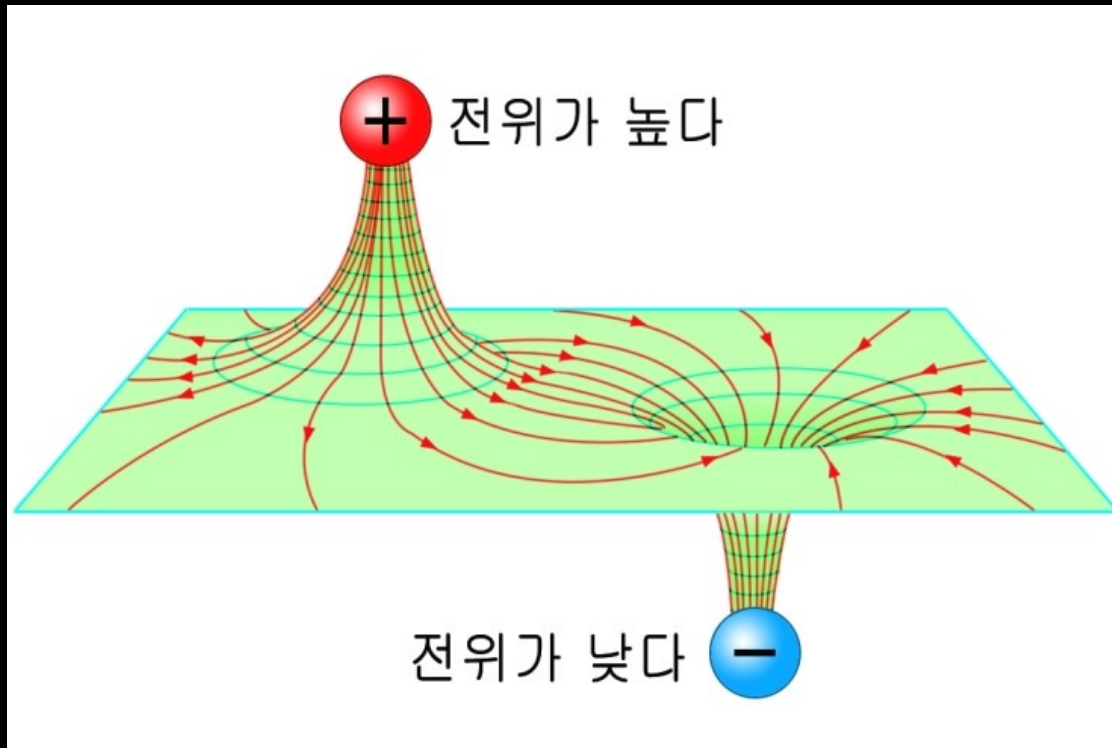


제3장 전위

지금까지는 전기장의 물리적 성질에 대해서 살펴보았습니다.
이제는 좀 더 구체적인 물리적 대상에 대해
전기장 및 전기퍼텐셜을 계산하는 방법을 살펴보도록 하겠습니다.



전기장과 전위는 $\vec{E} = -\nabla V$ 의 관계를 갖고 있습니다.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'}) dV'$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

전기장은 벡터이고 전위는 스칼라이기 때문에,
복잡한 문제의 경우 전위를 먼저 계산하는 것이 좀 더 편합니다.
그리고 이러한 계산은 **원천**에 대한 적분으로 가능합니다.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'}) dV'$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

그러나 어떤 경우는 적분을 하기가 어려울 수도 있고,
 특정 조건에서 전하의 분포가 주어지지 않을 때도 있습니다.
 이 때에는 어떻게 해야 할까요?

$$-\nabla \cdot \vec{E} = \nabla \cdot \nabla V = \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

푸아송 방정식

$$\nabla^2 V = 0$$

라플라스 방정식

이 때, 위와 같은 편미분 방정식을 직접 푸는 것이
더 좋을 수도 있습니다.

그러면 이러한 편미분 방정식의 해는
어떤 조건에서 유일하게 결정될까요?

여기에 대한 답은,
경계에서의 조건,
즉 **경계조건boundary condition**이 충분히 주어진다면
유일하게 결정할 수 있다는 것입니다.

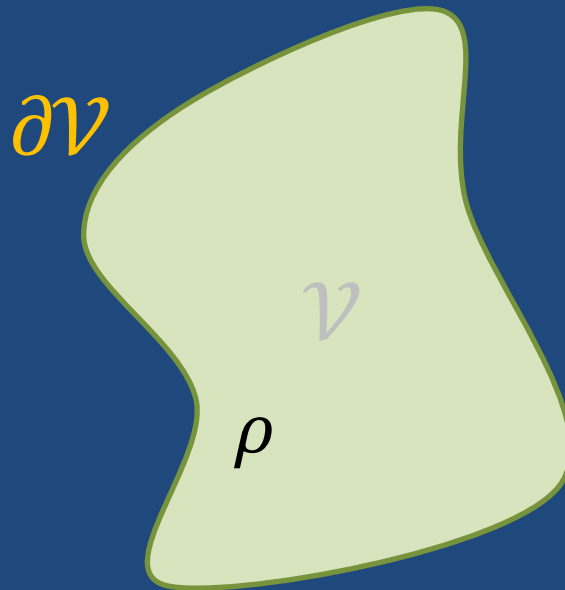
유일성정리 1

라플라스 방정식의 해 V 의 값이
어떤 부피영역 $\mathcal{V}$ 의 경계면 $\partial\mathcal{V}$ 에서 명시되면
그 영역 속에서의 해가 유일하게 결정된다.



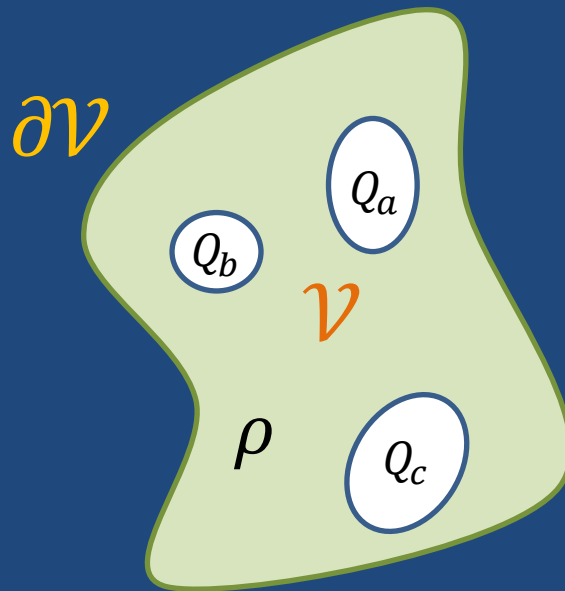
따름정리

어떤 영역 $\mathcal{V}$ 속의 전위는 그 영역 안에서의 전하밀도 ρ 와
모든 경계 $\partial\mathcal{V}$ 에서의 V 값이 명시되면
그 영역 속에서의 해가 유일하게 결정된다.



유일성정리 2

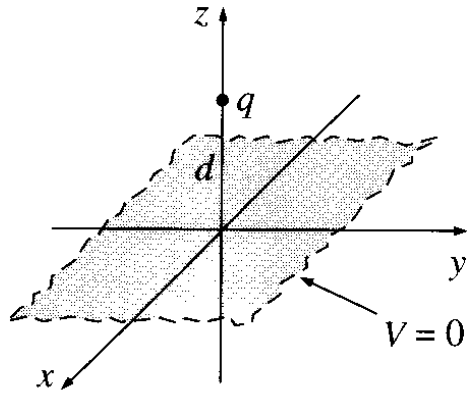
도체로 둘러싸여 있고, 전하밀도가 ρ 인 부피영역 $\mathcal{V}$ 에서는
나날의 도체의 총 전하량을 알면
전기장을 유일하게 결정할 수 있다.



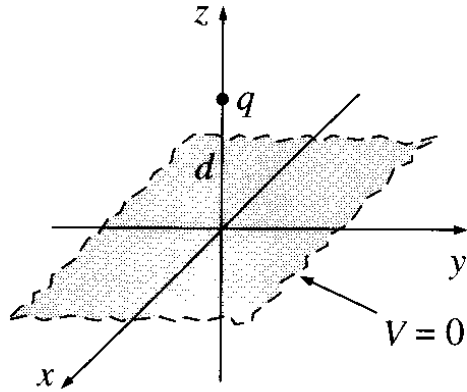
즉, 물리적으로 요약해보면,
경계조건boundary condition이 충분히 주어지면
전위는 유일하게 결정된다는 것입니다.

이제 경계에서의 조건을 만족시키는 조작을 통해
경계 뿐만 아니라 전 영역의 전위를 구하는
흥미로운 예들을 살펴봅시다.

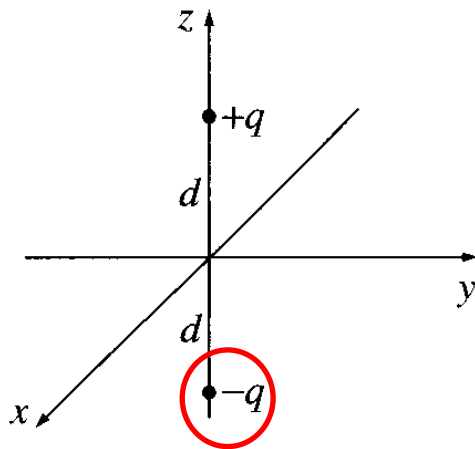
예1: 영상법: 평면 대칭



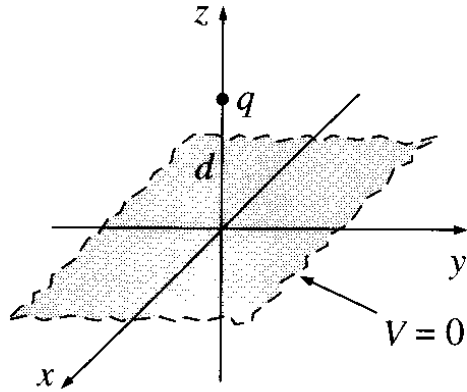
예1: 영상법: 평면 대칭



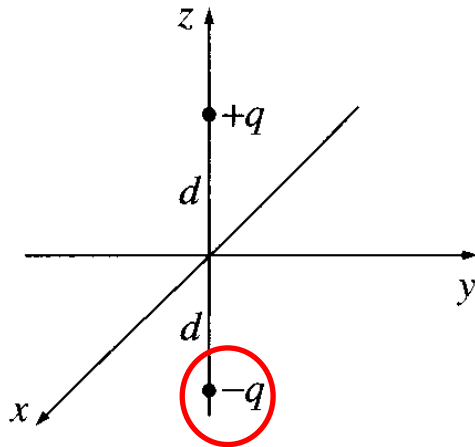
이 경우에 경계에서
퍼텐셜이 0이 되도록 하기 위해서는
반대편에 **가상의 전하(영상전하)**를 생각하면 됩니다.



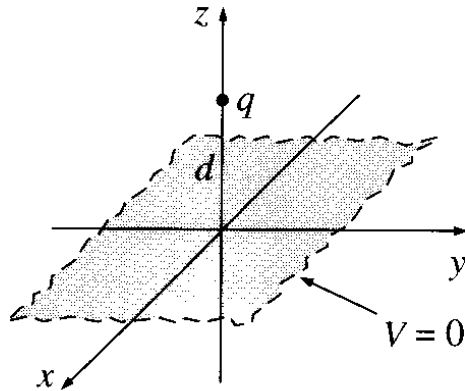
예1: 영상법: 평면 대칭



$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}} - \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+d)^2}} \right)$$



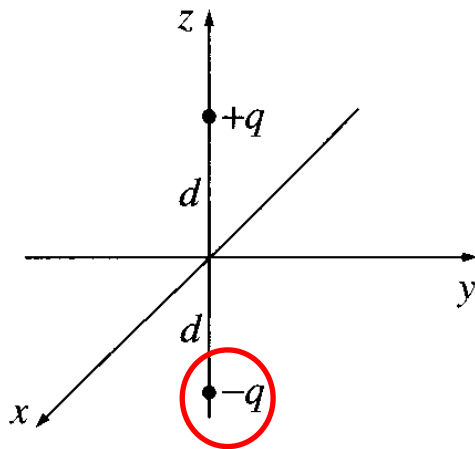
예1: 영상법: 평면 대칭



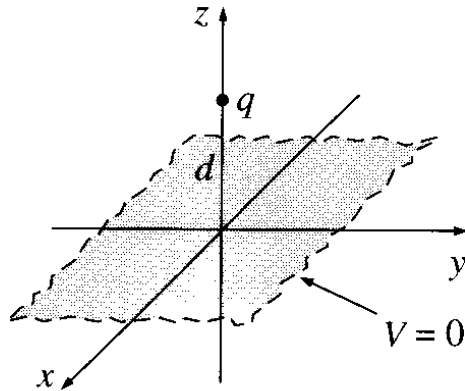
$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}} - \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+d)^2}} \right)$$

이 퍼텐셜은 $z = 0$ 에서 $V = 0$ 이 됩니다.

따라서 유일성정리에 의해, 이 전위가 올바른 전위가 된다는 것을 확신할 수 있습니다.



예1: 영상법: 평면 대칭

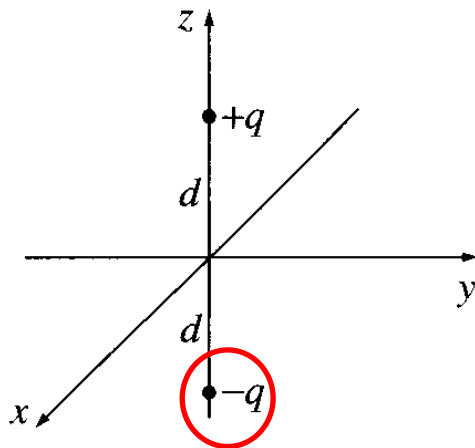


$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}} - \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+d)^2}} \right)$$

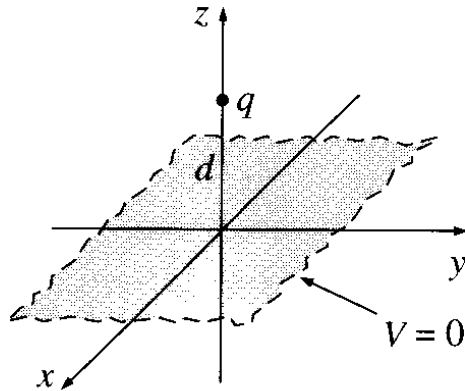
이 퍼텐셜은 $z = 0$ 에서 $V = 0$ 이 됩니다.

따라서 유일성정리에 의해, 이 전위가 올바른 전위가 된다는 것을 확신할 수 있습니다.

