$$\begin{aligned} [\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})]_x &= A_y (\vec{B} \times \vec{C})_z - A_z (\vec{B} \times \vec{C})_y \\ &= A_y (B_x C_y - B_y C_x) - A_z (B_z C_x - B_x C_z) \end{aligned}$$

이 식을 증명하려면 좌변과 우변을 성분별로 비교하면 됩니다.

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

$$\begin{aligned} [\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})]_x &= A_y(\vec{B} \times \vec{C})_z - A_z(\vec{B} \times \vec{C})_y \\ &= A_y(B_x C_y - B_y C_x) - A_z(B_z C_x - B_x C_z) \\ &= B_x(A_y C_y + A_z C_z) - C_x(A_y B_y + A_z B_z) \end{aligned}$$

이 식을 증명하려면 좌변과 우변을 성분별로 비교하면 됩니다.

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

$$\begin{aligned} [\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})]_x &= A_y(\vec{B} \times \vec{C})_z - A_z(\vec{B} \times \vec{C})_y \\ &= A_y(B_x C_y - B_y C_x) - A_z(B_z C_x - B_x C_z) \\ &= B_x(A_y C_y + A_z C_z) - C_x(A_y B_y + A_z B_z) \\ &= \textcolor{red}{B_x}(\textcolor{red}{A_x} \textcolor{red}{C_x} + A_y C_y + A_z C_z) - \textcolor{red}{C_x}(\textcolor{red}{A_x} \textcolor{red}{B_x} + A_y B_y + A_z B_z) \end{aligned}$$

이 식을 증명하려면 좌변과 우변을 성분별로 비교하면 됩니다.

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

$$\begin{aligned} [\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})]_x &= A_y(\vec{B} \times \vec{C})_z - A_z(\vec{B} \times \vec{C})_y \\ &= A_y(B_x C_y - B_y C_x) - A_z(B_z C_x - B_x C_z) \\ &= B_x(A_y C_y + A_z C_z) - C_x(A_y B_y + A_z B_z) \\ &= B_x(\textcolor{red}{A}_x \textcolor{red}{C}_x + \textcolor{red}{A}_y \textcolor{red}{C}_y + \textcolor{red}{A}_z \textcolor{red}{C}_z) - C_x(\textcolor{teal}{A}_x \textcolor{teal}{B}_x + \textcolor{teal}{A}_y \textcolor{teal}{B}_y + \textcolor{teal}{A}_z \textcolor{teal}{B}_z) \\ &= B_x(\textcolor{red}{\vec{A}} \cdot \textcolor{red}{\vec{C}}) - C_x(\textcolor{teal}{\vec{A}} \cdot \textcolor{teal}{\vec{B}}) \end{aligned}$$

이 식을 증명하려면 좌변과 우변을 성분별로 비교하면 됩니다.

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = \vec{E} \cdot (\vec{C} \times \vec{D})$$

벡터 삼중곱을 사용하면 좀 더 복잡한 관계식도 증명할 수 있습니다.

$$\begin{aligned}(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) &= \vec{E} \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) \\ &= \vec{C} \cdot (\vec{D} \times \vec{E})\end{aligned}$$

벡터 삼중곱을 사용하면 좀 더 복잡한 관계식도 증명할 수 있습니다.

$$\begin{aligned}
 (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) &= \vec{E} \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) \\
 &= \vec{C} \cdot (\vec{D} \times \vec{E}) \\
 &= \vec{C} \cdot (\vec{D} \times (\vec{A} \times \vec{B}))
 \end{aligned}$$

벡터 삼중곱을 사용하면 좀 더 복잡한 관계식도 증명할 수 있습니다.

$$\begin{aligned}
(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) &= \vec{E} \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) \\
&= \vec{C} \cdot (\vec{D} \times \vec{E}) \\
&= \vec{C} \cdot (\vec{D} \times (\vec{A} \times \vec{B})) \\
&= \vec{C} \cdot (\vec{A}(\vec{D} \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\vec{D} \cdot \vec{A}))
\end{aligned}$$

벡터 삼중곱을 사용하면 좀 더 복잡한 관계식도 증명할 수 있습니다.

$$\begin{aligned}
(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) &= \vec{E} \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) \\
&= \vec{C} \cdot (\vec{D} \times \vec{E}) \\
&= \vec{C} \cdot (\vec{D} \times (\vec{A} \times \vec{B})) \\
&= \vec{C} \cdot (\vec{A}(\vec{D} \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\vec{D} \cdot \vec{A})) \\
&= (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{B} \cdot \vec{C})(\vec{A} \cdot \vec{D})
\end{aligned}$$

벡터 삼중곱을 사용하면 좀 더 복잡한 관계식도 증명할 수 있습니다.

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times (\vec{C} \times \vec{D})) = \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{E})$$

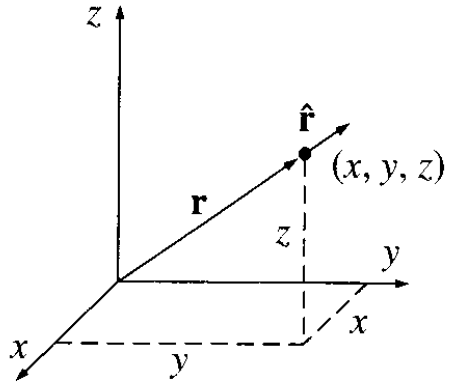
벡터 삼중곱을 사용하면 좀 더 복잡한 관계식도 증명할 수 있습니다.

$$\begin{aligned}\vec{A} \times (\vec{B} \times (\vec{C} \times \vec{D})) &= \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{E}) \\ &= \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{E}) - \vec{E}(\vec{A} \cdot \vec{B})\end{aligned}$$

벡터 삼중곱을 사용하면 좀 더 복잡한 관계식도 증명할 수 있습니다.

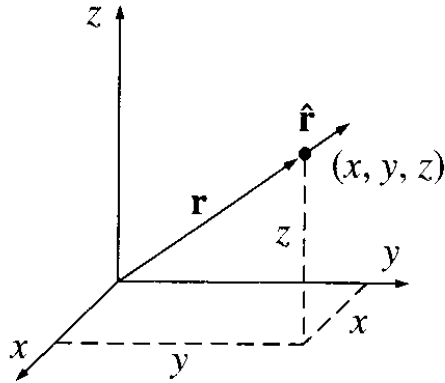
$$\begin{aligned}
\vec{A} \times (\vec{B} \times (\vec{C} \times \vec{D})) &= \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{E}) \\
&= \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{E}) - \vec{E}(\vec{A} \cdot \vec{B}) \\
&= \vec{B}(\vec{A} \cdot (\vec{C} \times \vec{D})) - (\vec{C} \times \vec{D})(\vec{A} \cdot \vec{B})
\end{aligned}$$

벡터 삼중곱을 사용하면 좀 더 복잡한 관계식도 증명할 수 있습니다.



$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$

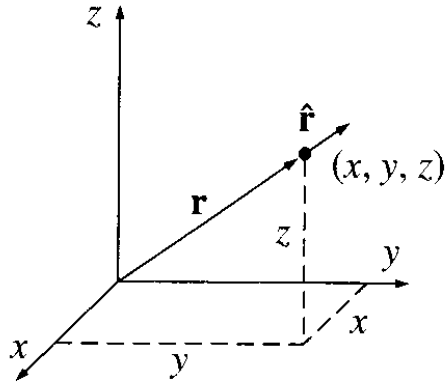
특히 위치를 나타내는 벡터는 위와 같습니다.



$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

방향을 나타내는 단위벡터도 정의할 수 있습니다.

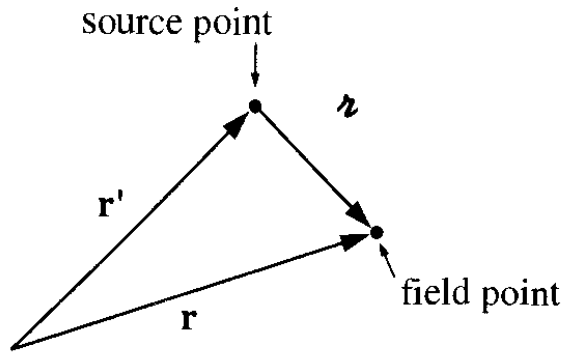


$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$d\vec{r} = dx \hat{x} + dy \hat{y} + dz \hat{z}$$

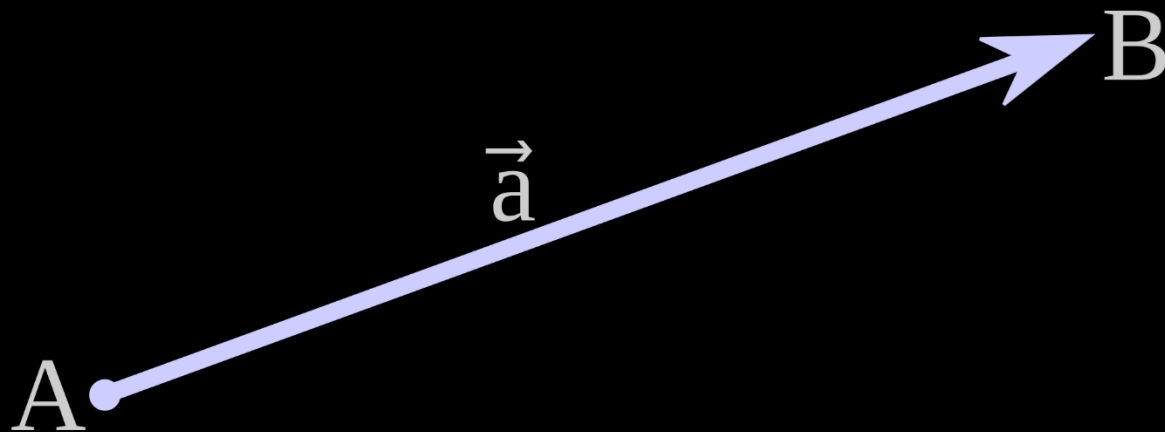
위치 벡터에 대한 미소 길이도 정의할 수 있습니다.



$$\vec{r} - \vec{r}'$$

$$\widehat{\vec{r} - \vec{r}'} = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

많은 경우 원천점source point과 관찰점field point 사이의 상대적인 위치벡터를 사용하기도 합니다.



지금까지 기본적인 벡터의 연산에 대해 보았으므로,
이제 벡터의 **미분**과 **적분**에 대해서
확장해 봅시다.

미분의 경우 우리는

스칼라 및 벡터의

상미분과 편미분을

고려해야 합니다.

미분의 경우 우리는

스칼라 및 벡터의

상미분과 편미분을

고려해야 합니다.

미분의 경우 우리는

스칼라 및 벡터의

상미분과 편미분을



특정한 미분의 방향이 주어짐
(매개변수)



가능한 모든 방향에 대해
미분할 수 있음

고려해야 합니다.

$$\frac{df}{dt}$$

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{dA_x}{dt} \hat{x} + \frac{dA_y}{dt} \hat{y} + \frac{dA_z}{dt} \hat{z}$$

스칼라와 벡터의 상미분은 위와 같습니다.

$$\nabla \equiv \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}$$

편미분은 위와 같은 기울기 gradient 연산자를 사용해서
모든 방향으로 미분해보면 됩니다.

$$\nabla \equiv \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}$$

물론 3차원의 한 방향으로 미분할 수도 있겠지만
이러한 특정 방향의 편미분은 좌표 의존성을 갖게 됩니다.
우리는 최대한 편미분이 좌표변환에 대해
공변적으로 표현되는 미분 연산의 조합을 찾고자 합니다.

$$\nabla f \equiv \hat{x} \frac{\partial f}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial f}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial f}{\partial z}$$

스칼라 함수에 기울기 연산자를 적용하면
스칼라의 **기울기**gradient를 얻게 됩니다.

$$\nabla \equiv \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

기울기 연산자 자체가 벡터이기 때문에,
벡터 함수에 대해서는 두 가지 방법으로 적용이 가능합니다.

$$\nabla \equiv \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}$$

발산 divergence

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

회전 curl

$$\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

기울기 연산자와의 내적을 발산divergence이라고 부르고,
기울기 연산자와의 외적을 회전curl이라고 부릅니다.

예: 위치 벡터

$$\begin{aligned}\nabla r &= \hat{x} \frac{\partial r}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial r}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial r}{\partial z} \\ &= \hat{x} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \hat{y} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \hat{z} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ &= \frac{\vec{r}}{r} = \hat{r}\end{aligned}$$

예: 위치 벡터

$$\begin{aligned}\nabla r &= \hat{x} \frac{\partial r}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial r}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial r}{\partial z} \\ &= \hat{x} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \hat{y} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \hat{z} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ &= \frac{\vec{r}}{r} = \hat{r}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \nabla r &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ &= \frac{2}{r}\end{aligned}$$

$$\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$$

$$\nabla \cdot (\vec{A} + \vec{B}) = \nabla \cdot \vec{A} + \nabla \cdot \vec{B}$$

$$\nabla \times (\vec{A} + \vec{B}) = \nabla \times \vec{A} + \nabla \times \vec{B}$$

벡터의 미분 연산에 대한 위의 관계식은
쉽게 확인할 수 있습니다.

$$\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$$

$$\nabla \cdot (f\vec{A}) = f(\nabla \cdot \vec{A}) + \vec{A} \cdot (\nabla f)$$

$$\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B})$$

$$\nabla \times (f\vec{A}) = f(\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \times (\nabla f)$$

두 함수의 미분에 대한 라이프니츠 규칙 Leibniz rule은
위와 같이 표현됩니다.

여기에서 외적이 있는 경우는 연산의 순서에 따라
부호가 바뀌기도 합니다.

좀 더 어려운 두 관계식을 증명해 봅시다.

$$\nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A}) + (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A}$$

좀 더 어려운 두 관계식을 증명해 봅시다.

$$\nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A}) + (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A}$$

$$\begin{aligned} [\vec{A} \times (\nabla \times \vec{B})]_x &= \left[\vec{A} \times \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \right]_x \\ &= \left[\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} & \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} & \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \end{vmatrix} \right]_x \\ &= \hat{x} \left(A_y \frac{\partial B_y}{\partial x} - A_y \frac{\partial B_x}{\partial y} - A_z \frac{\partial B_x}{\partial z} + A_z \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

좀 더 어려운 두 관계식을 증명해 봅시다.

$$\begin{aligned}\nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) &= \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A}) + (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} \\ &= \hat{x} \left(A_y \frac{\partial B_y}{\partial x} - A_y \frac{\partial B_x}{\partial y} - A_z \frac{\partial B_x}{\partial z} + A_z \frac{\partial B_z}{\partial x} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[(\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B}]_x &= \left(A_x \frac{\partial}{\partial x} + A_y \frac{\partial}{\partial y} + A_z \frac{\partial}{\partial z} \right) B_x \hat{x} \\ &= \left(A_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + A_y \frac{\partial B_x}{\partial y} + A_z \frac{\partial B_x}{\partial z} \right) \hat{x}\end{aligned}$$

좀 더 어려운 두 관계식을 증명해 봅시다.

$$\begin{aligned}\nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) &= \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A}) + (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} \\ &= \hat{x} \left(A_y \frac{\partial B_y}{\partial x} - A_y \frac{\partial B_x}{\partial y} - A_z \frac{\partial B_x}{\partial z} + A_z \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) = \left(A_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + A_y \frac{\partial B_x}{\partial y} + A_z \frac{\partial B_x}{\partial z} \right) \hat{x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}& [\vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A}) + (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A}]_x \\ &= \left(A_y \frac{\partial B_y}{\partial x} - A_y \frac{\partial B_x}{\partial y} - A_z \frac{\partial B_x}{\partial z} + A_z \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) \hat{x} + \left(A_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + A_y \frac{\partial B_x}{\partial y} + A_z \frac{\partial B_x}{\partial z} \right) \hat{x} \\ &\quad + (\vec{A} \leftrightarrow \vec{B})\end{aligned}$$

좀 더 어려운 두 관계식을 증명해 봅시다.

$$\begin{aligned}\nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) &= \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A}) + (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} \\ &= \hat{x} \left(A_y \frac{\partial B_y}{\partial x} - A_y \frac{\partial B_x}{\partial y} - A_z \frac{\partial B_x}{\partial z} + A_z \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) = \left(A_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + A_y \frac{\partial B_x}{\partial y} + A_z \frac{\partial B_x}{\partial z} \right) \hat{x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}& [\vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A}) + (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A}]_x \\ &= \left(A_y \frac{\partial B_y}{\partial x} - A_y \frac{\partial B_x}{\partial y} - A_z \frac{\partial B_x}{\partial z} + A_z \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) \hat{x} + \left(A_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + A_y \frac{\partial B_x}{\partial y} + A_z \frac{\partial B_x}{\partial z} \right) \hat{x} \\ &\quad + (\vec{A} \leftrightarrow \vec{B}) \\ &= \left(A_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + A_y \frac{\partial B_y}{\partial x} + A_z \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) \hat{x} + \left(B_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + B_y \frac{\partial A_y}{\partial x} + B_z \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{x}\end{aligned}$$

좀 더 어려운 두 관계식을 증명해 봅시다.

$$\begin{aligned}\nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) &= \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A}) + (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} \\ &= \hat{x} \left(A_y \frac{\partial B_y}{\partial x} - A_y \frac{\partial B_x}{\partial y} - A_z \frac{\partial B_x}{\partial z} + A_z \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) = \left(A_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + A_y \frac{\partial B_x}{\partial y} + A_z \frac{\partial B_x}{\partial z} \right) \hat{x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}& [\vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A}) + (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A}]_x \\ &= \left(A_y \frac{\partial B_y}{\partial x} - A_y \frac{\partial B_x}{\partial y} - A_z \frac{\partial B_x}{\partial z} + A_z \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) \hat{x} + \left(A_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + A_y \frac{\partial B_x}{\partial y} + A_z \frac{\partial B_x}{\partial z} \right) \hat{x} \\ &\quad + (\vec{A} \leftrightarrow \vec{B}) \\ &= \left(A_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + A_y \frac{\partial B_y}{\partial x} + A_z \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) \hat{x} + \left(B_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + B_y \frac{\partial A_y}{\partial x} + B_z \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{x} \\ &= [\nabla(\vec{A} \cdot \vec{B})]_x\end{aligned}$$

좀 더 어려운 두 관계식을 증명해 봅시다.

$$\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{A}(\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\nabla \cdot \vec{A})$$

좀 더 어려운 두 관계식을 증명해 봅시다.

$$\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{A}(\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\nabla \cdot \vec{A})$$

$$\begin{aligned} [(\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A}]_x &= \left(B_x \frac{\partial}{\partial x} + B_y \frac{\partial}{\partial y} + B_z \frac{\partial}{\partial z} \right) A_x \hat{x} \\ &= \left(B_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + B_y \frac{\partial A_x}{\partial y} + B_z \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) \hat{x} \end{aligned}$$

좀 더 어려운 두 관계식을 증명해 봅시다.

$$\begin{aligned}\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) &= (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{A}(\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\nabla \cdot \vec{A}) \\ &= \left(B_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + B_y \frac{\partial A_x}{\partial y} + B_z \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) \hat{x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[-\vec{B}(\nabla \cdot \vec{A})]_x &= -B_x \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \hat{x} \\ &= \left(-B_x \frac{\partial A_x}{\partial x} - B_x \frac{\partial A_y}{\partial y} - B_x \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \hat{x}\end{aligned}$$

좀 더 어려운 두 관계식을 증명해 봅시다.

$$\begin{aligned}\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) &= (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{A}(\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\nabla \cdot \vec{A}) \\ &= \left(B_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + B_y \frac{\partial A_x}{\partial y} + B_z \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) \hat{x} \quad \quad \quad = \left(-B_x \frac{\partial A_x}{\partial x} - B_x \frac{\partial A_y}{\partial y} - B_x \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \hat{x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}& [(\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{A}(\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\nabla \cdot \vec{A})]_x \\ &= \left(B_y \frac{\partial A_x}{\partial y} - B_x \frac{\partial A_y}{\partial y} + B_z \frac{\partial A_x}{\partial z} - B_x \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \hat{x} - (\vec{A} \leftrightarrow \vec{B})\end{aligned}$$

좀 더 어려운 두 관계식을 증명해 봅시다.

$$\begin{aligned}\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) &= (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{A}(\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\nabla \cdot \vec{A}) \\ &= \left(B_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + B_y \frac{\partial A_x}{\partial y} + B_z \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) \hat{x} \quad = \left(-B_x \frac{\partial A_x}{\partial x} - B_x \frac{\partial A_y}{\partial y} - B_x \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \hat{x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}& [(\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{A}(\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\nabla \cdot \vec{A})]_x \\ &= \left(B_y \frac{\partial A_x}{\partial y} - B_x \frac{\partial A_y}{\partial y} + B_z \frac{\partial A_x}{\partial z} - B_x \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \hat{x} - (\vec{A} \leftrightarrow \vec{B}) \\ &= \left(B_y \frac{\partial A_x}{\partial y} - B_x \frac{\partial A_y}{\partial y} + B_z \frac{\partial A_x}{\partial z} - B_x \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \hat{x} - \left(A_y \frac{\partial B_x}{\partial y} - A_x \frac{\partial B_y}{\partial y} + A_z \frac{\partial B_x}{\partial z} - A_x \frac{\partial B_z}{\partial z} \right) \hat{x}\end{aligned}$$

좀 더 어려운 두 관계식을 증명해 봅시다.

$$\begin{aligned}\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) &= (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{A}(\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\nabla \cdot \vec{A}) \\ &= \left(B_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + B_y \frac{\partial A_x}{\partial y} + B_z \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) \hat{x} \quad = \left(-B_x \frac{\partial A_x}{\partial x} - B_x \frac{\partial A_y}{\partial y} - B_x \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \hat{x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}& [(\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{A}(\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\nabla \cdot \vec{A})]_x \\ &= \left(B_y \frac{\partial A_x}{\partial y} - B_x \frac{\partial A_y}{\partial y} + B_z \frac{\partial A_x}{\partial z} - B_x \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \hat{x} - (\vec{A} \leftrightarrow \vec{B}) \\ &= \left(B_y \frac{\partial A_x}{\partial y} - B_x \frac{\partial A_y}{\partial y} + B_z \frac{\partial A_x}{\partial z} - B_x \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \hat{x} - \left(A_y \frac{\partial B_x}{\partial y} - A_x \frac{\partial B_y}{\partial y} + A_z \frac{\partial B_x}{\partial z} - A_x \frac{\partial B_z}{\partial z} \right) \hat{x} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial y} (A_x B_y - A_y B_x) - \frac{\partial}{\partial z} (A_z B_x - A_x B_z) \right) \hat{x}\end{aligned}$$