그러면 영상전하보다 좀 더 물리적인 양은 무엇일까요?



예1: 영상법: 평면 대칭

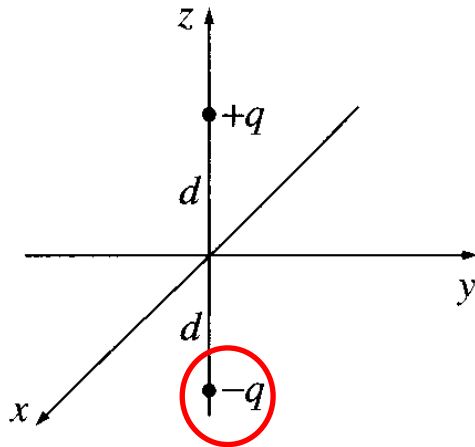


$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}} - \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+d)^2}} \right)$$

이 퍼텐셜은 $z = 0$ 에서 $V = 0$ 이 됩니다.

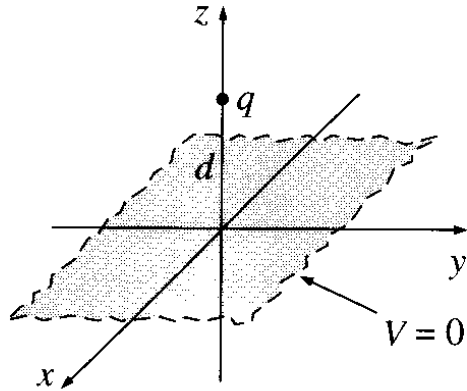
따라서 유일성정리에 의해, 이 전위가 올바른 전위가 된다는 것을 확신할 수 있습니다.

그러면 영상전하보다 좀 더 물리적인 양은 무엇일까요?



$$\begin{aligned} \sigma &= -\epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial n} && \text{유도전하} \\ &= -\epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial z} \Big|_{z=0} \\ &= -\frac{qd}{2\pi(x^2 + y^2 + d^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

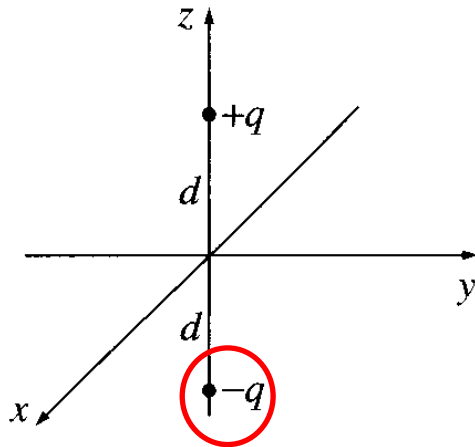
예1: 영상법: 평면 대칭



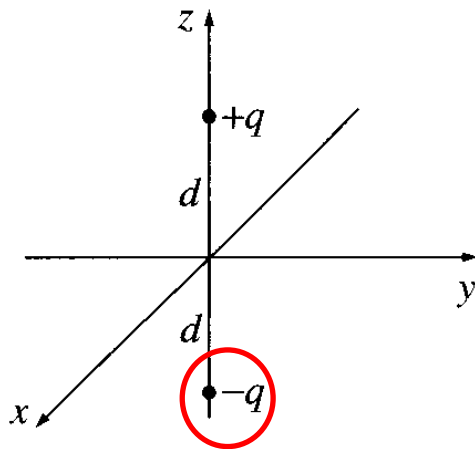
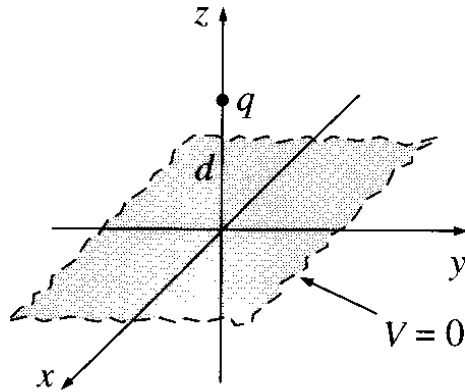
$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}} - \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+d)^2}} \right)$$

이 전하를 모든 평면에서 적분해 봅시다.

$$Q = \int \sigma da$$



예1: 영상법: 평면 대칭



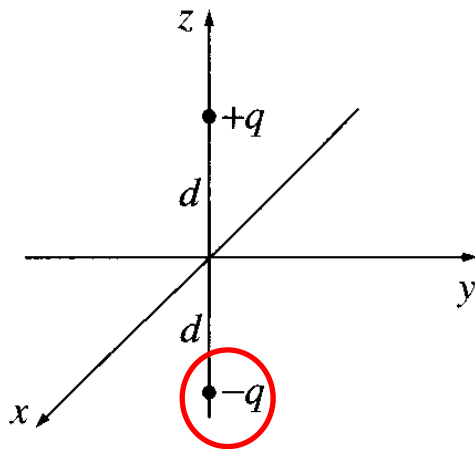
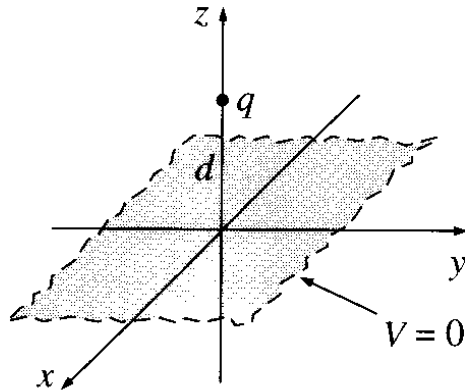
$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}} - \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+d)^2}} \right)$$

이 전하를 모든 평면에서 적분해 봅시다.

$$Q = \int \sigma da$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^\infty -\frac{qd}{2\pi(r^2 + d^2)^{3/2}} r dr d\phi$$

예1: 영상법: 평면 대칭



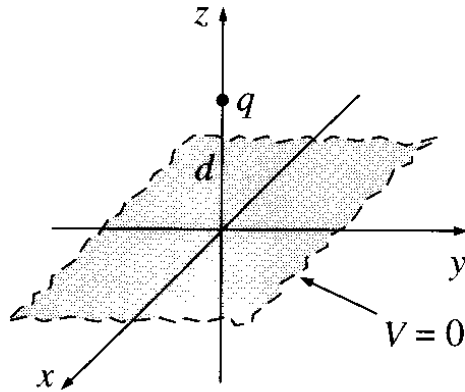
$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}} - \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+d)^2}} \right)$$

이 전하를 모든 평면에서 적분해 봅시다.

$$\begin{aligned} Q &= \int \sigma da \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\infty -\frac{qd}{2\pi(r^2 + d^2)^{3/2}} r dr d\phi \\ &= -\frac{qd}{2} \int_0^\infty \frac{dr^2}{(r^2 + d^2)^{3/2}} \\ &= -q \end{aligned}$$

즉, 영상전하의 양만큼 유도전하가 대전됩니다.

예1: 영상법: 평면 대칭



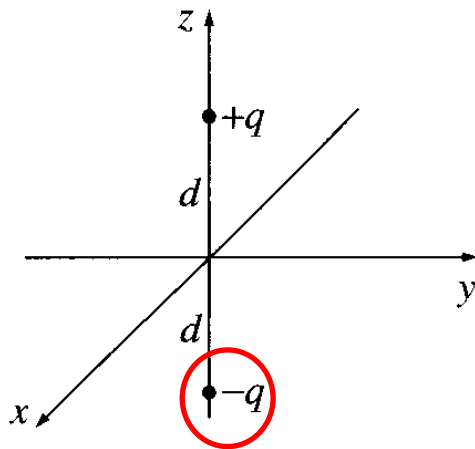
에너지에 대해서 좀 더 살펴봅시다.

전하 두 개를 가져올 때의 에너지는 다음과 같습니다.

$$W = \frac{1}{2} \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{-q}{(2d)} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(2d)} \right)$$

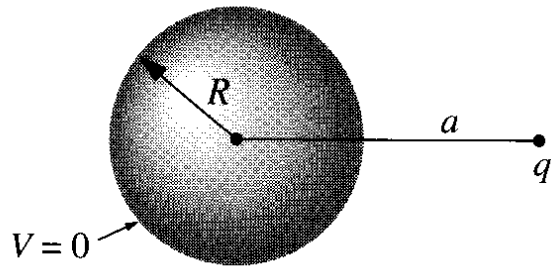
$$= -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(2d)}$$

그러나 영상전하는 물리적 대상이 아니므로 실제로 한 일은 위에서 얻은 값의 절반이 됩니다.

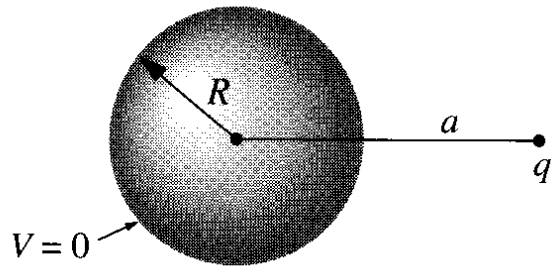


$$W = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(4d)}$$

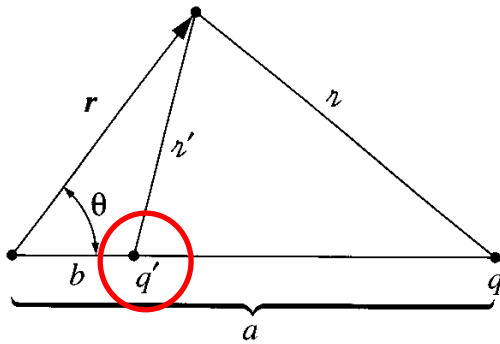
예2: 영상법: 축 대칭



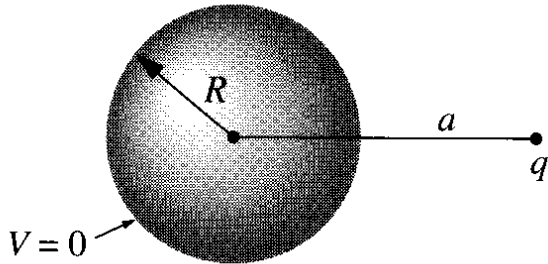
예2: 영상법: 축 대칭



이 경우에는 도체 구 내부에
가상의 전하를 생각하면 됩니다.



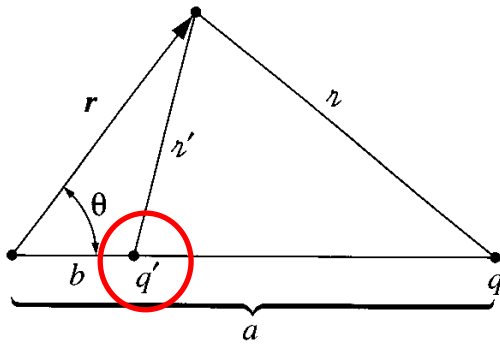
예2: 영상법: 축 대칭



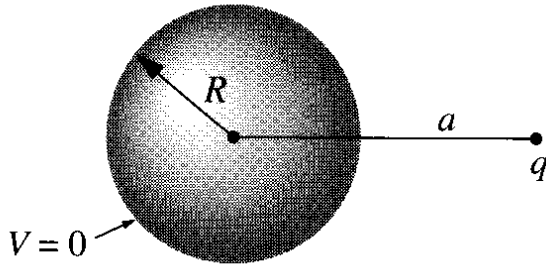
이 문제는 1848년 톰슨 William Thomson (= Kelvin)에 의해 해결되었습니다.

$$q' = -\frac{R}{a}q$$

$$b = \frac{R^2}{a}$$



예2: 영상법: 축 대칭

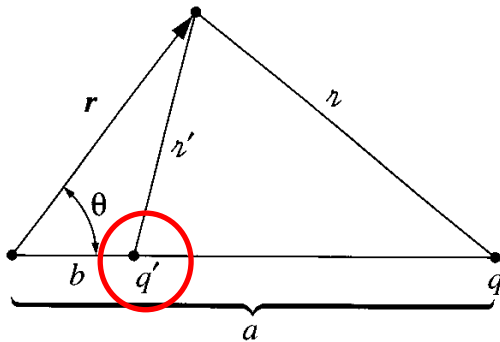


이 문제는 1848년 톰슨 William Thomson (= Kelvin)에 의해 해결되었습니다.

$$q' = -\frac{R}{a}q$$

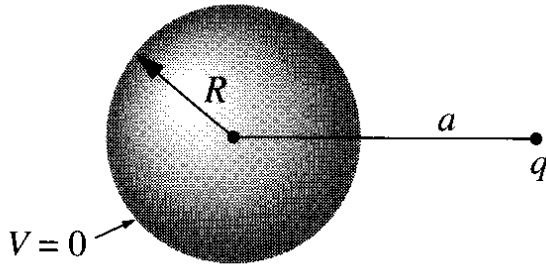
$$b = \frac{R^2}{a}$$

그러면 퍼텐셜은 다음과 같이 됩니다.



$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{\sqrt{(a - r \cos \theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta}} + \frac{q'}{\sqrt{(r \cos \theta - b)^2 + r^2 \sin^2 \theta}} \right)$$

예2: 영상법: 축 대칭



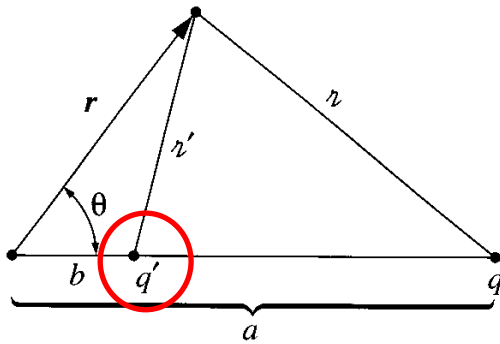
이 문제는 1848년 톰슨 William Thomson (= Kelvin)에 의해 해결되었습니다.

$$q' = -\frac{R}{a}q$$

$$b = \frac{R^2}{a}$$

그러면 퍼텐셜은 다음과 같이 됩니다.

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{\sqrt{(a - r \cos \theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta}} + \frac{q'}{\sqrt{(r \cos \theta - b)^2 + r^2 \sin^2 \theta}} \right)$$



특히 반지름 위치 $r = R$ 에서 다음과 같이 됩니다.

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{\sqrt{(a - R \cos \theta)^2 + R^2 \sin^2 \theta}} + \frac{-\left(\frac{R}{a}\right)q}{\sqrt{(R \cos \theta - R^2/a)^2 + R^2 \sin^2 \theta}} \right) = 0 \text{ 이 됨을 알 수 있습니다.}$$

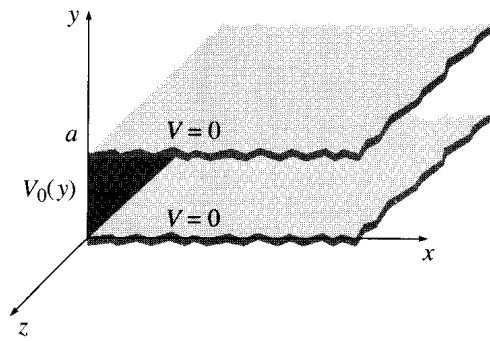
좀 더 일반적인 경우는
미분 방정식을 직접 풀어야 합니다.