좀 더 어려운 두 관계식을 증명해 봅시다.

$$\begin{aligned}\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) &= (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{A}(\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\nabla \cdot \vec{A}) \\ &= \left(B_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + B_y \frac{\partial A_x}{\partial y} + B_z \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) \hat{x} \quad = \left(-B_x \frac{\partial A_x}{\partial x} - B_x \frac{\partial A_y}{\partial y} - B_x \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \hat{x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}& [(\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{A}(\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\nabla \cdot \vec{A})]_x \\ &= \left(B_y \frac{\partial A_x}{\partial y} - B_x \frac{\partial A_y}{\partial y} + B_z \frac{\partial A_x}{\partial z} - B_x \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \hat{x} - (\vec{A} \leftrightarrow \vec{B}) \\ &= \left(B_y \frac{\partial A_x}{\partial y} - B_x \frac{\partial A_y}{\partial y} + B_z \frac{\partial A_x}{\partial z} - B_x \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \hat{x} - \left(A_y \frac{\partial B_x}{\partial y} - A_x \frac{\partial B_y}{\partial y} + A_z \frac{\partial B_x}{\partial z} - A_x \frac{\partial B_z}{\partial z} \right) \hat{x} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial y} (A_x B_y - A_y B_x) - \frac{\partial}{\partial z} (A_z B_x - A_x B_z) \right) \hat{x} \\ &= [\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B})]_x\end{aligned}$$

예]:

$$\nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right) = \nabla \left(\frac{1}{r^2} \right) \cdot \hat{r} + \frac{1}{r^2} (\nabla \cdot \hat{r}) = -\frac{2}{r^3} + \frac{2}{r^3} = 0$$

예]:

$$\nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right) = \nabla \left(\frac{1}{r^2} \right) \cdot \hat{r} + \frac{1}{r^2} (\nabla \cdot \hat{r}) = -\frac{2}{r^3} + \frac{2}{r^3} = 0$$

그러나 $r = 0$ 에서 발산!

예]:

$$\nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right) = \nabla \left(\frac{1}{r^2} \right) \cdot \hat{r} + \frac{1}{r^2} (\nabla \cdot \hat{r}) = -\frac{2}{r^3} + \frac{2}{r^3} = 0$$

그러나 $r = 0$ 에서 발산!

$$\int_V \nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right) dV = \int_{\partial V} \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right) \cdot d\vec{A} = \int_{\partial V} \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right) \cdot \hat{r} r^2 d\Omega = 4\pi$$

가우스 정리

예]:

$$\nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right) = \nabla \left(\frac{1}{r^2} \right) \cdot \hat{r} + \frac{1}{r^2} (\nabla \cdot \hat{r}) = -\frac{2}{r^3} + \frac{2}{r^3} = 0$$

그러나 $r = 0$ 에서 발산!

$$\int_V \nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right) dV = \int_{\partial V} \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right) \cdot d\vec{A} = \int_{\partial V} \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right) \cdot \hat{r} r^2 d\Omega = 4\pi$$

가우스 정리

따라서 $\nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right)$ 은 $r = 0$ 을 제외한 곳에서는 0이고, 부피적분을 하면 4π 가 됩니다.

예]:

$$\nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right) = \nabla \left(\frac{1}{r^2} \right) \cdot \hat{r} + \frac{1}{r^2} (\nabla \cdot \hat{r}) = -\frac{2}{r^3} + \frac{2}{r^3} = 0$$

그러나 $r = 0$ 에서 발산!

$$\int_V \nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right) dV = \int_{\partial V} \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right) \cdot d\vec{A} = \int_{\partial V} \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right) \cdot \hat{r} r^2 d\Omega = 4\pi$$

가우스 정리

따라서 $\nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right)$ 은 $r = 0$ 을 제외한 곳에서는 0이고, 부피적분을 하면 4π 가 됩니다.

$$\nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right) = 4\pi \delta^3(\vec{r})$$

미분 연산을 두 번 하면 다음과 같은 조합이 가능합니다.

$$\nabla \cdot (\nabla f) \equiv \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

라플라시안

미분 연산을 두 번 하면 다음과 같은 조합이 가능합니다.

$$\nabla \cdot (\nabla f) \equiv \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

라플라시안

$$\nabla^2 \vec{A} = (\nabla^2 A_x)\hat{x} + (\nabla^2 A_y)\hat{y} + (\nabla^2 A_z)\hat{z}$$

미분 연산을 두 번 하면 다음과 같은 조합이 가능합니다.

$$\nabla \cdot (\nabla f) \equiv \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

라플라시안

$$\nabla^2 \vec{A} = (\nabla^2 A_x)\hat{x} + (\nabla^2 A_y)\hat{y} + (\nabla^2 A_z)\hat{z}$$

그리고 아래의 두 식은 아주 중요한 **항등식**입니다.

$$\nabla \times \nabla f = 0$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$$

미분 연산을 두 번 할 때 마지막으로 다음과 같은 조합도 가능합니다.

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

미분 연산을 두 번 할 때 마지막으로 다음과 같은 조합도 가능합니다.

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

$$[\nabla(\nabla \cdot \vec{A})]_x = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right)$$

미분 연산을 두 번 할 때 마지막으로 다음과 같은 조합도 가능합니다.

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

$$[\nabla(\nabla \cdot \vec{A})]_x = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right)$$

$$[\nabla^2 \vec{A}]_x = \hat{x} \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \right)$$

미분 연산을 두 번 할 때 마지막으로 다음과 같은 조합도 가능합니다.

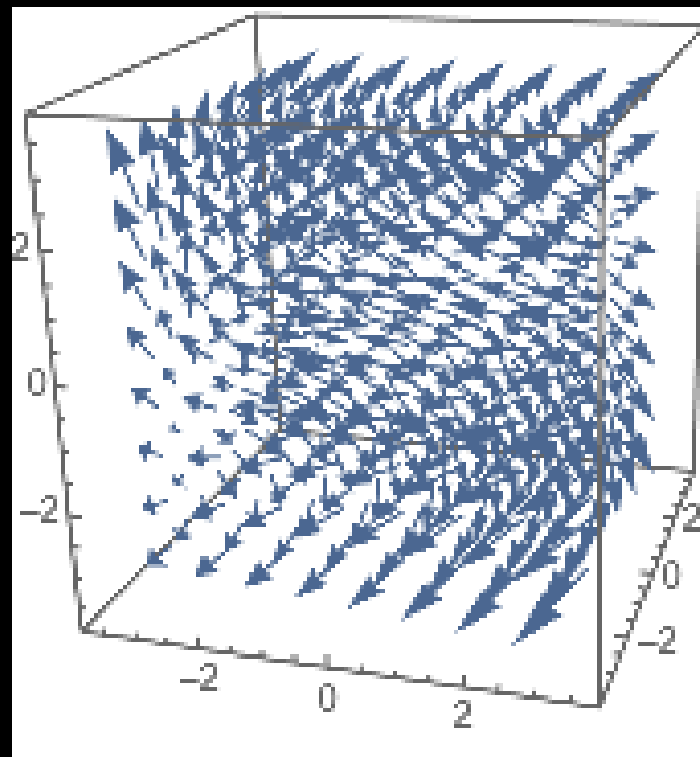
$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

$$[\nabla(\nabla \cdot \vec{A})]_x = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right)$$

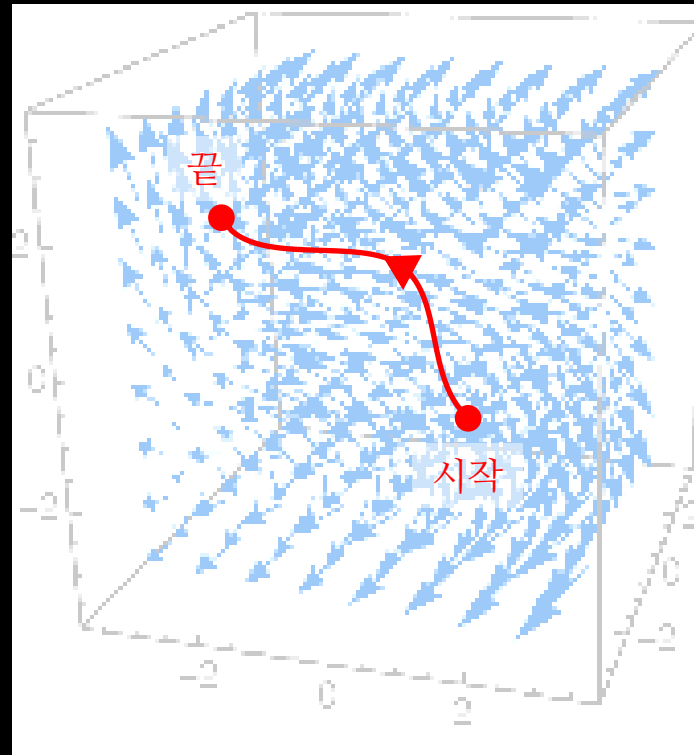
$$[\nabla^2 \vec{A}]_x = \hat{x} \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \right)$$

$$\begin{aligned} [\nabla \times (\nabla \times \vec{A})]_x &= \hat{x} \left(\frac{\partial}{\partial y} (\nabla \times \vec{A})_z - \frac{\partial}{\partial z} (\nabla \times \vec{A})_y \right) \\ &= \hat{x} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \right) \\ &= \hat{x} \left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial z} \right) \end{aligned}$$

적분의 경우 우리는
스칼라 및 벡터의
선적분, 면적분 및 부피적분을
고려해야 합니다.

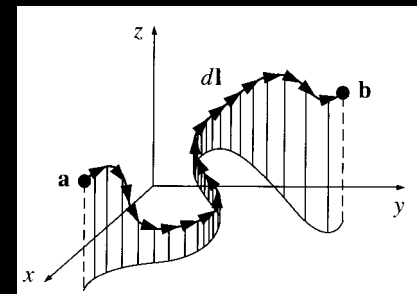


선, 면 및 부피 적분에 대해 생각하기 위해,
먼저 벡터장을 생각해봅시다.



공간 상에서 선적분을 하기 위해서는
먼저 시작과 끝, 그리고 그 둘을 잇는 경로를 생각해야 합니다.

$$\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{A} \cdot d\vec{s}$$



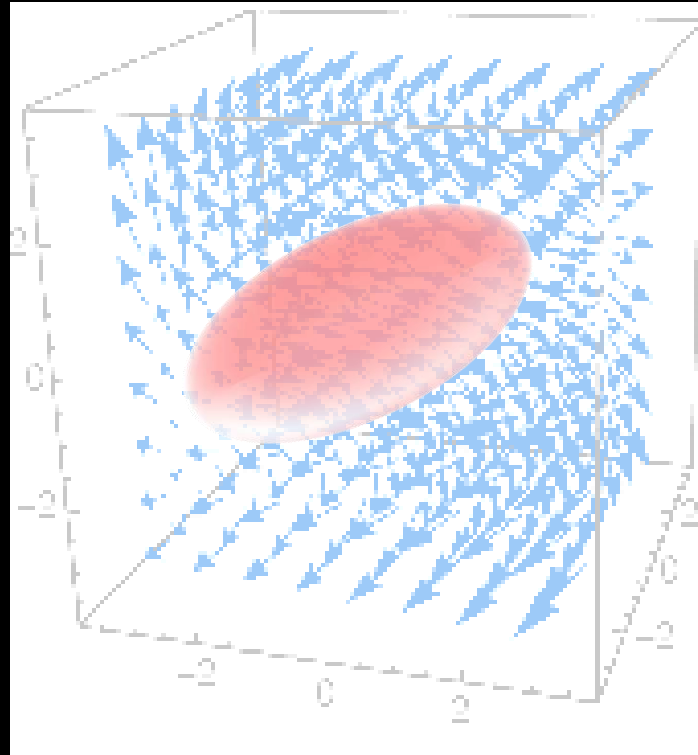
선적분은 위와 같은 방식으로 정의됩니다.
여기에서 $d\vec{s}$ 는 주어진 경로에 대한 미소 접선 벡터입니다.

$$\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int_{\tau_a}^{\tau_b} \left(\vec{A} \cdot \frac{d\vec{s}}{d\tau} \right) d\tau$$

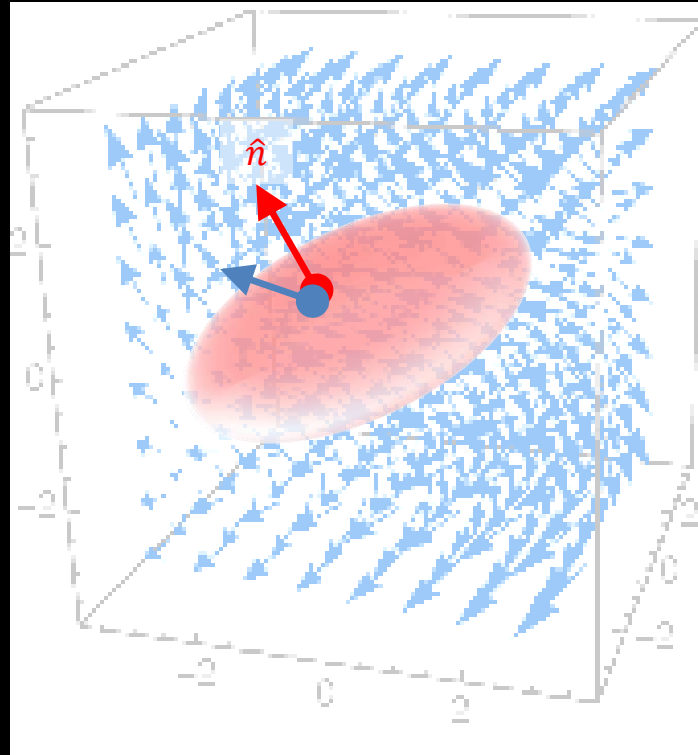
임의의 경로는 1차원 매개변수에 의해 표현이 가능합니다.
이 매개변수에 대해서 위와 같이 표현할 수 있습니다.

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{s}$$

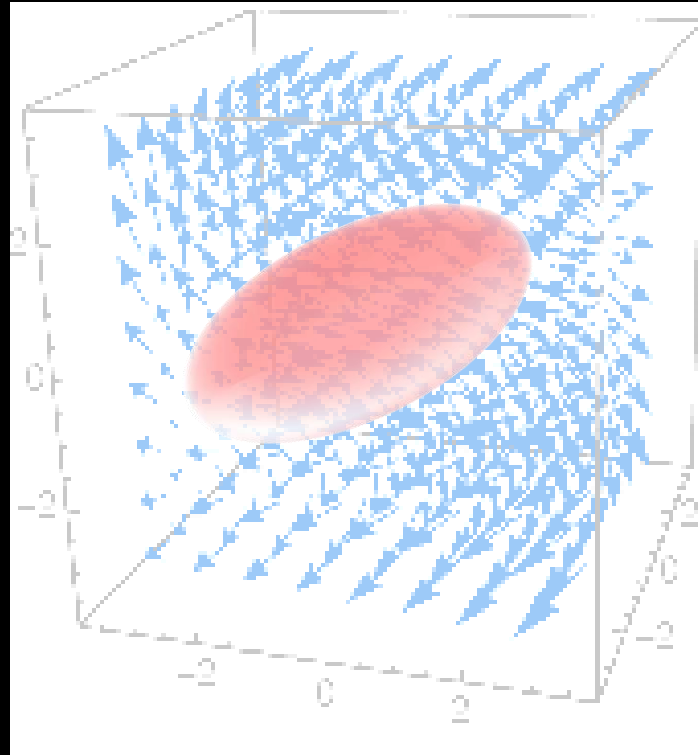
경로가 제자리로 돌아오는 경우,
즉 경로가 폐곡선인 경우는 위와 같은 방식으로
선적분을 표현합니다.



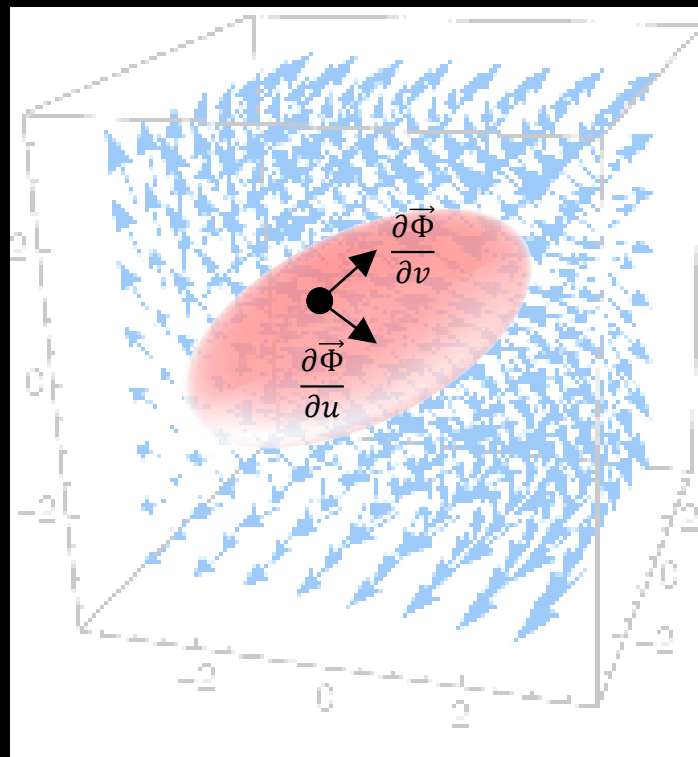
공간 상에서 면적분을 하기 위해서는
우리가 적분하고자 하는 **곡면**을 생각해야 합니다.



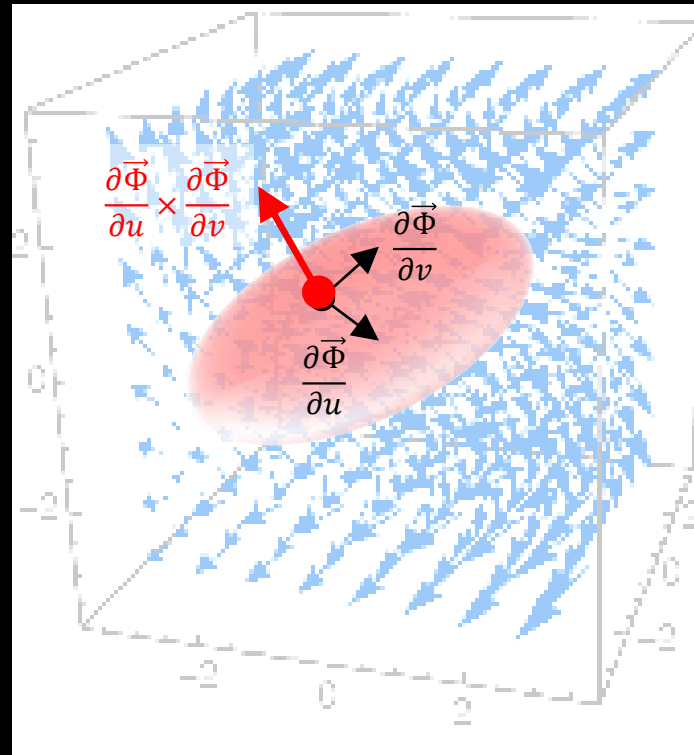
이 때, 이 곡면과 벡터장은 어떤 관계를 가져야 할까요?
예를 들어, 벡터장과 곡면이 수직으로 통과하는 성분만 골라서
적분을 계산한다고 해 봅시다.



그러면 곡면은 우리가 어떻게 정의할 수 있을까요?
곡선의 경우에 1차원 매개변수로 표현했듯이,
일반적으로 곡면은 2차원 매개변수로 표현이 가능합니다.

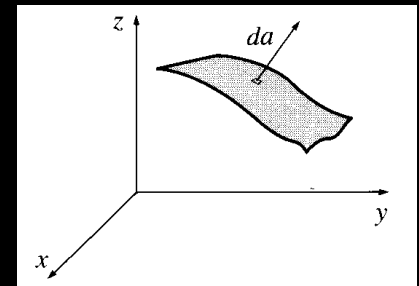


곡면의 위치를 표현하는 벡터를 $\vec{\Phi}(u, v)$ 라고 하고,
 u 와 v 를 이 곡면의 매개변수라고 합시다.
그러면 이 벡터를 u 와 v 로 미분함으로써
곡면에 접하는 두 개의 벡터를 얻을 수 있습니다.