먼저 직교 좌표계에서의 문제를 고려해 봅시다.

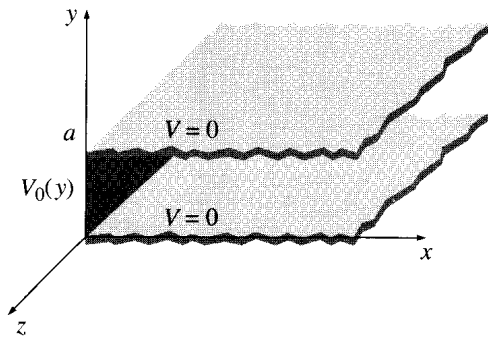
라플라스 방정식은 다음과 같이 표현됩니다.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

예1:



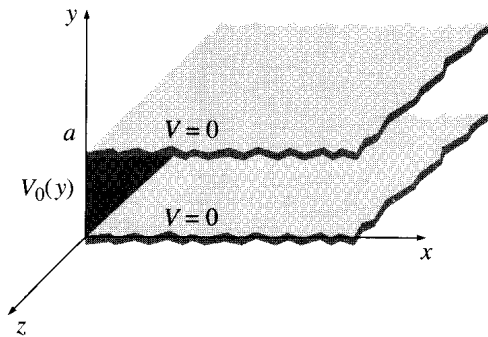
예1:



z -방향으로의 대칭성 때문에 다음 방정식으로 충분합니다.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

예1:



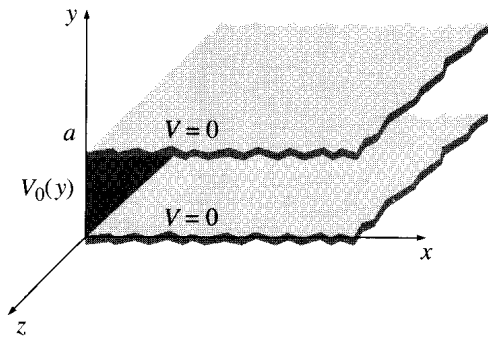
z -방향으로의 대칭성 때문에 다음 방정식으로 충분합니다.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

변수분리:

$$V(x, y) = X(x)Y(y)$$

예1:



z -방향으로의 대칭성 때문에 다음 방정식으로 충분합니다.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

변수분리:

$$V(x, y) = X(x)Y(y)$$

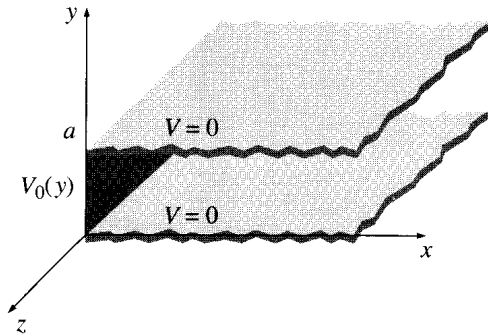
$$X''Y + XY'' = 0$$

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} \equiv k^2$$

분리상수

분리상수를 0보다 크게 잡는 이유는
나중에 물리적 의미를 부여하는 과정에서
자연스럽게 드러나게 됩니다.

예1:



z -방향으로의 대칭성 때문에 다음 방정식으로 충분합니다.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

변수분리:

$$V(x, y) = X(x)Y(y)$$

$$X''Y + XY'' = 0$$

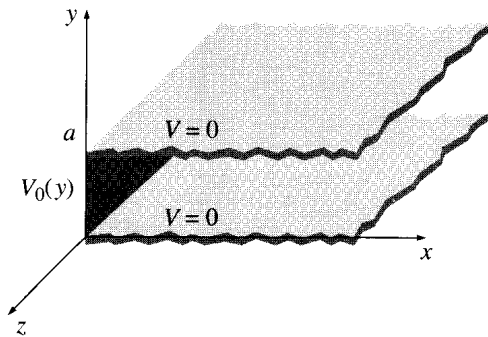
$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} \equiv k^2$$

분리상수

$$X'' - k^2 X = 0$$

$$Y'' + k^2 Y = 0$$

예1:



z -방향으로의 대칭성 때문에 다음 방정식으로 충분합니다.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

변수분리:

$$V(x, y) = X(x)Y(y)$$

$$X''Y + XY'' = 0$$

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} \equiv k^2$$

분리상수

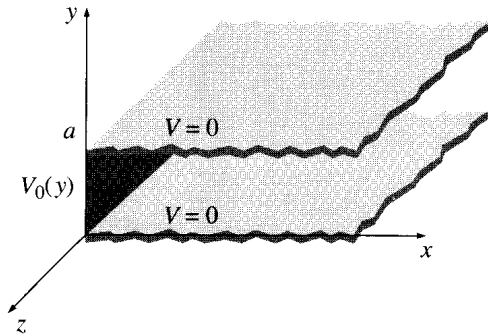
$$X'' - k^2 X = 0$$

$$Y'' + k^2 Y = 0$$

$$X = Ae^{kx} + Be^{-kx}$$

$$Y = C \sin ky + D \cos ky$$

예1:



z -방향으로의 대칭성 때문에 다음 방정식으로 충분합니다.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

변수분리:

$$V(x, y) = X(x)Y(y)$$

$$X''Y + XY'' = 0$$

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} \equiv k^2$$

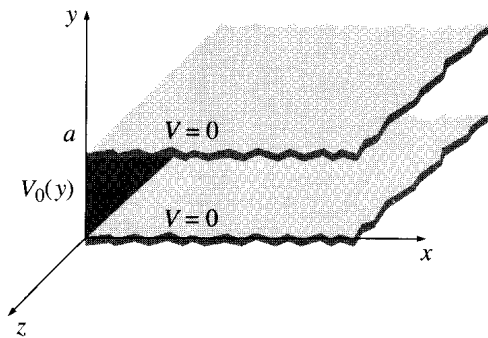
분리상수

$$\begin{aligned} X'' - k^2 X &= 0 \\ Y'' + k^2 Y &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X &= Ae^{kx} + Be^{-kx} \\ Y &= C \sin ky + D \cos ky \end{aligned}$$

$$V = (Ae^{kx} + Be^{-kx})(C \sin ky + D \cos ky)$$

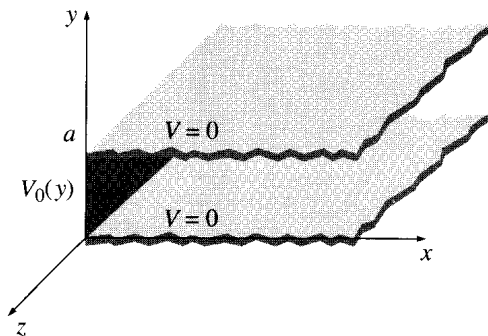
예1:



$$V = (Ae^{kx} + Be^{-kx})(C \sin ky + D \cos ky)$$

이제 여기에 **경계조건**을 부여해 봅시다.

예1:

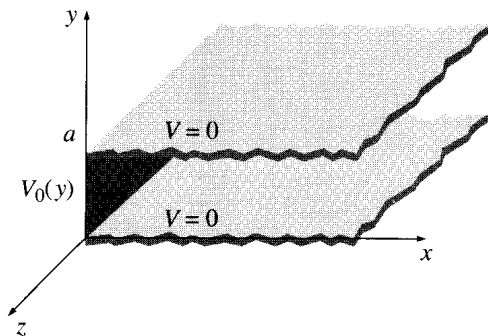


$$V = (Ae^{kx} + Be^{-kx})(C \sin ky + D \cos ky)$$

이제 여기에 **경계조건**을 부여해 봅시다.

$$V(x, 0) = 0 \quad \rightarrow \quad D = 0$$

예1:



$$V = (Ae^{kx} + Be^{-kx})(C \sin ky + D \cos kx)$$

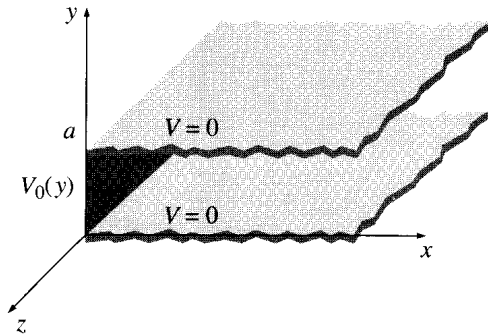
이제 여기에 **경계조건**을 부여해 봅시다.

$$V(x, 0) = 0 \quad \rightarrow \quad D = 0$$

$$V(x, a) = 0 \quad \rightarrow \quad ka = n\pi$$

$$k_n = \frac{n\pi}{a}$$

예1:



$$V = (Ae^{kx} + Be^{-kx})(C \sin ky + D \cos kx)$$

이제 여기에 **경계조건**을 부여해 봅시다.

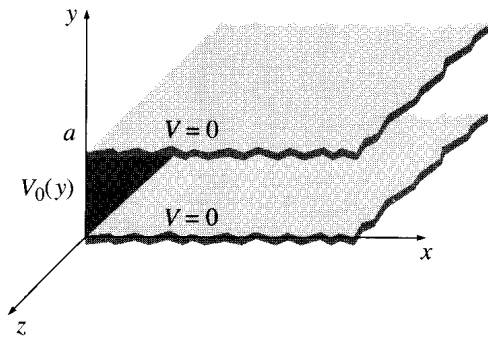
$$V(x, 0) = 0 \quad \rightarrow \quad D = 0$$

$$V(x, a) = 0 \quad \rightarrow \quad ka = n\pi$$

$$k_n = \frac{n\pi}{a}$$

$$V(\infty, y) = 0 \quad \rightarrow \quad A = 0$$

예1:



$$V = (Ae^{kx} + Be^{-kx})(C \sin ky + D \cos kx)$$

이제 여기에 **경계조건**을 부여해 봅시다.

$$V(x, 0) = 0 \quad \rightarrow \quad D = 0$$

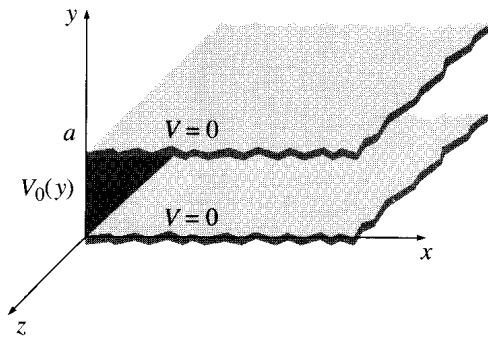
$$V(x, a) = 0 \quad \rightarrow \quad ka = n\pi$$

$$k_n = \frac{n\pi}{a}$$

$$V(\infty, y) = 0 \quad \rightarrow \quad A = 0$$

$$\therefore V = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\frac{n\pi}{a}x} \sin \frac{n\pi}{a}y$$

예1:



$$V = (Ae^{kx} + Be^{-kx})(C \sin ky + D \cos kx)$$

이제 여기에 **경계조건**을 부여해 봅시다.

$$V(x, 0) = 0 \quad \rightarrow \quad D = 0$$

$$V(x, a) = 0 \quad \rightarrow \quad ka = n\pi$$

$$k_n = \frac{n\pi}{a}$$

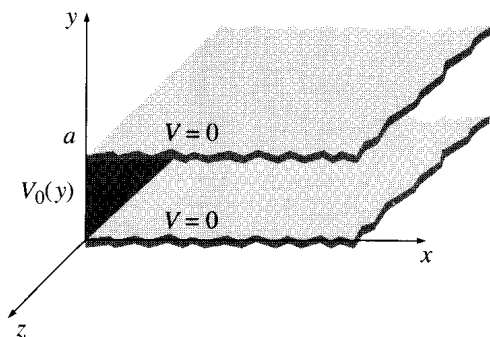
$$V(\infty, y) = 0 \quad \rightarrow \quad A = 0$$

$$\therefore V = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\frac{n\pi}{a}x} \sin \frac{n\pi}{a}y$$

$$V(0, y) = V_0(y)$$

마지막으로 이 조건은 어떻게 만족시키면 될까요?

예1:



$$V = (Ae^{kx} + Be^{-kx})(C \sin ky + D \cos kx)$$

이제 여기에 **경계조건**을 부여해 봅시다.

$$V(x, 0) = 0 \quad \rightarrow \quad D = 0$$

$$V(x, a) = 0 \quad \rightarrow \quad ka = n\pi$$

$$k_n = \frac{n\pi}{a}$$

$$V(\infty, y) = 0 \quad \rightarrow \quad A = 0$$

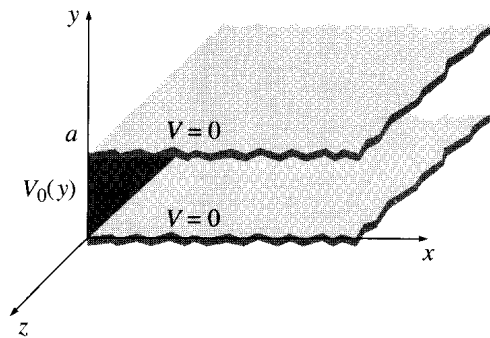
$$\therefore V = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\frac{n\pi}{a}x} \sin \frac{n\pi}{a}y$$

$$V(0, y) = V_0(y)$$

마지막으로 이 조건은 어떻게 만족시키면 될까요?

답: C_n 을 잘 선택하면 됩니다.