우리가 앞에서 봤듯이, 이 두 점벡터를 외적하면
크기는 이 점 근처의 미소면적이 되면서
방향은 두 점벡터와 수직한 방향을 나타내게 됩니다.

$$\int_{\mathcal{S}} \vec{B} \cdot d\vec{A}$$



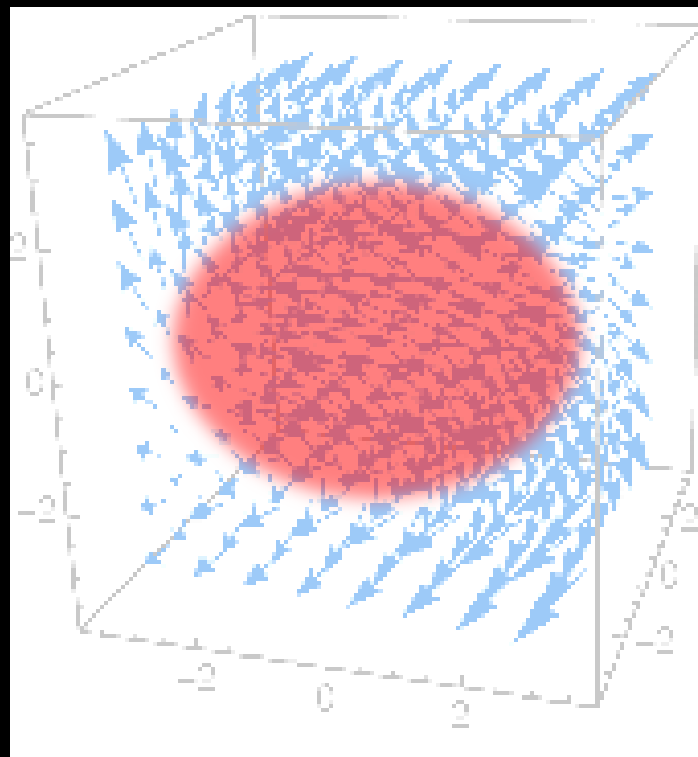
면적분은 위와 같은 방식으로 정의됩니다.
여기에서 $d\vec{A}$ 는 주어진 면에 수직인 미소 법선 벡터입니다.

$$\int_{\mathcal{S}} \vec{B} \cdot d\vec{A} = \iint_{\mathcal{S}} (\vec{B} \cdot \hat{n}) \underbrace{\left| \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial v} \right|}_{\substack{d\vec{A} \text{의} \\ \text{단위벡터} \quad d\vec{A} \text{의 크기}}} du dv$$

2차원 매개변수를 사용하면
이 적분은 위와 같이 표현될 수 있습니다.

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

곡면이 닫혀있는 경우,
즉 폐곡면인 경우는 위와 같은 방식으로
면적분을 표현합니다.



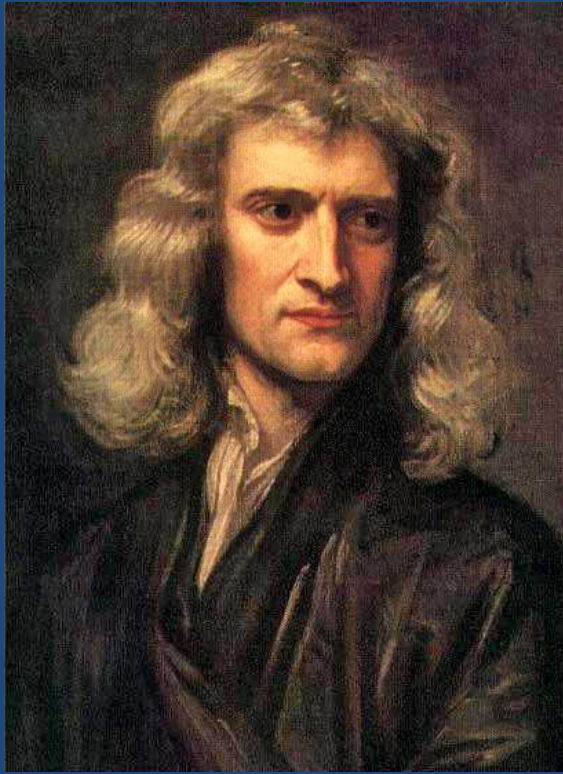
마지막으로 공간 상에서 부피적분을 한다고 생각해봅시다.
이 때는 벡터장의 각 성분을 스칼라처럼 생각하고
부피적분을 한다고 생각할 수 있습니다.

$$\int_v f dV = \int_v f dx dy dz$$

따라서 스칼라에 대한 부피적분을 생각해봅시다.
부피 영역은 3차원 매개변수로 표현이 됩니다.

$$\begin{aligned}
 \int_V f dV &= \int_V f dx dy dz \\
 &= \int_V f \left| \frac{\partial(x \ y \ z)}{\partial(x' \ y' \ z')} \right| dx' dy' dz' \\
 &\equiv \int_V f \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x'} & \frac{\partial x}{\partial y'} & \frac{\partial x}{\partial z'} \\ \frac{\partial y}{\partial x'} & \frac{\partial y}{\partial y'} & \frac{\partial y}{\partial z'} \\ \frac{\partial z}{\partial x'} & \frac{\partial z}{\partial y'} & \frac{\partial z}{\partial z'} \end{vmatrix} dx' dy' dz'
 \end{aligned}$$

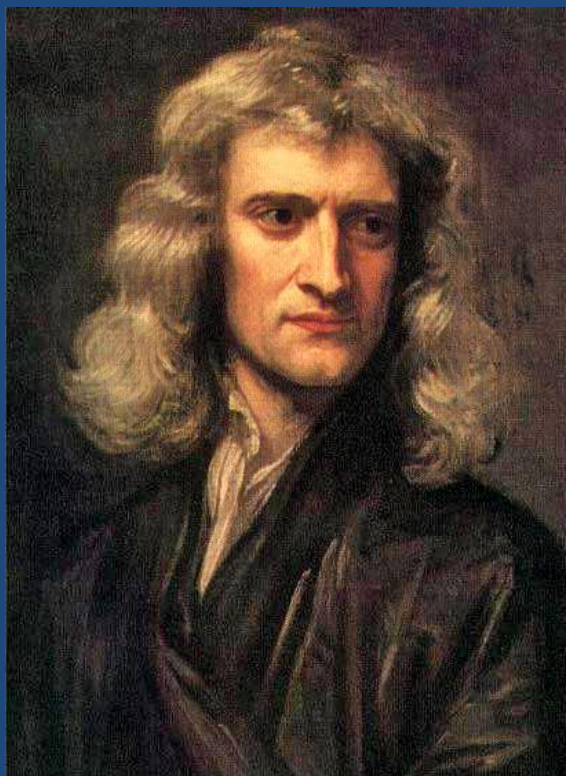
직교좌표가 아닌 다른 매개변수로 표현할 때에는
 위와 같은 좌표 변환의 인자를 고려해주어야 합니다.
 이 인자를 **야코비안** **Jacobian**이라고 합니다.



$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

$$F'(x) = f(x)$$

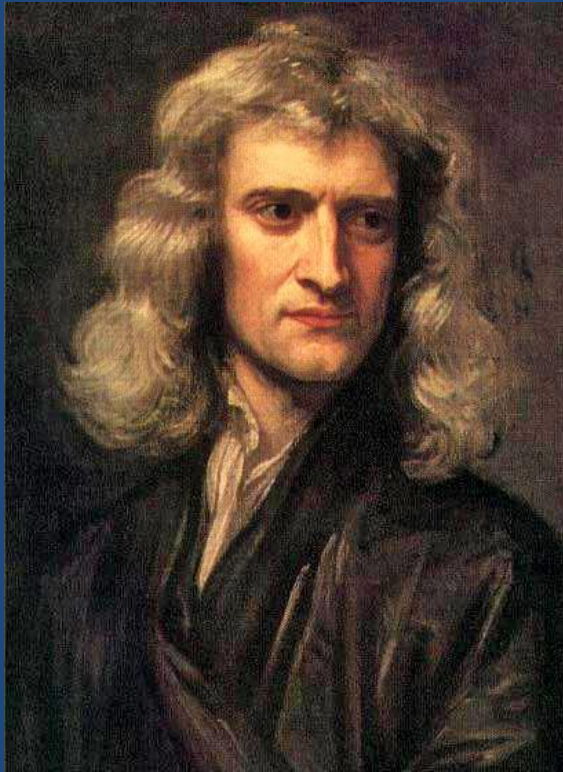
이제 미분과 적분의 연결에 대해서 알아보시다.
이것은 유명한 **미적분학의 기본정리**를
벡터에 대해서 확장하는 것과 같은 일입니다.



$$\int_a^b F'(x) dx = \underbrace{F(b) - F(a)}_{\text{경계}}$$

$$F'(x) = f(x)$$

미적분학의 기본정리는
어떤 함수의 미분의 적분은
그 함수의 경계가 결정한다는 것을 의미합니다.



$$\int_a^b F'(x) dx = \underbrace{F(b) - F(a)}_{\text{경계}}$$

$$F'(x) = f(x)$$

흥미롭게도 이러한 미적분학의 기본정리는
벡터의 경우로 확장될 수 있다는 것이 알려져 있습니다.

$$\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} (\nabla f) \cdot d\vec{s} = f(\vec{b}) - f(\vec{a})$$

먼저 스칼라의 기울기 gradient를 선적분하면
그 적분은 경로의 끝 값에 의해서 결정됩니다.

$$\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = f(\vec{b}) - f(\vec{a})$$
$$\nabla f = \vec{F}$$

따라서 어떤 벡터장 $\vec{F}$ 가 다른 스칼라 f 의 기울기가 된다면
선적분은 그 끝값에만 의존합니다.

$$\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = f(\vec{b}) - f(\vec{a})$$

$$\nabla f = \vec{F}$$

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$$

더 나아가서 이런 경우 어떤 스칼라의 기울기의 폐곡선 적분은
0이 된다는 것, 즉
보존력장이 된다는 것을 알 수 있습니다.

일반적으로 다음 진술들은 동일합니다.

$\vec{A}$ 가 보존력장이다.



$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{s} = 0$$



$\vec{A} = \nabla f$ 가 되는 f 가 존재한다.

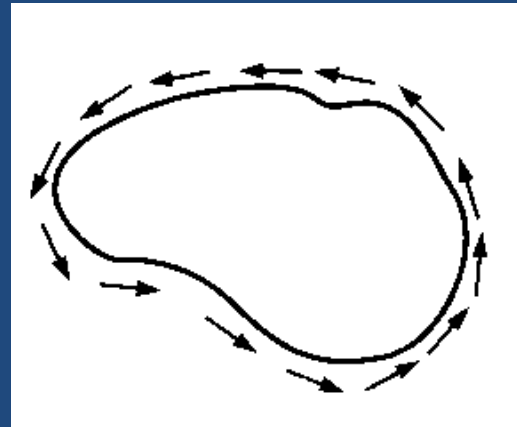
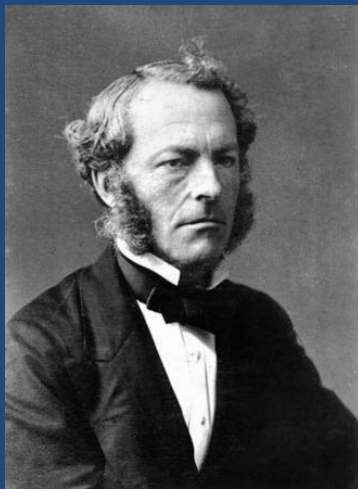


$$\nabla \times \vec{A} = 0$$

$$\int_{\mathcal{A}} (\nabla \times \vec{B}) \cdot d\vec{A} = \oint_{\partial \mathcal{A}} \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