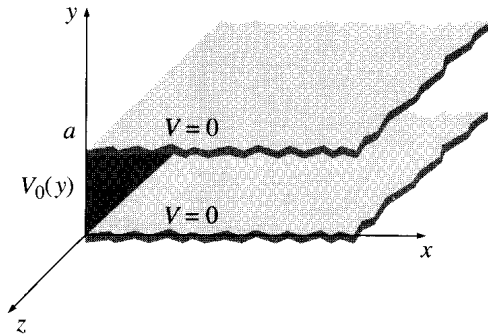
예1:



$$\therefore V = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\frac{n\pi}{a}x} \sin \frac{n\pi}{a} y$$

$$V(0, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi}{a} y$$

예1:



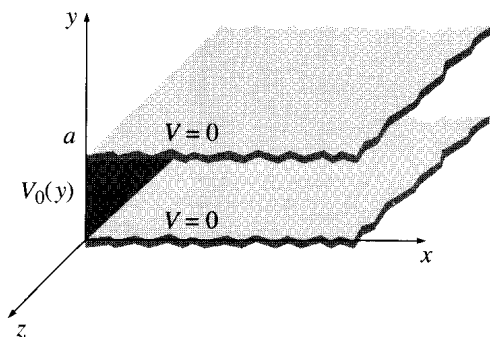
$$\therefore V = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\frac{n\pi}{a}x} \sin \frac{n\pi}{a} y$$

$$V(0, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi}{a} y$$

다음과 같은 함수 공간의 직교성을 사용합시다.

$$\int_0^a \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{n'\pi}{a} x dx = \frac{a}{2} \delta_{nn'}$$

예1:



$$\therefore V = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\frac{n\pi}{a}x} \sin \frac{n\pi}{a} y$$

$$V(0, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi}{a} y$$

다음과 같은 함수 공간의 직교성을 사용합시다.

$$\int_0^a \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{n'\pi}{a} x dx = \frac{a}{2} \delta_{nn'}$$

그러면 C_n 은 다음과 같이 결정됩니다.

$$C_n = \frac{2}{a} \int_0^a V(0, y) \sin \frac{n\pi}{a} y dy$$

즉, 경계조건이 주어지면 모든 상수가 결정된다는 것을 다시 확인할 수 있습니다.

이 과정이 잘 작동하기 위해서는
함수공간의 직교성orthogonality과 완비성completeness이 요청됩니다.

흥미로운 것은 특정한 형태의 선형미분방정식이
고윳값 문제로 환원된다면,
이 고유함수들이 함수공간 전체를 생성하는
직교정규기저를 구성할 수 있다는 사실입니다.

2차 상미분 방정식이 다음과 같은
에르미트 Hermitian 연산자 $\mathcal{L}$ 로 표현된다고 합시다.

$$\mathcal{L} \equiv \frac{d}{dx} p(x) \frac{d}{dx}$$

2차 상미분 방정식이 다음과 같은
에르미트 Hermitian 연산자 $\mathcal{L}$ 로 표현된다고 합시다.

$$\mathcal{L} \equiv \frac{d}{dx} p(x) \frac{d}{dx}$$

$$\mathcal{L}u(x) + \lambda w(x)u(x) = 0$$

2차 상미분 방정식이 다음과 같은
에르미트 Hermitian 연산자 $\mathcal{L}$ 로 표현된다고 합시다.

$$\mathcal{L} \equiv \frac{d}{dx} p(x) \frac{d}{dx}$$

$$\mathcal{L}u(x) + \lambda w(x)u(x) = 0$$

고유벡터 고윳값 고유벡터

2차 상미분 방정식이 다음과 같은
에르미트 Hermitian 연산자 $\mathcal{L}$ 로 표현된다고 합시다.

$$\mathcal{L} \equiv \frac{d}{dx} p(x) \frac{d}{dx}$$

$$\mathcal{L}u(x) + \lambda w(x)u(x) = 0$$

고유벡터 고윳값 고유벡터

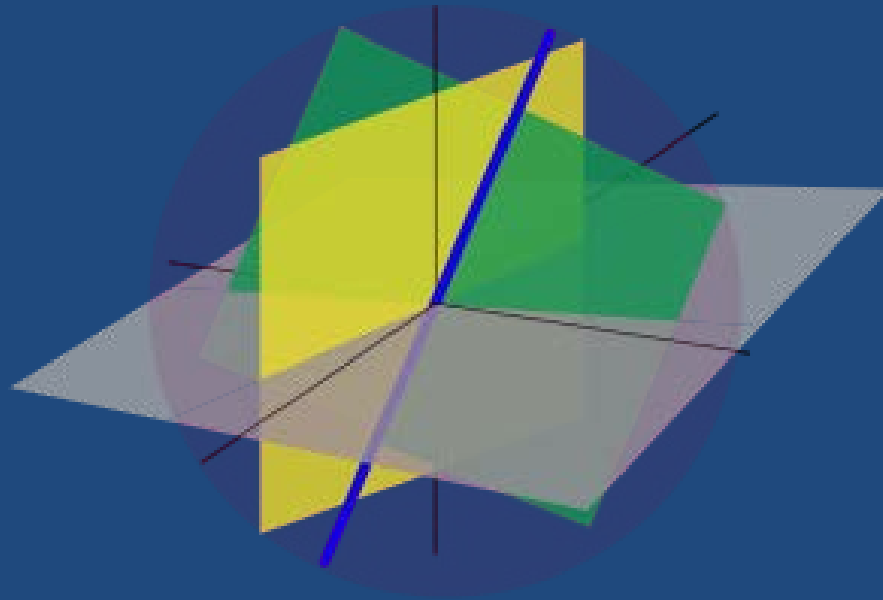
이 때, 다음과 같은 수학적 성질들이 성립합니다.

1. 고윳값은 항상 실수이다.
2. 고유벡터들은 다음 내적에 대해 서로 직교한다 (직교성).

$$\int_a^b u_i u_j^* w dx$$

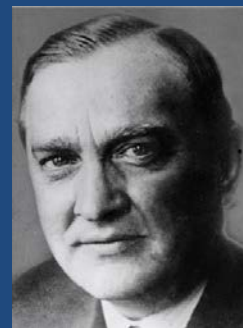
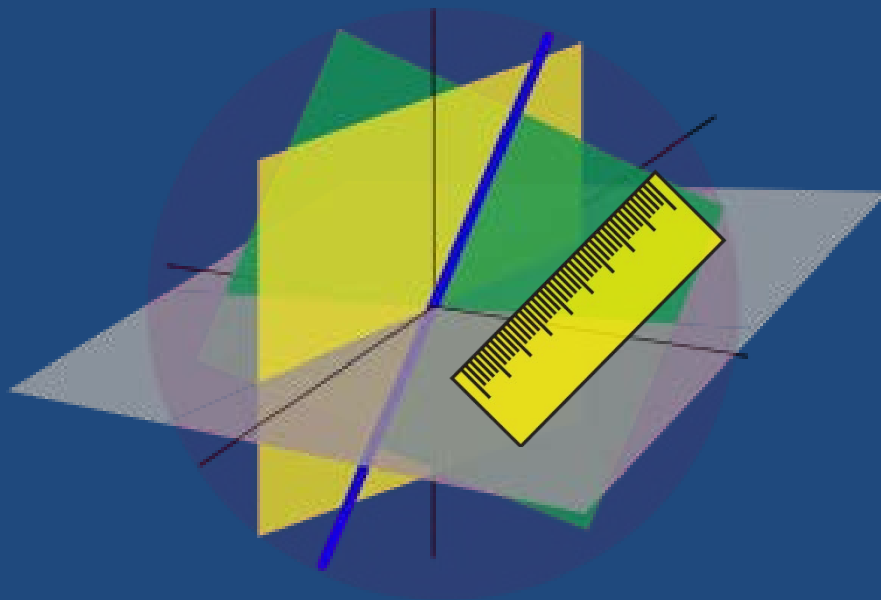
3. 고유벡터들은 함수공간 전체를 생성한다 (완비성).

벡터 공간



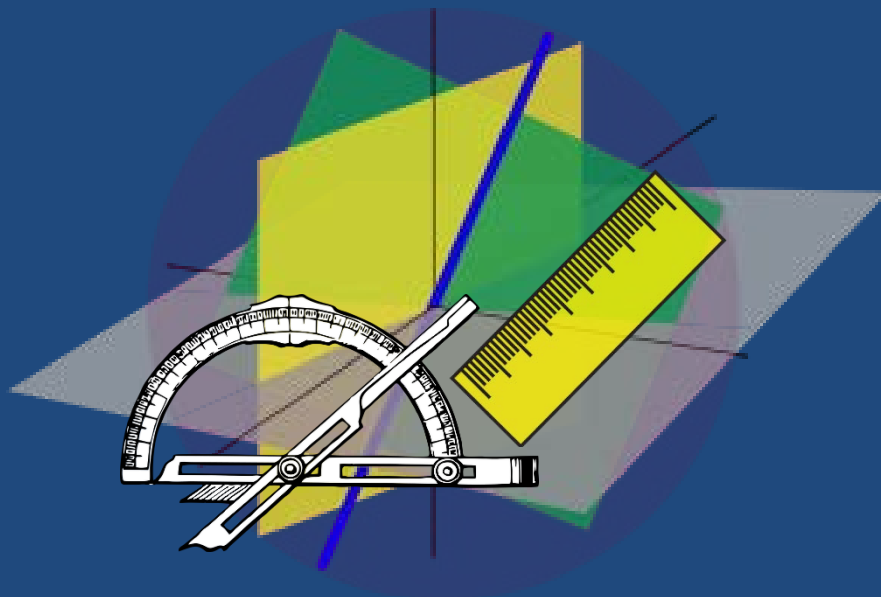
벡터 공간이란 선형연산이 가능한 벡터들이 정의된
수학적 공간을 말합니다.

바나흐 공간



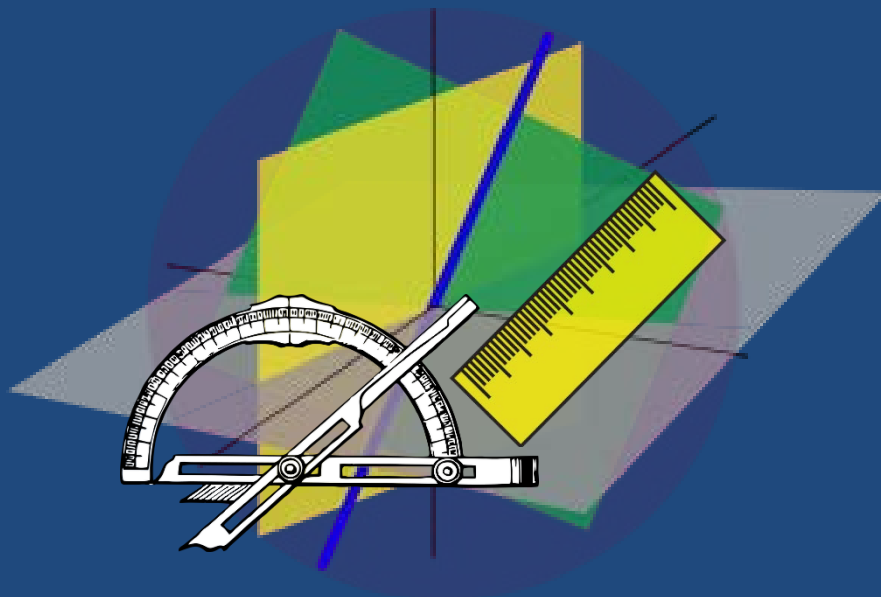
벡터 공간에 거리_{norm}를 정의할 수 있으면
바나흐 공간이라고 부릅니다.

힐베르트 공간



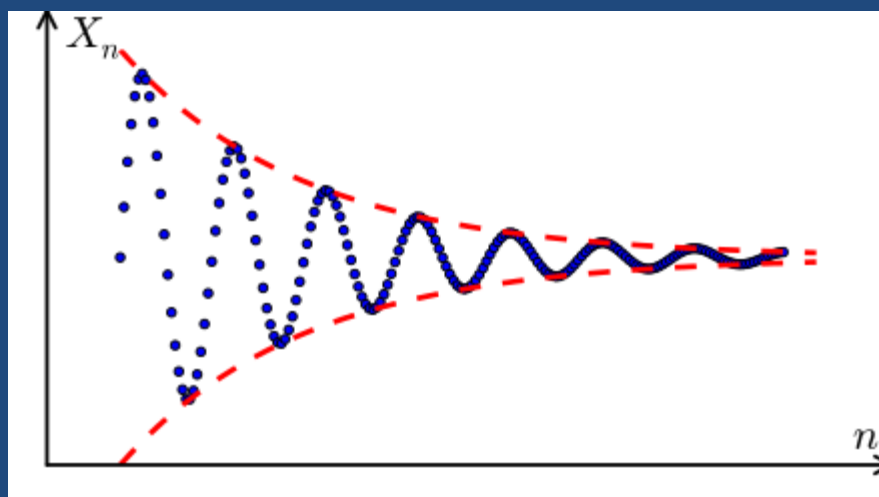
바나흐 공간에 각도를 측정하는 **내적**inner product을
잘 정의할 수 있으면
힐베르트 공간이라고 부릅니다.

힐베르트 공간



바나흐 공간에 각도를 측정하는 내적inner product을
잘 정의할 수 있으면
힐베르트 공간이라고 부릅니다.

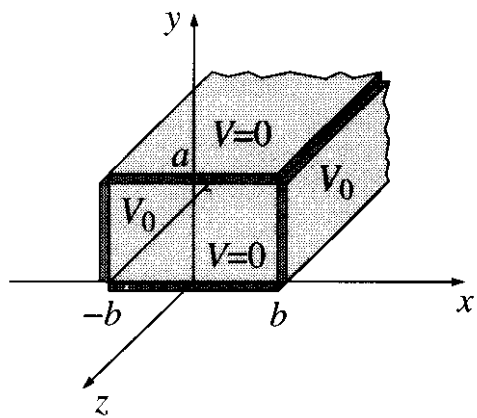
힐베르트 공간



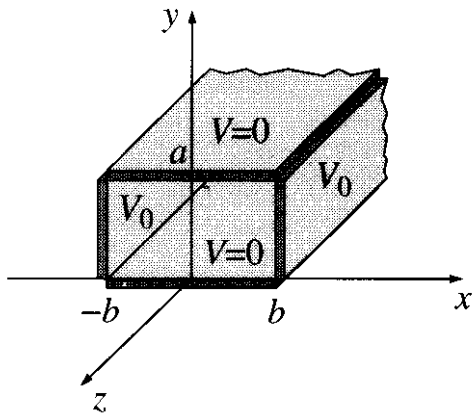
힐베르트 공간은 빈 틈이 없이 꽉 차 있어야 합니다.
즉, **Cauchy complete**해야 합니다.

따라서 2차 선형 상미분방정식이 주어진 시스템은
많은 경우 위와 같은 방법으로
계수를 결정할 수 있습니다.

예2:



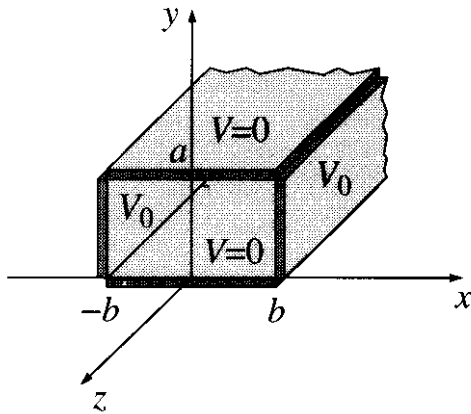
예2:



z -방향으로의 대칭성 때문에 다음 방정식으로 충분합니다.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

예2:



z -방향으로의 대칭성 때문에 다음 방정식으로 충분합니다.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

변수분리:

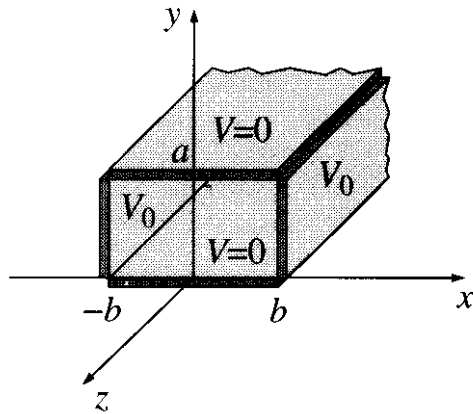
$$V(x, y) = X(x)Y(y)$$

$$X''Y + XY'' = 0$$

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} \equiv k^2$$

분리상수

예2:



z -방향으로의 대칭성 때문에 다음 방정식으로 충분합니다.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

변수분리:

$$V(x, y) = X(x)Y(y)$$

$$X''Y + XY'' = 0$$

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} \equiv k^2$$

분리상수

$$X'' - k^2 X = 0$$

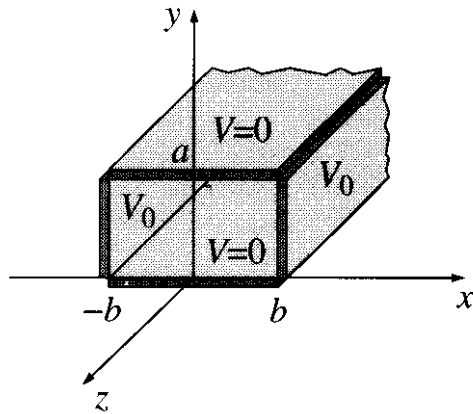
$$Y'' + k^2 Y = 0$$



$$X = A \cosh kx + B \sinh kx$$

$$Y = C \cos ky + D \sin ky$$

예2:



z -방향으로의 대칭성 때문에 다음 방정식으로 충분합니다.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

변수분리:

$$V(x, y) = X(x)Y(y)$$

$$X''Y + XY'' = 0$$

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} \equiv k^2$$

분리상수

이제 여기에 **경계조건**을 부여해 봅시다.

$$Y(0) = 0 \quad \rightarrow \quad C = 0$$

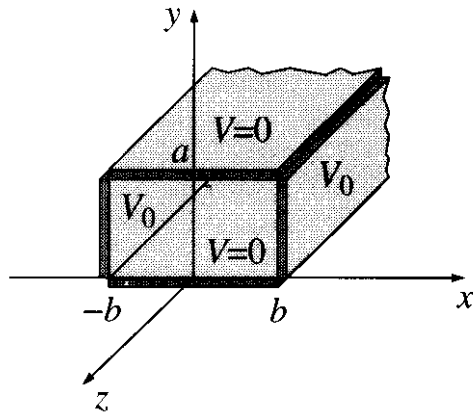
$$X'' - k^2 X = 0$$

$$Y'' + k^2 Y = 0$$

$$X = A \cosh kx + B \sinh kx$$

$$Y = C \cos ky + D \sin ky$$

예2:



z -방향으로의 대칭성 때문에 다음 방정식으로 충분합니다.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

변수분리:

$$V(x, y) = X(x)Y(y)$$

$$X''Y + XY'' = 0$$

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} \equiv k^2$$

분리상수

이제 여기에 **경계조건**을 부여해 봅시다.

$$Y(0) = 0 \rightarrow C = 0$$

$$Y(a) = 0 \rightarrow ka = n\pi$$

$$k_n = \frac{n\pi}{a}$$

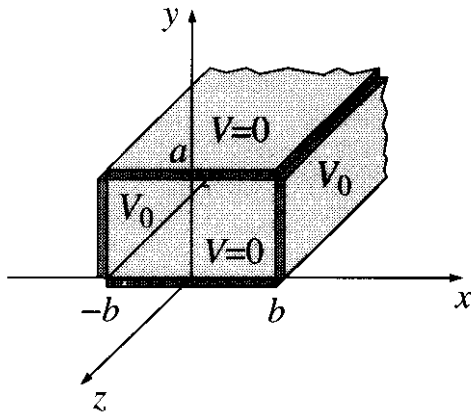
$$X'' - k^2 X = 0$$

$$Y'' + k^2 Y = 0$$

$$X = A \cosh kx + B \sinh kx$$

$$Y = C \cos ky + D \sin ky$$

예2:



z -방향으로의 대칭성 때문에 다음 방정식으로 충분합니다.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

변수분리:

$$V(x, y) = X(x)Y(y)$$

$$X''Y + XY'' = 0$$

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} \equiv k^2$$

분리상수

이제 여기에 **경계조건**을 부여해 봅시다.

$$Y(0) = 0 \rightarrow C = 0$$

$$Y(a) = 0 \rightarrow ka = n\pi$$

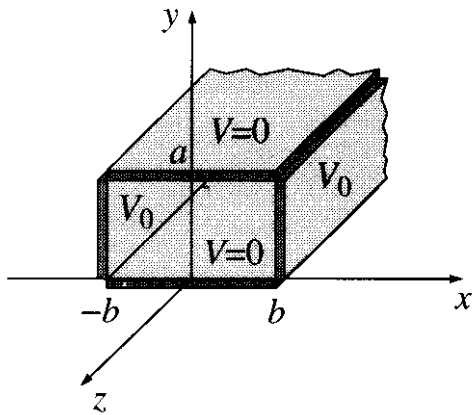
$$k_n = \frac{n\pi}{a}$$

$$X(b) = V_0 = X(-b) \rightarrow B = 0$$

즉, X 는 우함수

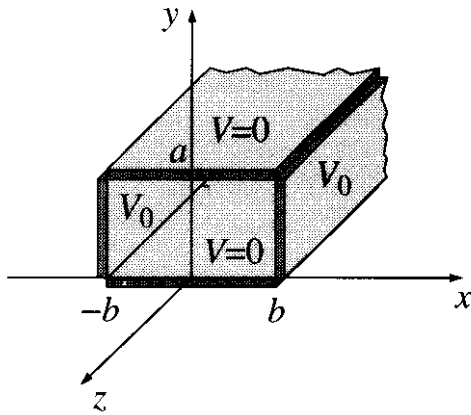
$X'' - k^2 X = 0$ $Y'' + k^2 Y = 0$	→	$X = A \cosh kx + B \sinh kx$ $Y = C \cos ky + D \sin kx$
-------------------------------------	---	---

예)2:



$$\therefore V = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cosh \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{a} y$$

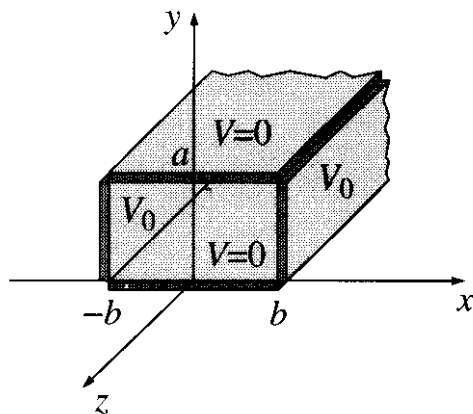
예)2:



$$\therefore V = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cosh \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{a} y$$

$$V(b, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cosh \frac{n\pi}{a} b \sin \frac{n\pi}{a} y = V_0(y)$$

예)2:



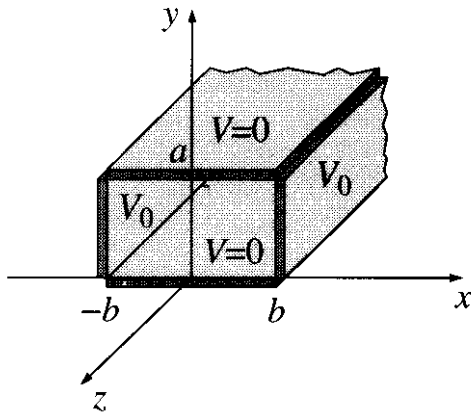
$$\therefore V = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cosh \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{a} y$$

$$V(b, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cosh \frac{n\pi}{a} b \sin \frac{n\pi}{a} y = V_0(y)$$

$$\frac{2}{a} \int_0^a V(b, y) \sin \frac{n\pi}{a} y dy = C_n \cosh \frac{n\pi}{a} b$$

$$C_n = \frac{2}{a \cosh \frac{n\pi}{a} b} \int_0^a V(b, y) \sin \frac{n\pi}{a} y dy$$

예2:



$$\therefore V = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cosh \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{a} y$$

$$V(b, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cosh \frac{n\pi}{a} b \sin \frac{n\pi}{a} y = V_0(y)$$

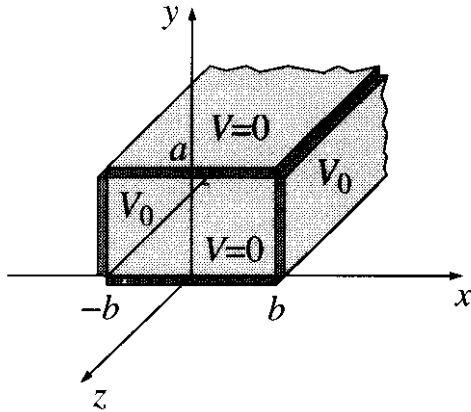
$$\frac{2}{a} \int_0^a V(b, y) \sin \frac{n\pi}{a} y dy = C_n \cosh \frac{n\pi}{a} b$$

$$C_n = \frac{2}{a \cosh \frac{n\pi}{a} b} \int_0^a V(b, y) \sin \frac{n\pi}{a} y dy$$

만일 $V_0(y) = V_0$ 로 주어진다면, 다음과 같이 계산됩니다.

$$C_n = \frac{2}{a \cosh \frac{n\pi}{a} b} \int_0^a V_0 \sin \frac{n\pi}{a} y dy$$

예2:



$$\therefore V = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cosh \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{a} y$$

$$V(b, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cosh \frac{n\pi}{a} b \sin \frac{n\pi}{a} y = V_0(y)$$

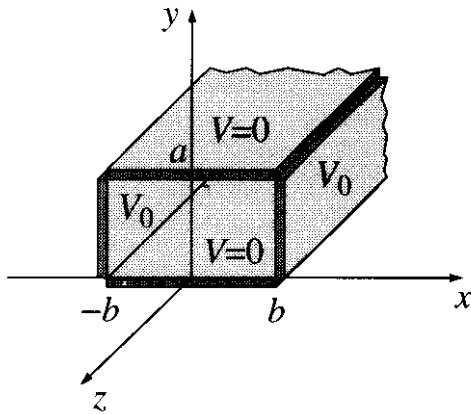
$$\frac{2}{a} \int_0^a V(b, y) \sin \frac{n\pi}{a} y dy = C_n \cosh \frac{n\pi}{a} b$$

$$C_n = \frac{2}{a \cosh \frac{n\pi}{a} b} \int_0^a V(b, y) \sin \frac{n\pi}{a} y dy$$

만일 $V_0(y) = V_0$ 로 주어진다면, 다음과 같이 계산됩니다.

$$C_n = \frac{2}{a \cosh \frac{n\pi}{a} b} \int_0^a V_0 \sin \frac{n\pi}{a} y dy = \frac{2V_0}{a \cosh \frac{n\pi}{a} b} \frac{a}{n\pi} \left(-\cos \frac{n\pi}{a} y \right)_0^a$$

예2:



$$\therefore V = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cosh \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{a} y$$

$$V(b, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cosh \frac{n\pi}{a} b \sin \frac{n\pi}{a} y = V_0(y)$$

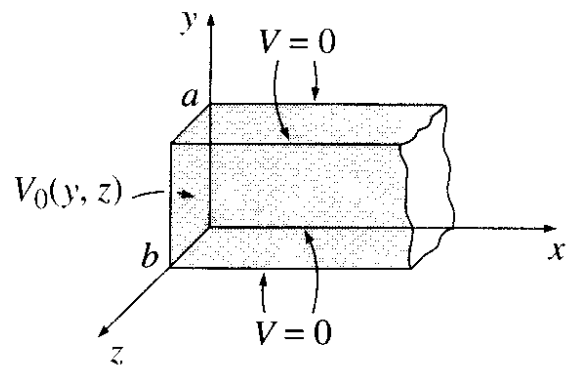
$$\frac{2}{a} \int_0^a V(b, y) \sin \frac{n\pi}{a} y dy = C_n \cosh \frac{n\pi}{a} b$$

$$C_n = \frac{2}{a \cosh \frac{n\pi}{a} b} \int_0^a V(b, y) \sin \frac{n\pi}{a} y dy$$

만일 $V_0(y) = V_0$ 로 주어진다면, 다음과 같이 계산됩니다.