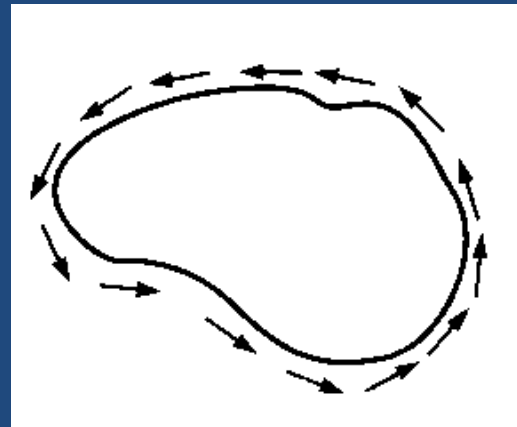
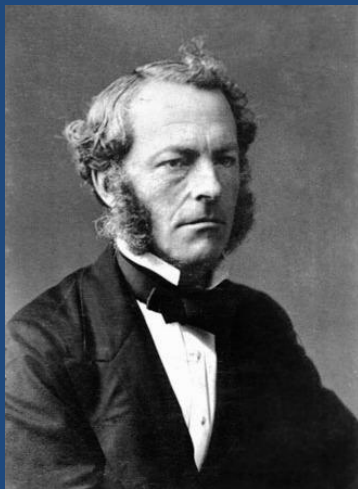
벡터의 회전_{curl}을 면적분하면
그 적분은 곡면 영역의 경계에 의해서 결정됩니다.

$$\int_{\mathcal{A}} (\nabla \times \vec{B}) \cdot d\vec{A} = \oint_{\partial \mathcal{A}} \vec{B} \cdot d\vec{s}$$



이것을 스토크스Stokes의 정리라고 합니다.

$$\int_{\mathcal{A}} (\nabla \times \vec{B}) \cdot d\vec{A} = \oint_{\partial \mathcal{A}} \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

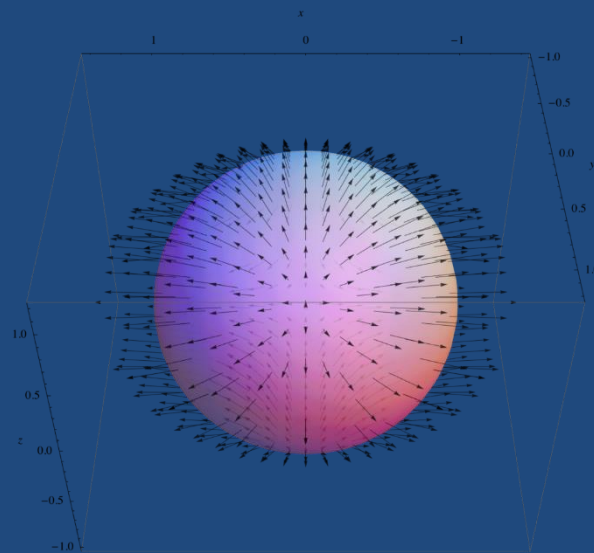


이 정리에서 한 가지 중요한 점은 $d\vec{s}$ 와 $d\vec{A}$ 의 관계는 **오른손 법칙**을 따른다는 점입니다.

$$\int_V (\nabla \cdot \vec{B}) dV = \oint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

벡터의 발산divergence을 부피적분하면
그 적분은 부피 영역의 경계에 의해서 결정됩니다.

$$\int_V (\nabla \cdot \vec{B}) dV = \oint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{A}$$



이것을 가우스Gauss의 정리라고 합니다.

$$\int_V (\nabla \cdot \vec{B}) dV = \oint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = \vec{F}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

더 나아가서 어떤 벡터의 발산이 0이 된다면
그 벡터의 임의의 폐곡면 적분은 항상 0이 되는 것을 알 수 있습니다.

일반적으로 다음 진술들은 동일합니다.

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$



$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ 가 되는 $\vec{A}$ 가 존재한다.



$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

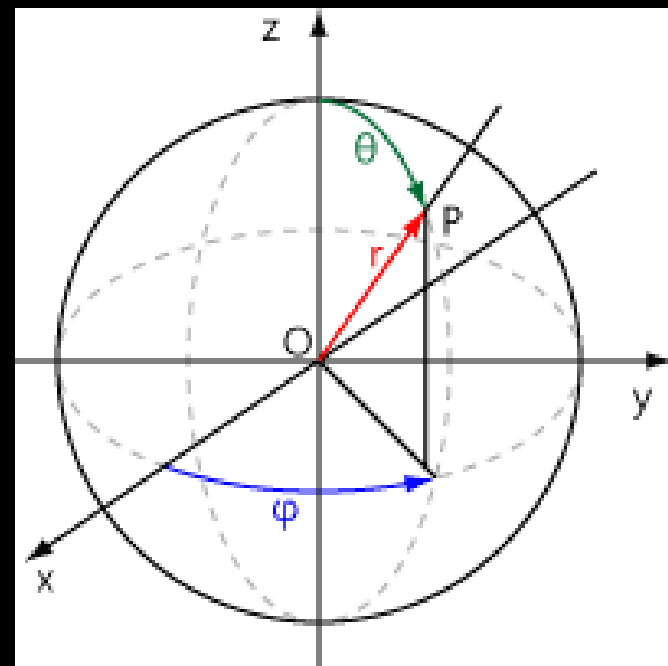
마지막으로 지금까지 살펴본 내용들을
일반적인 좌표계의 경우로 확장해 봅시다.

구면좌표계

$$x = r \sin \theta \cos \phi$$

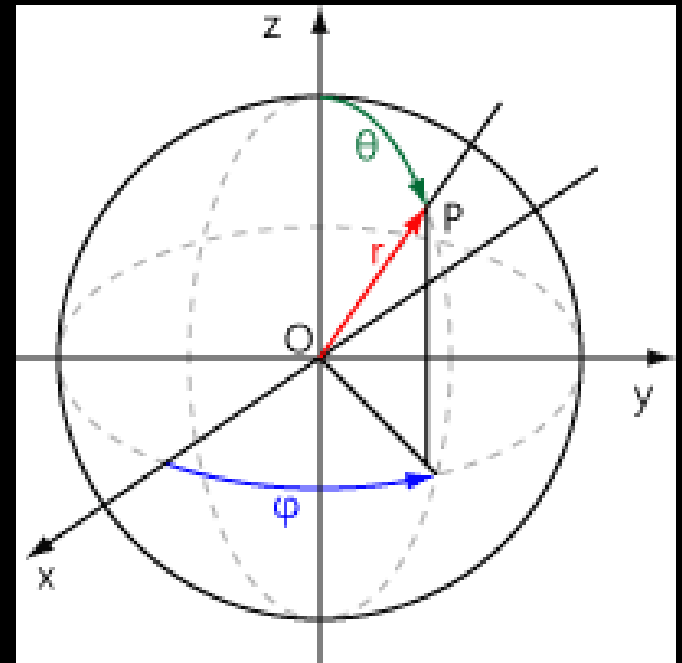
$$y = r \sin \theta \sin \phi$$

$$z = r \cos \theta$$



구면좌표계에서 벡터의 표현

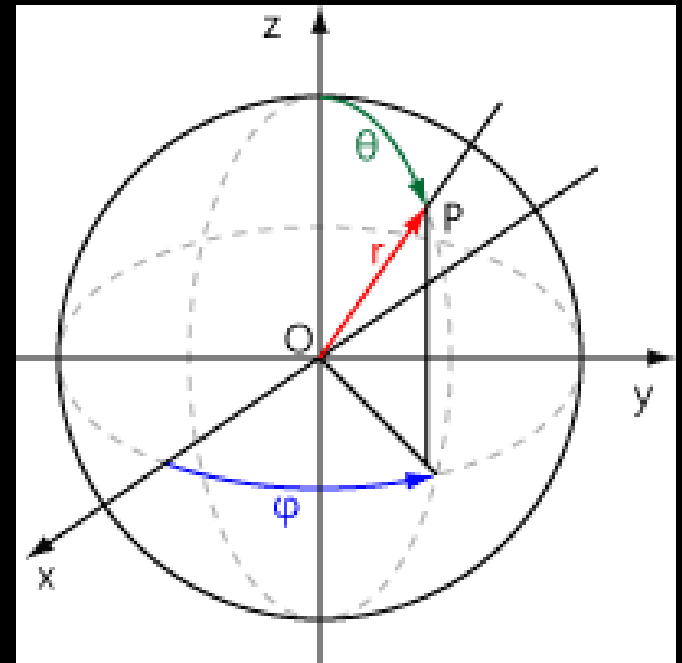
$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & \cos \theta \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \sin \phi & \cos \phi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ r d\theta \\ r \sin \theta d\phi \end{pmatrix}$$



구면좌표계에서 벡터의 표현

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & \cos \theta \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \sin \phi & \cos \phi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ r d\theta \\ r \sin \theta d\phi \end{pmatrix}$$
$$\equiv T$$

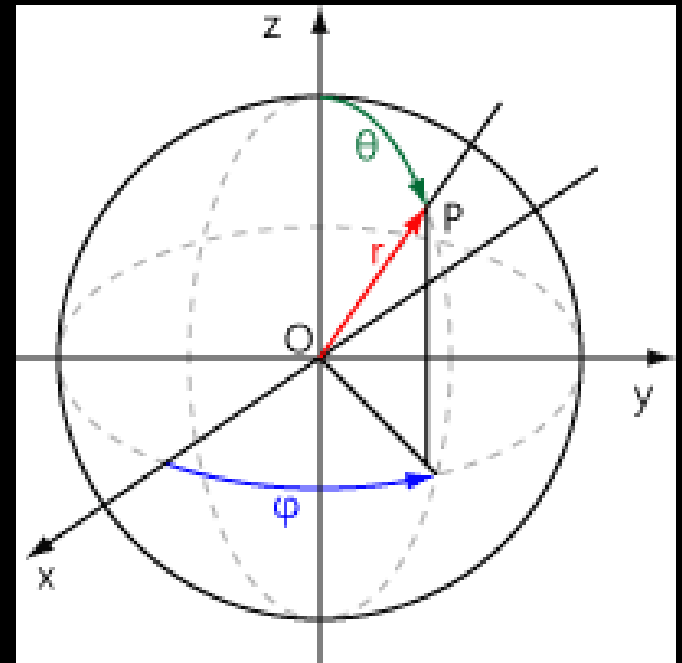
$$T^T T = I$$



구면좌표계에서 벡터의 표현

$$\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & \cos \theta \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \sin \phi & \cos \phi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{r} \\ \hat{\theta} \\ \hat{\phi} \end{pmatrix} \equiv T$$

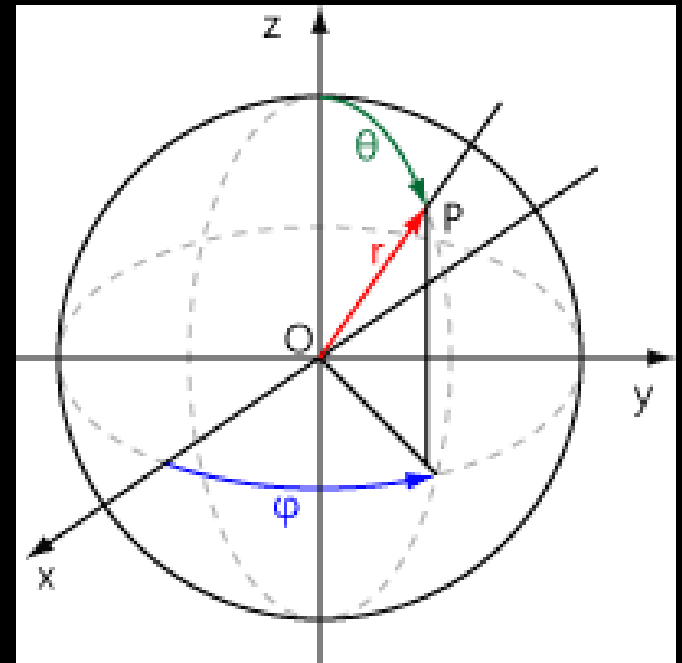
$$T^T T = I$$



구면좌표계에서 벡터의 표현

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & \cos \theta \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \sin \phi & \cos \phi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ r \frac{\partial}{\partial \theta} \\ r \sin \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \end{pmatrix} \equiv T$$

$$T^T T = I$$



미분연산자

$$\nabla = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{\partial}{r \partial \theta} + \hat{\phi} \frac{\partial}{r \sin \theta \partial \phi}$$