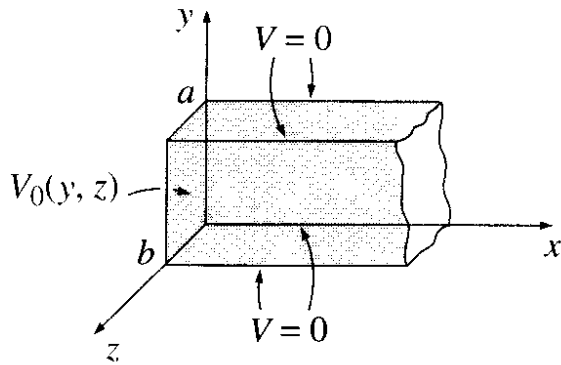
$$C_n = \frac{2}{a \cosh \frac{n\pi}{a} b} \int_0^a V_0 \sin \frac{n\pi}{a} y dy = \frac{2V_0}{a \cosh \frac{n\pi}{a} b} \frac{a}{n\pi} \left(-\cos \frac{n\pi}{a} y \right)_0^a = \frac{\frac{2V_0}{n\pi}}{\cosh \frac{n\pi}{a} b} (1 - (-1)^n)$$

예3:



$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

예3:



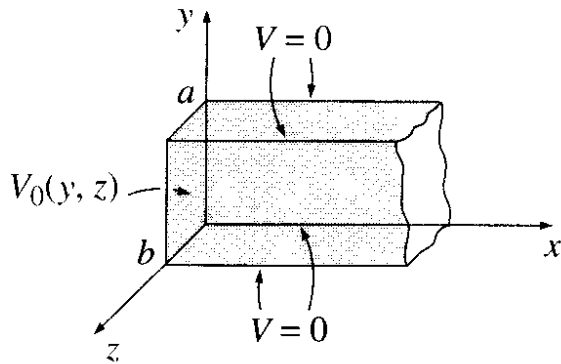
$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

변수분리:

$$V(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$$

$$X''YZ + XY''Z + XYZ'' = 0$$

예3:



$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

변수분리:

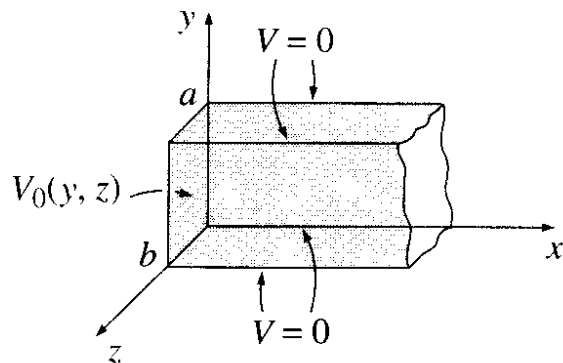
$$V(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$$

$$X''YZ + XY''Z + XYZ'' = 0$$

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} - \frac{Z''}{Z} \equiv k^2$$

구간이 x -방향으로 열려 있으므로

예3:



$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

변수분리:

$$V(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$$

$$X''YZ + XY''Z + XYZ'' = 0$$

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} - \frac{Z''}{Z} \equiv k^2$$

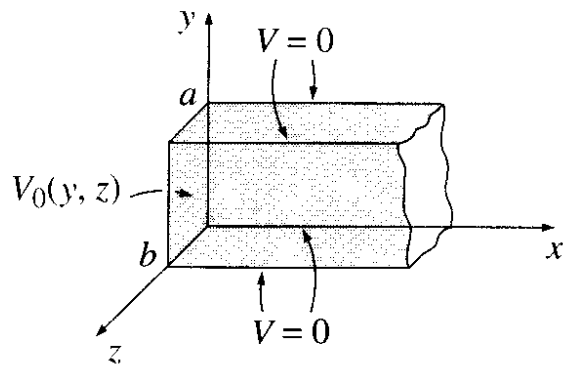
구간이 x -방향으로 열려 있으므로

$$\frac{Y''}{Y} = -\frac{Z''}{Z} - k^2 \equiv -\ell^2$$

구간이 y, z -방향으로 닫혀 있으므로
분리상수를 0보다 크게 잡습니다.

$$\frac{Z''}{Z} \equiv -(k^2 - \ell^2)$$

예3:

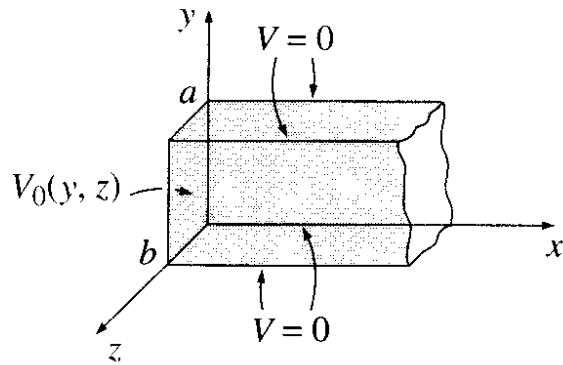


$$X'' - k^2 X = 0$$

$$Y'' + \ell^2 Y = 0$$

$$Z'' + (k^2 - \ell^2) Z = 0$$

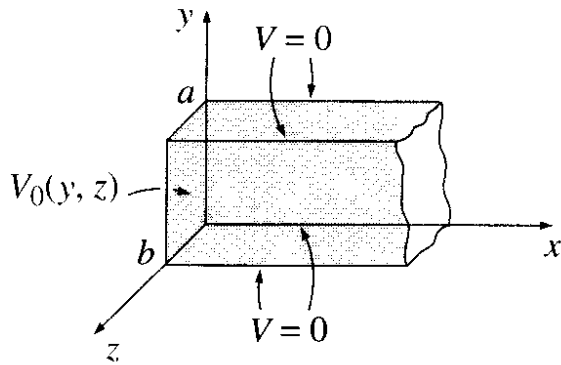
예3:



$$\begin{aligned} X'' - k^2 X &= 0 \\ Y'' + \ell^2 Y &= 0 \\ Z'' + (k^2 - \ell^2) Z &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X &= Ae^{kx} + Be^{-kx} \\ Y &= C \cos \ell y + D \sin \ell y \\ Z &= E \cos \sqrt{k^2 - \ell^2} z + F \sin \sqrt{k^2 - \ell^2} z \end{aligned}$$

예3:

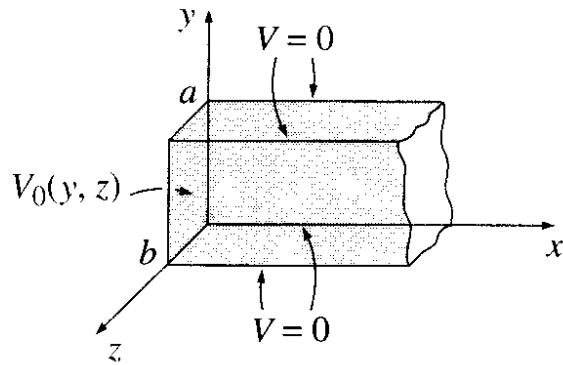


$$\begin{aligned} X'' - k^2 X &= 0 \\ Y'' + \ell^2 Y &= 0 \\ Z'' + (k^2 - \ell^2) Z &= 0 \end{aligned}$$

경계조건

$$\begin{aligned} X &= A e^{kx} + B e^{-kx} \\ Y &= C \cos \ell y + D \sin \ell y \\ Z &= E \cos \sqrt{k^2 - \ell^2} z + F \sin \sqrt{k^2 - \ell^2} z \end{aligned}$$

예3:



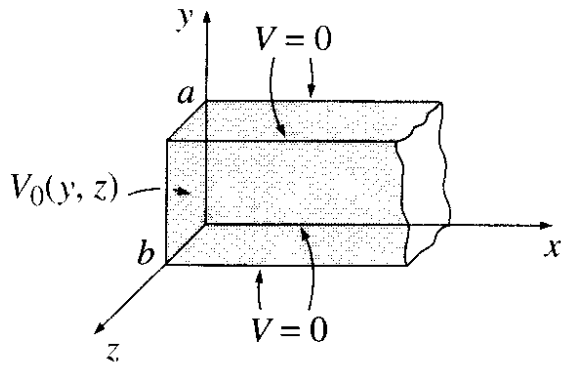
$$\begin{aligned} X'' - k^2 X &= 0 \\ Y'' + \ell^2 Y &= 0 \\ Z'' + (k^2 - \ell^2) Z &= 0 \end{aligned}$$

경계조건

$$\begin{aligned} X &= A e^{kx} + B e^{-kx} \\ Y &= C \cos \ell y + D \sin \ell y \\ Z &= E \cos \sqrt{k^2 - \ell^2} z + F \sin \sqrt{k^2 - \ell^2} z \end{aligned}$$

$$\sqrt{k^2 - \ell^2} = \frac{m\pi}{b}$$

예3:



$$\begin{aligned} X'' - k^2 X &= 0 \\ Y'' + \ell^2 Y &= 0 \\ Z'' + (k^2 - \ell^2) Z &= 0 \end{aligned}$$

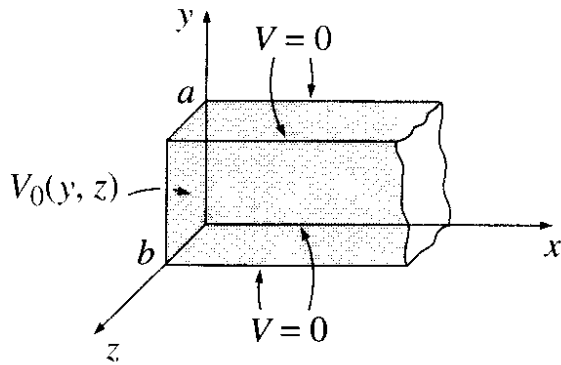
경계조건

$$\begin{aligned} X &= A e^{kx} + B e^{-kx} \\ Y &= C \cos \ell y + D \sin \ell y \\ Z &= E \cos \sqrt{k^2 - \ell^2} z + F \sin \sqrt{k^2 - \ell^2} z \end{aligned}$$

$$\sqrt{k^2 - \ell^2} = \frac{m\pi}{b}$$

$$k_{n,m} = \sqrt{\frac{n^2 \pi^2}{a^2} + \frac{m^2 \pi^2}{b^2}}$$

예3:



$$\begin{aligned} X'' - k^2 X &= 0 \\ Y'' + \ell^2 Y &= 0 \\ Z'' + (k^2 - \ell^2) Z &= 0 \end{aligned}$$

경계조건

$$\begin{aligned} X &= A e^{kx} + B e^{-kx} \\ Y &= C \cos \ell y + D \sin \ell y \\ Z &= E \cos \sqrt{k^2 - \ell^2} z + F \sin \sqrt{k^2 - \ell^2} z \end{aligned}$$

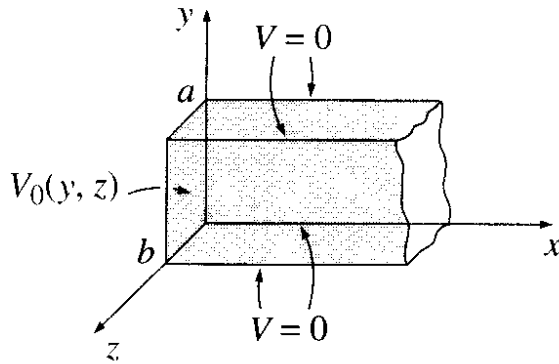
$$\ell = \frac{n\pi}{a}$$

$$\sqrt{k^2 - \ell^2} = \frac{m\pi}{b}$$

$$\therefore V = \sum_{n,m=1}^{\infty} C_{n,m} e^{-\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{a^2} + \frac{m^2\pi^2}{b^2}} x} \sin \frac{n\pi}{a} y \sin \frac{m\pi}{b} z$$

$$k_{n,m} = \sqrt{\frac{n^2\pi^2}{a^2} + \frac{m^2\pi^2}{b^2}}$$

예3:



$$\begin{aligned} X'' - k^2 X &= 0 \\ Y'' + \ell^2 Y &= 0 \\ Z'' + (k^2 - \ell^2) Z &= 0 \end{aligned}$$

경계조건

$$\begin{aligned} X &= A e^{kx} + B e^{-kx} \\ Y &= C \cos \ell y + D \sin \ell y \\ Z &= E \cos \sqrt{k^2 - \ell^2} z + F \sin \sqrt{k^2 - \ell^2} z \end{aligned}$$

$$\ell = \frac{n\pi}{a}$$

$$\sqrt{k^2 - \ell^2} = \frac{m\pi}{b}$$

$$k_{n,m} = \sqrt{\frac{n^2 \pi^2}{a^2} + \frac{m^2 \pi^2}{b^2}}$$

$$\therefore V = \sum_{n,m=1}^{\infty} C_{n,m} e^{-\sqrt{\frac{n^2 \pi^2}{a^2} + \frac{m^2 \pi^2}{b^2}} x} \sin \frac{n\pi}{a} y \sin \frac{m\pi}{b} z$$

$$V(0, y, z) = \sum_{n,m=1}^{\infty} C_{n,m} \sin \frac{n\pi}{a} y \sin \frac{m\pi}{b} z$$

$$C_{n,m} = \frac{2}{a} \frac{2}{b} \int_0^b \int_0^a V(0, y, z) \sin \frac{n\pi}{a} y \sin \frac{m\pi}{b} z dy dz$$

그 다음, 구면 좌표계에서의 문제를 고려해 봅시다.

라플라스 방정식은 다음과 같이 표현됩니다.

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0$$

그 다음, 구면 좌표계에서의 문제를 고려해 봅시다.

특히 $\hat{z}$ -축에 대해 회전대칭이 있다면 아래와 같이 표현됩니다.

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) = 0$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) = 0$$

변수분리:

$$V(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) = 0$$

변수분리:

$$V(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\Theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 R') + \frac{R}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \Theta') \\ &= \frac{\Theta}{r^2} (2rR' + r^2 R'') + \frac{R}{r^2} \left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \Theta' + \Theta'' \right) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) = 0$$

변수분리:

$$V(r, \theta) = R(r) \Theta(\theta)$$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\Theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 R') + \frac{R}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \Theta') \\ &= \frac{\Theta}{r^2} (2rR' + r^2 R'') + \frac{R}{r^2} \left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \Theta' + \Theta'' \right) \end{aligned}$$

$$\frac{r^2 R'' + 2rR'}{R} = -\frac{1}{\Theta} \left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \Theta' + \Theta'' \right) \equiv \ell(\ell + 1) \quad \text{분리상수}$$

$$r^2 R'' + 2rR' - \ell(\ell + 1)R = 0$$

$$\sin \theta \Theta'' + \cos \theta \Theta' + \ell(\ell + 1) \sin \theta \Theta = 0$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) = 0$$

변수분리:

$$V(r, \theta) = R(r) \Theta(\theta)$$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\Theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 R') + \frac{R}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \Theta') \\ &= \frac{\Theta}{r^2} (2rR' + r^2 R'') + \frac{R}{r^2} \left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \Theta' + \Theta'' \right) \end{aligned}$$

$$\frac{r^2 R'' + 2rR'}{R} = -\frac{1}{\Theta} \left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \Theta' + \Theta'' \right) \equiv \ell(\ell + 1) \quad \text{분리상수}$$

$$r^2 R'' + 2rR' - \ell(\ell + 1)R = 0$$

$$\sin \theta \Theta'' + \cos \theta \Theta' + \ell(\ell + 1) \sin \theta \Theta = 0$$

$$R(r) = Ar^\ell + \frac{B}{r^{\ell+1}}$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) = 0$$

변수분리:

$$V(r, \theta) = R(r) \Theta(\theta)$$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\Theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 R') + \frac{R}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \Theta') \\ &= \frac{\Theta}{r^2} (2rR' + r^2 R'') + \frac{R}{r^2} \left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \Theta' + \Theta'' \right) \end{aligned}$$

$$\frac{r^2 R'' + 2rR'}{R} = -\frac{1}{\Theta} \left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \Theta' + \Theta'' \right) \equiv \ell(\ell + 1) \quad \text{분리상수}$$

$$r^2 R'' + 2rR' - \ell(\ell + 1)R = 0$$

$$\sin \theta \Theta'' + \cos \theta \Theta' + \ell(\ell + 1) \sin \theta \Theta = 0$$



$$R(r) = Ar^\ell + \frac{B}{r^{\ell+1}}$$

$$\Theta(\theta) = ?$$

$$\sin \theta \, \Theta'' + \cos \theta \, \Theta' + \ell(\ell + 1) \sin \theta \, \Theta = 0$$

$$\sin \theta \, \Theta'' + \cos \theta \, \Theta' + \ell(\ell + 1) \sin \theta \, \Theta = 0$$

$$\cos \theta \equiv x$$

$$-\sin \theta \, d\theta \equiv dx$$

$$\frac{d}{d\theta} \equiv -\sin \theta \frac{d}{dx}$$

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \equiv -\cos \theta \frac{d}{dx} + \sin^2 \theta \frac{d^2}{dx^2}$$

$$\sin \theta \Theta'' + \cos \theta \Theta' + \ell(\ell + 1) \sin \theta \Theta = 0$$

$$\cos \theta \equiv x$$

$$-\sin \theta d\theta \equiv dx$$

$$\frac{d}{d\theta} \equiv -\sin \theta \frac{d}{dx}$$

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \equiv -\cos \theta \frac{d}{dx} + \sin^2 \theta \frac{d^2}{dx^2}$$

$$\sin \theta \Theta'' = -\sin \theta \cos \theta \frac{d\Theta}{dx} + \sin^3 \theta \frac{d^2\Theta}{dx^2}$$

$$\cos \theta \Theta' = -\sin \theta \cos \theta \frac{d\Theta}{dx}$$

$$\ell(\ell + 1) \sin \theta \Theta = \ell(\ell + 1) \sin \theta \Theta$$

$$\sin \theta \Theta'' + \cos \theta \Theta' + \ell(\ell + 1) \sin \theta \Theta = 0$$

$$\cos \theta \equiv x$$

$$-\sin \theta d\theta \equiv dx$$

$$\frac{d}{d\theta} \equiv -\sin \theta \frac{d}{dx}$$

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \equiv -\cos \theta \frac{d}{dx} + \sin^2 \theta \frac{d^2}{dx^2}$$

$$\sin \theta \Theta'' = -\sin \theta \cos \theta \frac{d\Theta}{dx} + \sin^3 \theta \frac{d^2\Theta}{dx^2}$$

$$\cos \theta \Theta' = -\sin \theta \cos \theta \frac{d\Theta}{dx}$$

$$+ \ell(\ell + 1) \sin \theta \Theta = \ell(\ell + 1) \sin \theta \Theta$$

$$\sin \theta \Theta'' + \cos \theta \Theta' + \ell(\ell + 1) \sin \theta \Theta = 0$$

$$\cos \theta \equiv x$$

$$-\sin \theta d\theta \equiv dx$$

$$\frac{d}{d\theta} \equiv -\sin \theta \frac{d}{dx}$$

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \equiv -\cos \theta \frac{d}{dx} + \sin^2 \theta \frac{d^2}{dx^2}$$

$$\sin \theta \Theta'' = -\sin \theta \cos \theta \frac{d\Theta}{dx} + \sin^3 \theta \frac{d^2\Theta}{dx^2}$$

$$\cos \theta \Theta' = -\sin \theta \cos \theta \frac{d\Theta}{dx}$$

$$+ \ell(\ell + 1) \sin \theta \Theta = \ell(\ell + 1) \sin \theta \Theta$$

$$0 = (1 - x^2) \frac{d^2\Theta}{dx^2} - 2x \frac{d\Theta}{dx} + \ell(\ell + 1) \Theta$$

르장드르 방정식

$$0 = (1 - x^2) \frac{d^2 \Theta}{dx^2} - 2x \frac{d\Theta}{dx} + \ell(\ell + 1) \Theta$$

프로베니우스 방법으로 방정식을 풀어봅시다.

$$\Theta \equiv \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$\Theta' = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^{n-1}$$

$$\Theta'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}$$

$$0 = (1 - x^2) \frac{d^2 \Theta}{dx^2} - 2x \frac{d\Theta}{dx} + \ell(\ell + 1) \Theta$$

프로베니우스 방법으로 방정식을 풀어봅시다.

$$\Theta \equiv \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$(1 - x^2) \Theta'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) c_n x^n$$

$$\Theta' = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^{n-1}$$

$$\Theta'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}$$

$$0 = (1 - x^2) \frac{d^2 \Theta}{dx^2} - 2x \frac{d\Theta}{dx} + \ell(\ell + 1) \Theta$$

프로베니우스 방법으로 방정식을 풀어봅시다.

$$\Theta \equiv \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$\Theta' = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^{n-1}$$

$$\Theta'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}$$

$$(1 - x^2) \Theta'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) c_n x^n$$

$$-2x \Theta' = \sum_{n=0}^{\infty} -2n c_n x^n$$

$$0 = (1 - x^2) \frac{d^2 \Theta}{dx^2} - 2x \frac{d\Theta}{dx} + \ell(\ell + 1) \Theta$$

프로베니우스 방법으로 방정식을 풀어봅시다.

$$\Theta \equiv \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$\Theta' = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^{n-1}$$

$$\Theta'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}$$

$$(1 - x^2) \Theta'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) c_n x^n$$

$$-2x \Theta' = \sum_{n=0}^{\infty} -2n c_n x^n$$

$$\ell(\ell + 1) \Theta = \sum_{n=0}^{\infty} \ell(\ell + 1) c_n x^n$$

$$0 = (1 - x^2) \frac{d^2 \Theta}{dx^2} - 2x \frac{d\Theta}{dx} + \ell(\ell + 1) \Theta$$

프로베니우스 방법으로 방정식을 풀어봅시다.

$$\Theta \equiv \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$(1 - x^2) \Theta'' = \sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)c_{n+2} - n(n-1)c_n] x^n$$

$$\Theta' = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^{n-1}$$

$$-2x \Theta' = \sum_{n=0}^{\infty} -2n c_n x^n$$

$$\Theta'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} \quad + \quad \ell(\ell+1) \Theta = \sum_{n=0}^{\infty} \ell(\ell+1) c_n x^n$$

$$0 = (1 - x^2) \frac{d^2 \Theta}{dx^2} - 2x \frac{d\Theta}{dx} + \ell(\ell + 1) \Theta$$

프로베니우스 방법으로 방정식을 풀어봅시다.

$$\Theta \equiv \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$(1 - x^2) \Theta'' = \sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)c_{n+2} - n(n-1)c_n] x^n$$

$$\Theta' = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^{n-1}$$

$$-2x \Theta' = \sum_{n=0}^{\infty} -2n c_n x^n$$

$$\Theta'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} \quad + \quad \ell(\ell+1) \Theta = \sum_{n=0}^{\infty} \ell(\ell+1) c_n x^n$$

$$(n+2)(n+1)c_{n+2} - n(n-1)c_n - 2nc_n + \ell(\ell+1)c_n = 0$$

$$0 = (1 - x^2) \frac{d^2 \Theta}{dx^2} - 2x \frac{d\Theta}{dx} + \ell(\ell + 1) \Theta$$

프로베니우스 방법으로 방정식을 풀어봅시다.

$$(n + 2)(n + 1)c_{n+2} - n(n - 1)c_n - 2nc_n + \ell(\ell + 1)c_n = 0$$

$$c_{n+2} = \frac{(n^2 + n) - \ell(\ell + 1)}{(n + 1)(n + 2)} c_n$$

$$0 = (1 - x^2) \frac{d^2 \Theta}{dx^2} - 2x \frac{d\Theta}{dx} + \ell(\ell + 1) \Theta$$

프로베니우스 방법으로 방정식을 풀어봅시다.

$$(n + 2)(n + 1)c_{n+2} - n(n - 1)c_n - 2nc_n + \ell(\ell + 1)c_n = 0$$

$$c_{n+2} = \frac{(n^2 + n) - \ell(\ell + 1)}{(n + 1)(n + 2)} c_n$$

그런데 유한한 항에서 이 관계식이 멈추지 않으면, $n \gg 1$ 인 경우 $c_{n+2} \simeq c_n$ 이 됩니다.

그러면 이 급수는 $x = 1$ (즉, $\theta = 0$)에서 수렴하지 않게 됩니다.

$$0 = (1 - x^2) \frac{d^2 \Theta}{dx^2} - 2x \frac{d\Theta}{dx} + \ell(\ell + 1) \Theta$$

프로베니우스 방법으로 방정식을 풀어봅시다.

$$(n + 2)(n + 1)c_{n+2} - n(n - 1)c_n - 2nc_n + \ell(\ell + 1)c_n = 0$$

$$c_{n+2} = \frac{(n^2 + n) - \ell(\ell + 1)}{(n + 1)(n + 2)} c_n$$

그런데 유한한 항에서 이 관계식이 멈추지 않으면, $n \gg 1$ 인 경우 $c_{n+2} \simeq c_n$ 이 됩니다.

그러면 이 급수는 $x = 1$ (즉, $\theta = 0$)에서 수렴하지 않게 됩니다.

따라서 유한한 항에서 끝나는 다항식만 허용되며, ℓ 은 자연수가 되어야 합니다.

“르장드르 다항식”

$$0 = (1 - x^2) \frac{d^2 \Theta}{dx^2} - 2x \frac{d\Theta}{dx} + \ell(\ell + 1)\Theta$$

르장드르 다항식을 정리하면 다음과 같이 적을 수 있습니다. (로드리게스 공식)

$$P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \left(\frac{d}{dx} \right)^\ell (x^2 - 1)^\ell$$

따라서 라플라스 방정식의 각도 방향의 해는 다음과 같이 표현됩니다.

$$P_\ell(\cos \theta)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) = 0$$

변수분리:

$$V(r, \theta) = R(r) \Theta(\theta)$$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\Theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 R') + \frac{R}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \Theta') \\ &= \frac{\Theta}{r^2} (2rR' + r^2 R'') + \frac{R}{r^2} \left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \Theta' + \Theta'' \right) \end{aligned}$$

$$\frac{r^2 R'' + 2rR'}{R} = -\frac{1}{\Theta} \left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \Theta' + \Theta'' \right) \equiv \ell(\ell + 1) \quad \text{분리상수}$$

$$r^2 R'' + 2rR' - \ell(\ell + 1)R = 0$$

$$\sin \theta \Theta'' + \cos \theta \Theta' + \ell(\ell + 1) \sin \theta \Theta = 0$$



$$R(r) = Ar^\ell + \frac{B}{r^{\ell+1}}$$

$$\Theta(\theta) = ?$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) = 0$$

변수분리:

$$V(r, \theta) = R(r) \Theta(\theta)$$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\Theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 R') + \frac{R}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \Theta') \\ &= \frac{\Theta}{r^2} (2rR' + r^2 R'') + \frac{R}{r^2} \left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \Theta' + \Theta'' \right) \end{aligned}$$

$$\frac{r^2 R'' + 2rR'}{R} = -\frac{1}{\Theta} \left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \Theta' + \Theta'' \right) \equiv \ell(\ell + 1) \quad \text{분리상수}$$

$$r^2 R'' + 2rR' - \ell(\ell + 1)R = 0$$

$$\sin \theta \Theta'' + \cos \theta \Theta' + \ell(\ell + 1) \sin \theta \Theta = 0$$



$$R(r) = Ar^\ell + \frac{B}{r^{\ell+1}}$$

$$\Theta(\theta) = P_\ell(\cos \theta)$$

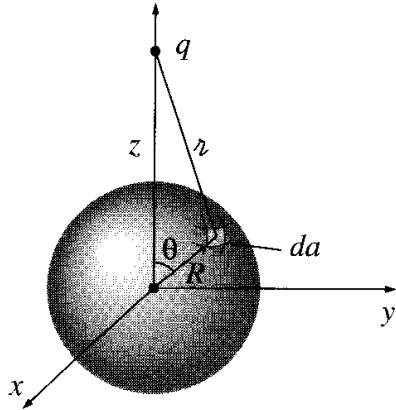
$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) = 0$$

따라서 구면좌표계에서 (축 방향 회전 대칭이 있을 때)
라플라스 방정식의 일반적인 해는 다음과 같이 표현됩니다.

$$V(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(A_{\ell} r^{\ell} + \frac{B_{\ell}}{r^{\ell+1}} \right) P_{\ell}(\cos \theta)$$

이 해를 사용해서 몇 가지 문제를 풀어 봅시다.

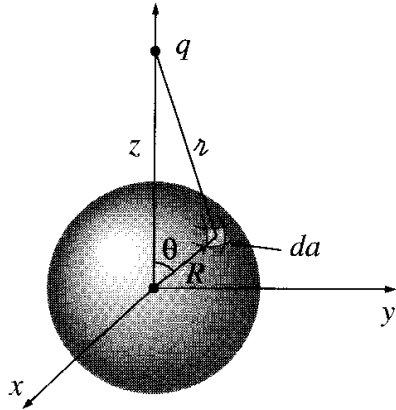
예1: $V(R, \theta)$ 가 주어진 반지름 R 의 구각



공 **내부**의 전위는 $r = 0$ 근처에서 유한한 값을 가져야 합니다.

$$V(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(A_{\ell} r^{\ell} + \cancel{\frac{B_{\ell}}{r^{\ell+1}}} \right) P_{\ell}(\cos \theta)$$

예1: $V(R, \theta)$ 가 주어진 반지름 R 의 구각

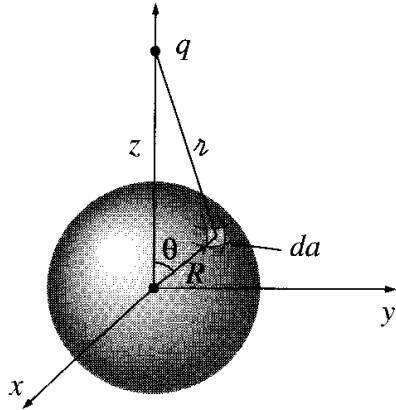


공 **내부**의 전위는 $r = 0$ 근처에서 유한한 값을 가져야 합니다.

$$V(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(A_{\ell} r^{\ell} + \cancel{\frac{B_{\ell}}{r^{\ell+1}}} \right) P_{\ell}(\cos \theta)$$

$$V(R, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_{\ell} R^{\ell} P_{\ell}(\cos \theta) \quad \text{경계조건}$$

예1: $V(R, \theta)$ 가 주어진 반지름 R 의 구각



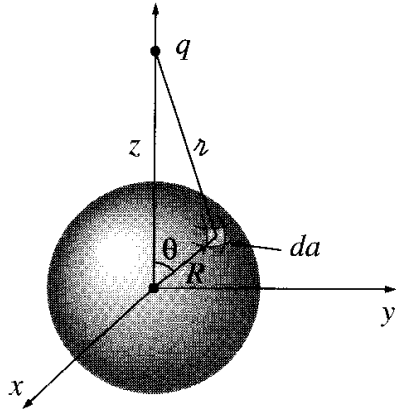
공 내부의 전위는 $r = 0$ 근처에서 유한한 값을 가져야 합니다.

$$V(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(A_{\ell} r^{\ell} + \cancel{\frac{B_{\ell}}{r^{\ell+1}}} \right) P_{\ell}(\cos \theta)$$

$$V(R, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_{\ell} R^{\ell} P_{\ell}(\cos \theta) \quad \text{경계조건}$$

직교 조건:
$$\int_{-1}^1 P_{\ell}(x) P_{\ell'}(x) dx = \int_0^{\pi} P_{\ell}(\cos \theta) P_{\ell'}(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \delta_{\ell\ell'} \frac{2}{2\ell + 1}$$

예1: $V(R, \theta)$ 가 주어진 반지름 R 의 구각



공 내부의 전위는 $r = 0$ 근처에서 유한한 값을 가져야 합니다.