미분연산자

$$\nabla = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{\partial}{r \partial \theta} + \hat{\phi} \frac{\partial}{r \sin \theta \partial \phi}$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2 \sin \theta} \right) = \nabla \cdot \left(\frac{\hat{\theta}}{r \sin \theta} \right) = \nabla \cdot \left(\frac{\hat{\phi}}{r} \right) = 0$$

미분연산자

$$\nabla = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{\partial}{r \partial \theta} + \hat{\phi} \frac{\partial}{r \sin \theta \partial \phi}$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2 \sin \theta} \right) = \nabla \cdot \left(\frac{\hat{\theta}}{r \sin \theta} \right) = \nabla \cdot \left(\frac{\hat{\phi}}{r} \right) = 0$$

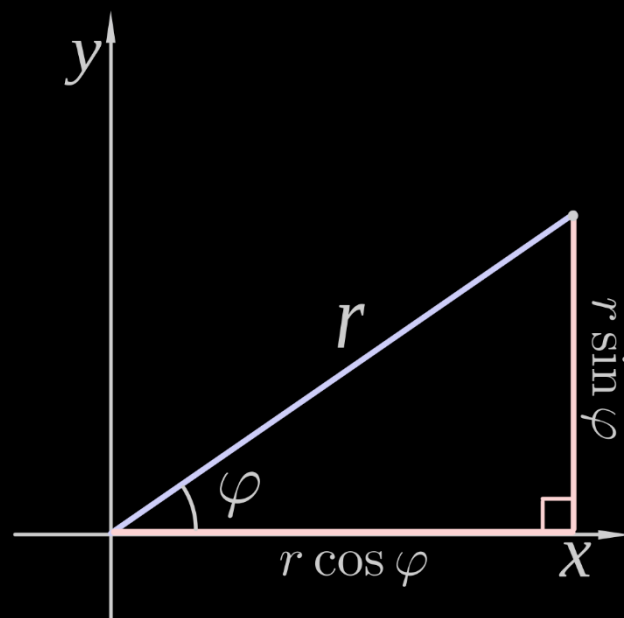
$$\nabla \cdot \nabla = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

극좌표계

$$x = r \cos \varphi$$

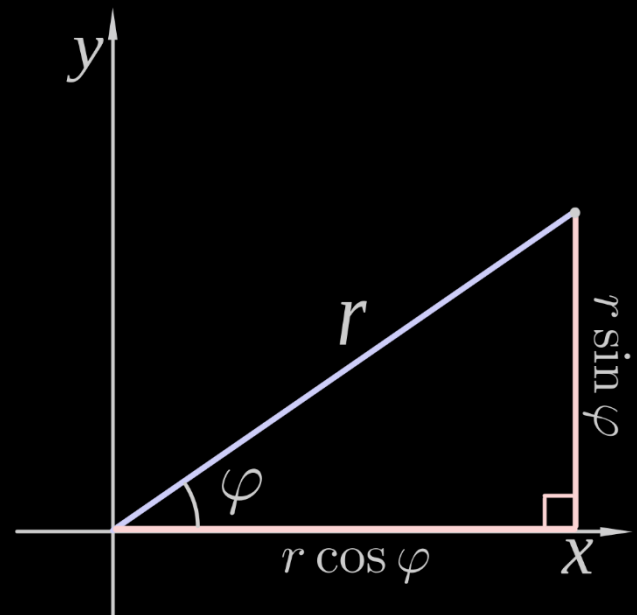
$$y = r \sin \varphi$$

$$z = z$$



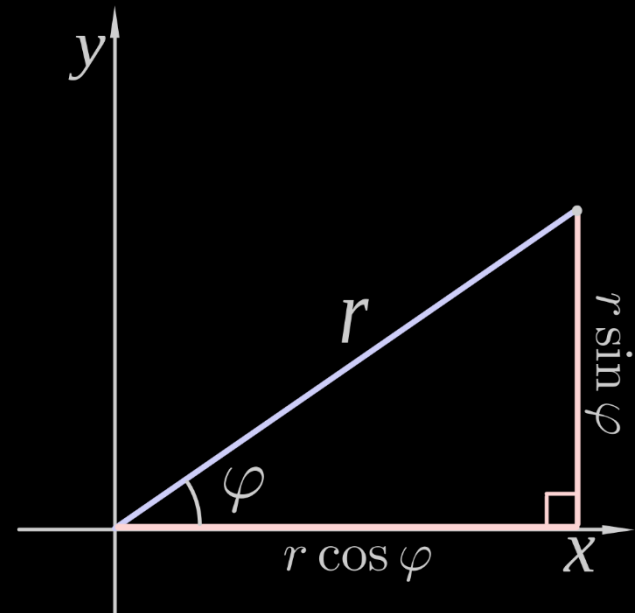
극좌표계에서 벡터의 표현

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ r d\varphi \\ dz \end{pmatrix}$$



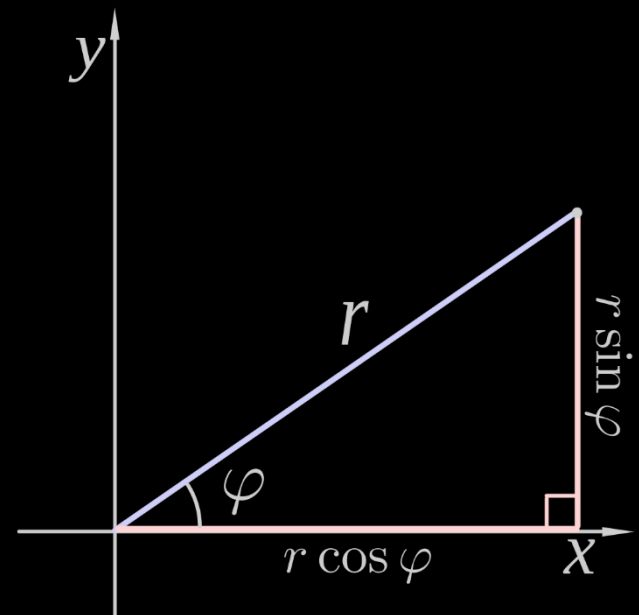
극좌표계에서 벡터의 표현

$$\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{r} \\ \hat{\varphi} \\ \hat{z} \end{pmatrix}$$



극좌표계에서 벡터의 표현

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$



미분연산자

$$\nabla = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\phi} \frac{\partial}{r \partial \phi} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}$$

미분연산자

$$\nabla = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\phi} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\nabla \cdot \nabla = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\nabla \cdot \vec{F} = D$$

$$\nabla \times \vec{F} = \vec{C}$$

이제 마지막으로 우리가 지난 시간에 살펴본
헬름홀츠의 정리를 증명해보도록 합시다.

$$\nabla \cdot \vec{F} = D$$

$$\nabla \times \vec{F} = \vec{C}$$

$$V(\vec{r}) \equiv \frac{1}{4\pi} \int \frac{D(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

$$\vec{A}(\vec{r}) \equiv \frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{C}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

위의 두 값을 사용해서 아래의 두 함수를 정의해봅시다.

$$\nabla \cdot \vec{F} = D$$

$$\nabla \times \vec{F} = \vec{C}$$

$$V(\vec{r}) \equiv \frac{1}{4\pi} \int \frac{D(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

$$\vec{A}(\vec{r}) \equiv \frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{C}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

이제 우리의 주장은 $\vec{F}$ 가 D 와 $\vec{C}$ 에 의해
아래와 같이 완전히 결정된다는 것입니다.

$$\vec{F} = -\nabla V + \nabla \times \vec{A}$$

$\vec{F}$ 에 미분 연산을 취해서
 D 와 $\vec{C}$ 가 다시 얻어진다는 것을 확인해봅시다.

$$\nabla \cdot \vec{F} = -\nabla^2 V = -\frac{1}{4\pi} \nabla^2_{\vec{r}} \int \frac{D(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

$\vec{r}$ 에 대한 라플라시안

$\vec{F}$ 에 미분 연산을 취해서
 D 와 $\vec{C}$ 가 다시 얻어진다는 것을 확인해봅시다.

$$\nabla \cdot \vec{F} = -\nabla^2 V = -\frac{1}{4\pi} \nabla_{\vec{r}}^2 \int \frac{D(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r'$$

$\vec{r}$ 에 대한 라플라시안

$$= -\frac{1}{4\pi} \int D(\vec{r}') \left(\nabla_{\vec{r}}^2 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) d^3 r'$$

$$= -4\pi \delta^3(\vec{r} - \vec{r}')$$

$\vec{F}$ 에 미분 연산을 취해서
 D 와 $\vec{C}$ 가 다시 얻어진다는 것을 확인해봅시다.

$$\nabla \cdot \vec{F} = -\nabla^2 V = -\frac{1}{4\pi} \nabla_{\vec{r}}^2 \int \frac{D(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r'$$

$\vec{r}$ 에 대한 라플라시안

$$= -\frac{1}{4\pi} \int D(\vec{r}') \left(\nabla_{\vec{r}}^2 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) d^3 r'$$

$= -4\pi \delta^3(\vec{r} - \vec{r}')$

$$= \int D(\vec{r}') \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') d^3 r'$$

$$= D(\vec{r})$$

$\vec{F}$ 에 미분 연산을 취해서
 D 와 $\vec{C}$ 가 다시 얻어진다는 것을 확인해봅시다.

$$\nabla \times \vec{F} = \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

$\vec{F}$ 에 미분 연산을 취해서
 D 와 $\vec{C}$ 가 다시 얻어진다는 것을 확인해봅시다.

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{F} &= \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \\ &= \frac{\nabla}{4\pi} \left(\nabla_{\vec{r}} \cdot \int \frac{\vec{C}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' \right) - \frac{1}{4\pi} \int \nabla_{\vec{r}}^2 \frac{\vec{C}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r'\end{aligned}$$

$\vec{F}$ 에 미분 연산을 취해서
 D 와 $\vec{C}$ 가 다시 얻어진다는 것을 확인해봅시다.

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \vec{F} &= \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \\
 &= \frac{\nabla}{4\pi} \left(\nabla_{\vec{r}} \cdot \int \frac{\vec{C}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' \right) - \frac{1}{4\pi} \int \nabla_{\vec{r}}^2 \frac{\vec{C}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' \\
 &= \frac{\nabla}{4\pi} \int \vec{C}(\vec{r}') \cdot \left(\nabla_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) d^3 r' + \int \vec{C}(\vec{r}') \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') d^3 r'
 \end{aligned}$$

$\vec{F}$ 에 미분 연산을 취해서
 D 와 $\vec{C}$ 가 다시 얻어진다는 것을 확인해봅시다.

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \vec{F} &= \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \\
 &= \frac{\nabla}{4\pi} \left(\nabla_{\vec{r}} \cdot \int \frac{\vec{C}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' \right) - \frac{1}{4\pi} \int \nabla_{\vec{r}}^2 \frac{\vec{C}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' \\
 &= \frac{\nabla}{4\pi} \int \vec{C}(\vec{r}') \cdot \left(\nabla_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) d^3 r' + \int \vec{C}(\vec{r}') \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') d^3 r' \\
 &= \frac{\nabla}{4\pi} \int \vec{C}(\vec{r}') \cdot \left(-\nabla_{\vec{r}'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) d^3 r' + \vec{C}(\vec{r})
 \end{aligned}$$

$\vec{F}$ 에 미분 연산을 취해서
 D 와 $\vec{C}$ 가 다시 얻어진다는 것을 확인해봅시다.

$$\nabla \times \vec{F} = \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

$$= \frac{\nabla}{4\pi} \int \vec{C}(\vec{r}') \cdot \left(-\nabla_{r'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) d^3r' + \vec{C}(\vec{r})$$

$$= \frac{\nabla}{4\pi} \left[\underbrace{+ \int \left(\nabla_{r'} \cdot \vec{C}(\vec{r}') \right) \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'}_{\substack{\text{부분적분법} \\ \downarrow}} - \oint \frac{\vec{C}(\vec{r}') \cdot d\vec{A}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] + \vec{C}(\vec{r})$$

$\vec{F}$ 에 미분 연산을 취해서
 D 와 $\vec{C}$ 가 다시 얻어진다는 것을 확인해봅시다.

$$\nabla \times \vec{F} = \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

$$= \frac{\nabla}{4\pi} \int \vec{C}(\vec{r}') \cdot \left(-\nabla_{r'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) d^3 r' + \vec{C}(\vec{r})$$

$$= \frac{\nabla}{4\pi} \left[\underbrace{+ \int \left(\nabla_{r'} \cdot \vec{C}(\vec{r}') \right) \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r'}_{\substack{\text{부분적분법} \\ = \nabla_{r'} \cdot (\nabla_{r'} \times \vec{F}(\vec{r}')) = 0}} - \oint \frac{\vec{C}(\vec{r}') \cdot d\vec{A}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] + \vec{C}(\vec{r})$$

무한대에서 $|\vec{C}| \simeq \frac{1}{r^2}$ 이 되면

0으로 수렴

$\vec{F}$ 에 미분 연산을 취해서
 D 와 $\vec{C}$ 가 다시 얻어진다는 것을 확인해봅시다.

$$\nabla \times \vec{F} = \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

$$= \frac{\nabla}{4\pi} \int \vec{C}(\vec{r}') \cdot \left(-\nabla_{r'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) d^3 r' + \vec{C}(\vec{r})$$

$$= \frac{\nabla}{4\pi} \left[\underbrace{+ \int \left(\nabla_{r'} \cdot \vec{C}(\vec{r}') \right) \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r'}_{\substack{\text{부분적분법} \\ \downarrow}} - \oint \frac{\vec{C}(\vec{r}') \cdot d\vec{A}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] + \vec{C}(\vec{r})$$

$$= \vec{C}(\vec{r})$$

$= \nabla_{r'} \cdot (\nabla_{r'} \times \vec{F}(\vec{r}')) = 0$
무한대에서 $|\vec{C}| \simeq \frac{1}{r^2}$ 이 되면
0으로 수렴

따라서 헬름홀츠의 정리에 따라
(무한대에서의 경계조건을 만족할 때)
원천으로부터 $\nabla \cdot \vec{F}$ 와 $\nabla \times \vec{F}$ 를 결정할 수 있다면
 $\vec{F}$ 도 유일하게 결정됩니다.

헬름홀츠의 정리

$r \rightarrow \infty$ 에서 $\nabla \cdot \vec{F}$ 및 $\nabla \times \vec{F}$ 이 모두 r^{-2} 보다 빠르게 0으로 수렴한다면

$\nabla \cdot \vec{F}$ 및 $\nabla \times \vec{F}$ 은 $\vec{F}$ 를 결정한다.

$\nabla \cdot \vec{F} = D$ 및 $\nabla \times \vec{F} = \vec{C}$ 라고 하면

$$V \equiv \frac{1}{4\pi} \int \frac{D(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

$$\vec{A} \equiv \frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{C}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

와 같이 두 함수 V 와 $\vec{A}$ 를 정의할 때

$$\vec{F} = -\nabla V + \nabla \times \vec{A}$$

와 같이 유일하게 결정된다.

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

이것이 맥스웰 방정식이 **회전**divergence과 **발산**curl의 조합으로 이루어지는 이유입니다.

정전기학 및 정자기학에서 전기장과 자기장은 각각 회전 및 발산이 0인 장으로 생각할 수 있습니다.

원천

$$\rho(\vec{r}) \quad \vec{j}(\vec{r})$$

원천

$$\rho(\vec{r}) \quad \vec{j}(\vec{r})$$

퍼텐셜

$$V(\vec{r}) \quad \vec{A}(\vec{r})$$

원천

$$\rho(\vec{r}) \quad \vec{j}(\vec{r})$$

퍼텐셜

$$V(\vec{r}) \quad \vec{A}(\vec{r})$$

장

$$\vec{E}(\vec{r}) \quad \vec{B}(\vec{r})$$

원천

$$\rho(\vec{r}) \quad \vec{j}(\vec{r})$$

퍼텐셜

$$V(\vec{r}) \quad \vec{A}(\vec{r})$$

장

$$\vec{E}(\vec{r}) \quad \vec{B}(\vec{r})$$

미분

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} \end{aligned}$$

원천

$$\rho(\vec{r}) \quad \vec{j}(\vec{r})$$

퍼텐셜

$$V(\vec{r}) \quad \vec{A}(\vec{r})$$

장

$$\vec{E}(\vec{r}) \quad \vec{B}(\vec{r})$$

미분

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\nabla V \\ \vec{B} &= \nabla \times \vec{A}\end{aligned}$$

미분

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{j}\end{aligned}$$

원천

$$\rho(\vec{r}) \quad \vec{j}(\vec{r})$$

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$
$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{j} \quad \text{미분}$$

퍼텐셜

$$V(\vec{r}) \quad \vec{A}(\vec{r})$$

장

$$\vec{E}(\vec{r}) \quad \vec{B}(\vec{r})$$

$$\vec{E} = -\nabla V$$
$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad \text{미분}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$
$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad \text{미분}$$

원천

$$\rho(\vec{r}) \quad \vec{j}(\vec{r})$$

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$
$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{j} \quad \text{미분}$$

가우스 법칙

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

앙페르 법칙

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I$$

퍼텐셜

$$V(\vec{r}) \quad \vec{A}(\vec{r})$$

장

$$\vec{E}(\vec{r}) \quad \vec{B}(\vec{r})$$

미분

$$\vec{E} = -\nabla V$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

원천

$$\rho(\vec{r}) \quad \vec{j}(\vec{r})$$

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$
$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{j} \quad \text{미분}$$

퍼텐셜

$$V(\vec{r}) \quad \vec{A}(\vec{r})$$

장

$$\vec{E}(\vec{r}) \quad \vec{B}(\vec{r})$$

$$\vec{E} = -\nabla V$$
$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad \text{미분}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$
$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad \text{미분}$$

원천

$$\rho(\vec{r}) \quad \vec{j}(\vec{r})$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

적분

퍼텐셜

$$V(\vec{r}) \quad \vec{A}(\vec{r})$$

장

$$\vec{E}(\vec{r}) \quad \vec{B}(\vec{r})$$

미분

$$\vec{E} = -\nabla V$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

원천

$$\rho(\vec{r}) \quad \vec{j}(\vec{r})$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

적분

퍼텐셜

$$V(\vec{r}) \quad \vec{A}(\vec{r})$$

쿨롱 법칙

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3r'$$

비오-사바르 법칙

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3r'$$

적분

장

$$\vec{E}(\vec{r}) \quad \vec{B}(\vec{r})$$

미분

$$\vec{E} = -\nabla V$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

원천

$$\rho(\vec{r}) \quad \vec{j}(\vec{r})$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

적분

쿨롱 법칙

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3r'$$

비오-사바르 법칙

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3r'$$

적분

퍼텐셜

$$V(\vec{r}) \quad \vec{A}(\vec{r})$$

장

$$\vec{E}(\vec{r}) \quad \vec{B}(\vec{r})$$

적분

$$V = - \int \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{E} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3r'$$

$$\vec{A} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{B} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3r'$$

원천

$$\rho(\vec{r}) \quad \vec{j}(\vec{r})$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

적분

쿨롱 법칙

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3r'$$

비오-사바르 법칙

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3r'$$

적분

미분방정식 풀기

퍼텐셜

$$V(\vec{r}) \quad \vec{A}(\vec{r})$$

장

$$\vec{E}(\vec{r}) \quad \vec{B}(\vec{r})$$

적분

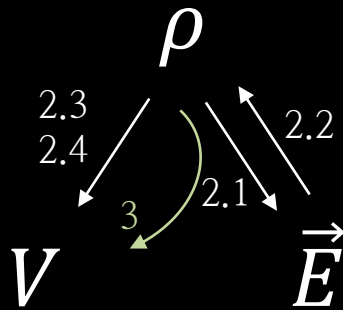
$$V = - \int \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{E} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3r'$$

$$\vec{A} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{B} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3r'$$

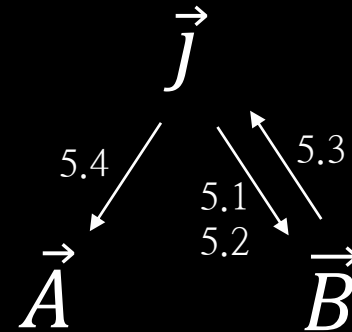
이번 학기에는
정전기학electrostatics과 정자기학magnetostatics을 다루게 됩니다.

정전기학과 정자기학에서는 앞에서 언급한 세 요소 사이의
상호관계를 좀 더 자세히 배우게 됩니다.

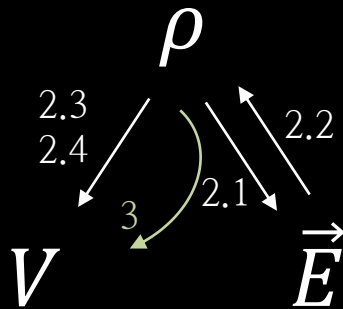
Chap 2, 3



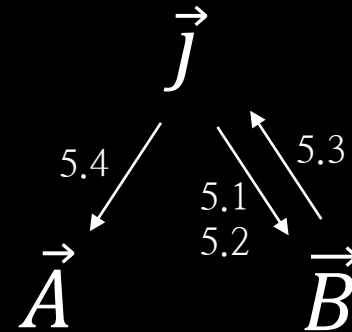
Chap 5



Chap 2, 3



Chap 5



Chap 4

물질/전기쌍극자

Chap 6

물질/자기쌍극자

감사합니다