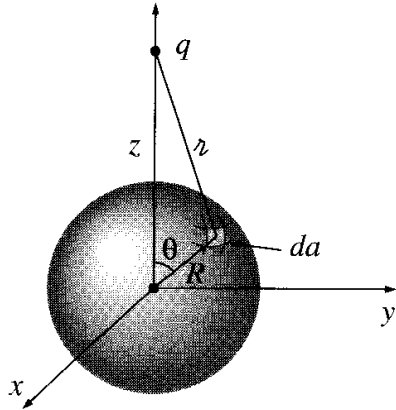
$$V(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(A_{\ell} r^{\ell} + \cancel{\frac{B_{\ell}}{r^{\ell+1}}} \right) P_{\ell}(\cos \theta)$$

$$V(R, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_{\ell} R^{\ell} P_{\ell}(\cos \theta) \quad \text{경계조건}$$

직교 조건: $\int_{-1}^1 P_{\ell}(x) P_{\ell'}(x) dx = \int_0^{\pi} P_{\ell}(\cos \theta) P_{\ell'}(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \delta_{\ell\ell'} \frac{2}{2\ell + 1}$

$$A_{\ell} = \frac{2\ell + 1}{2R^{\ell}} \int_0^{\pi} V(R, \theta) P_{\ell}(\cos \theta) \sin \theta d\theta$$

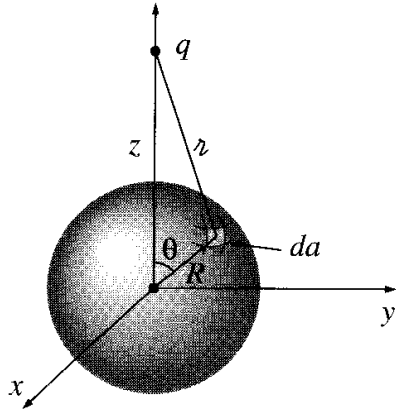
예2: $V(R, \theta)$ 가 주어진 반지름 R 의 구각



공 **외부**의 전위는 $r = \infty$ 에서 유한한 값을 가져야 합니다.

$$V(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\cancel{A_{\ell} r^{\ell}} + \frac{B_{\ell}}{r^{\ell+1}} \right) P_{\ell}(\cos \theta)$$

예2: $V(R, \theta)$ 가 주어진 반지름 R 의 구각

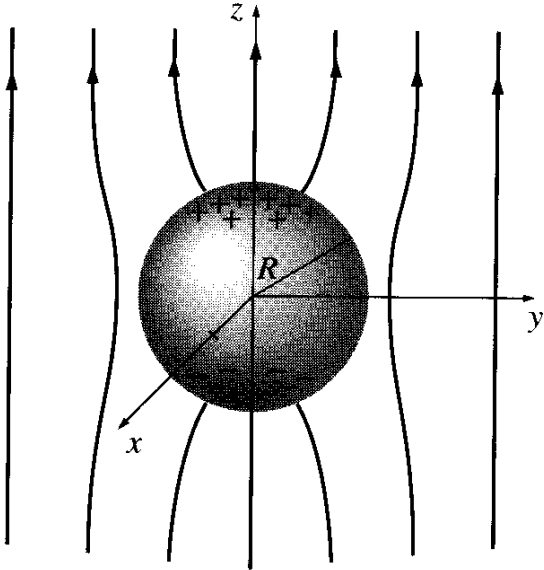


공 **외부**의 전위는 $r = \infty$ 에서 유한한 값을 가져야 합니다.

$$V(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\cancel{A_{\ell} r^{\ell}} + \frac{B_{\ell}}{r^{\ell+1}} \right) P_{\ell}(\cos \theta)$$

$$B_{\ell} = \frac{2\ell + 1}{2} R^{\ell+1} \int_0^{\pi} V(R, \theta) P_{\ell}(\cos \theta) \sin \theta d\theta$$

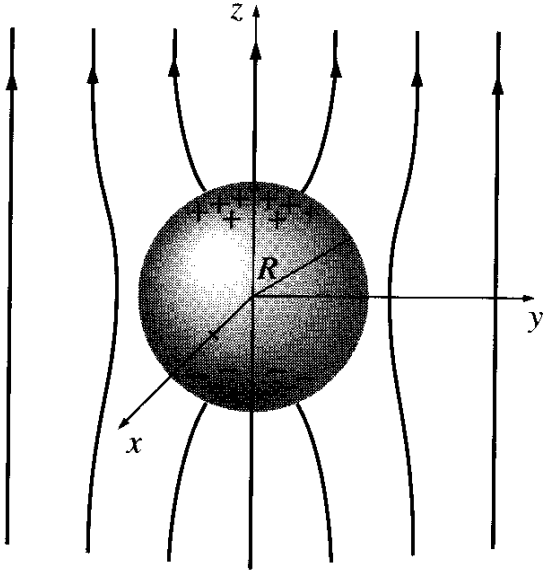
예3: 균일한 외부 전기장과 도체구



외부 전기장이 $\vec{E} = E_0 \hat{z}$ 로 주어져 있다고 합시다.

그러나 이 때, 도체의 유도전하에 의해 도체 부근에서는 전기장과 전위에 왜곡이 생기게 됩니다.

예3: 균일한 외부 전기장과 도체구

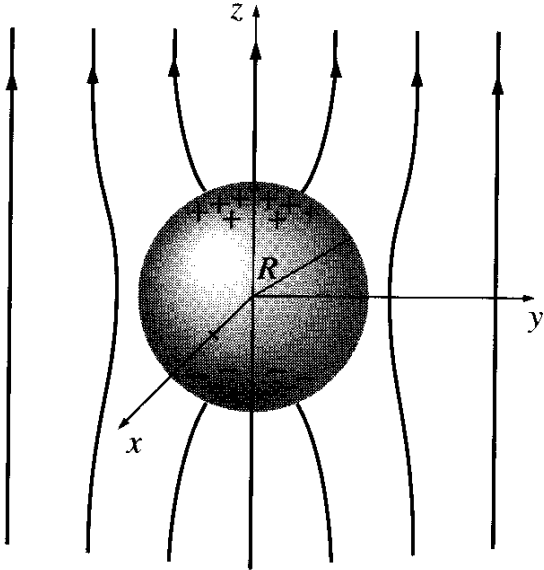


외부 전기장이 $\vec{E} = E_0 \hat{z}$ 로 주어져 있다고 합시다.

그러나 이 때, 도체의 유도전하에 의해 도체 부근에서는 전기장과 전위에 왜곡이 생기게 됩니다.

$$r = R \quad \rightarrow \quad V = 0$$

예3: 균일한 외부 전기장과 도체구



외부 전기장이 $\vec{E} = E_0 \hat{z}$ 로 주어져 있다고 합시다.

그러나 이 때, 도체의 유도전하에 의해 도체 부근에서는 전기장과 전위에 왜곡이 생기게 됩니다.

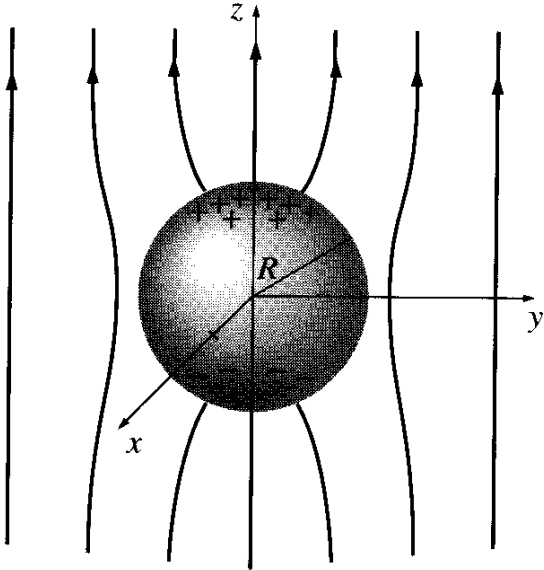
$$r = R \quad \rightarrow \quad V = 0$$

$$r = \infty \quad \rightarrow \quad V = -E_0 z + \underline{\text{const}}$$

$z = 0$ 에서 0이 되어야 함

$$= -E_0 r \cos \theta$$

예3: 균일한 외부 전기장과 도체구



외부 전기장이 $\vec{E} = E_0 \hat{z}$ 로 주어져 있다고 합시다.

그러나 이 때, 도체의 유도전하에 의해 도체 부근에서는 전기장과 전위에 왜곡이 생기게 됩니다.

$$r = R \quad \rightarrow \quad V = 0$$

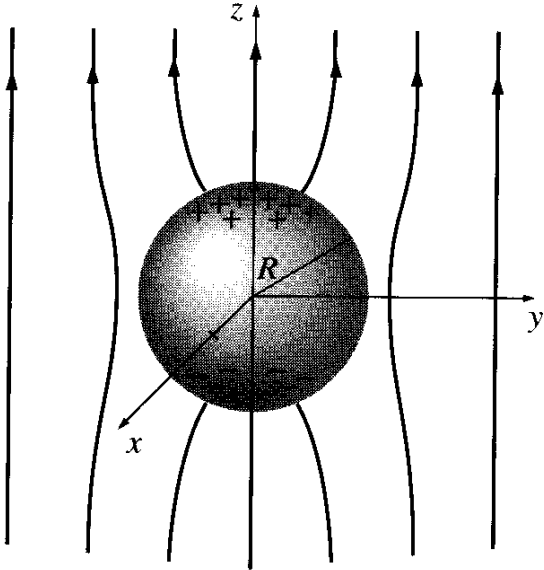
$$r = \infty \quad \rightarrow \quad V = -E_0 z + \text{const}$$

$z = 0$ 에서 0이 되어야 함

$$= -E_0 r \cos \theta$$

$$V(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(A_{\ell} r^{\ell} + \frac{B_{\ell}}{r^{\ell+1}} \right) P_{\ell}(\cos \theta)$$

예3: 균일한 외부 전기장과 도체구



외부 전기장이 $\vec{E} = E_0 \hat{z}$ 로 주어져 있다고 합시다.

그러나 이 때, 도체의 유도전하에 의해 도체 부근에서는 전기장과 전위에 왜곡이 생기게 됩니다.

$$r = R \quad \rightarrow \quad V = 0$$

$$r = \infty \quad \rightarrow \quad V = -E_0 z + \text{const}$$

$z = 0$ 에서 0이 되어야 함

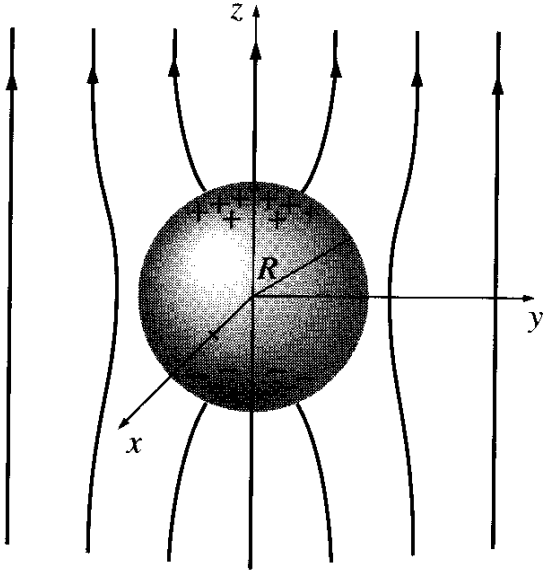
$$= -E_0 r \cos \theta$$

$$V(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(A_{\ell} r^{\ell} + \frac{B_{\ell}}{r^{\ell+1}} \right) P_{\ell}(\cos \theta)$$

$r = R$ 에서 $V = 0$ 이라는 조건에 의해 계수 사이에 다음과 같은 관계가 생깁니다.

$$A_{\ell} R^{\ell} + \frac{B_{\ell}}{R^{\ell+1}} = 0 \quad \rightarrow \quad B_{\ell} = -A_{\ell} R^{2\ell+1}$$

예3: 균일한 외부 전기장과 도체구



외부 전기장이 $\vec{E} = E_0 \hat{z}$ 로 주어져 있다고 합시다.

그러나 이 때, 도체의 유도전하에 의해 도체 부근에서는 전기장과 전위에 왜곡이 생기게 됩니다.

$$r = R \quad \rightarrow \quad V = 0$$

$$r = \infty \quad \rightarrow \quad V = -E_0 z + \text{const}$$

$z = 0$ 에서 0이 되어야 함

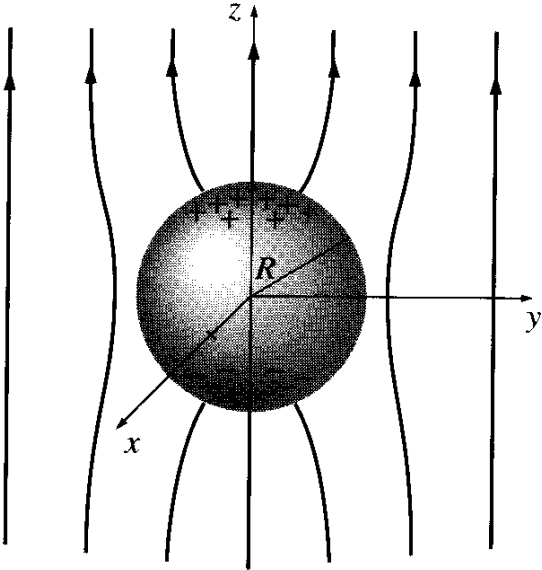
$$= -E_0 r \cos \theta$$

$$V(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(A_{\ell} r^{\ell} + \frac{B_{\ell}}{r^{\ell+1}} \right) P_{\ell}(\cos \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_{\ell} \left(r^{\ell} - \frac{R^{2\ell+1}}{r^{\ell+1}} \right) P_{\ell}(\cos \theta)$$

$r = R$ 에서 $V = 0$ 이라는 조건에 의해 계수 사이에 다음과 같은 관계가 생깁니다.

$$A_{\ell} R^{\ell} + \frac{B_{\ell}}{R^{\ell+1}} = 0 \quad \rightarrow \quad B_{\ell} = -A_{\ell} R^{2\ell+1}$$

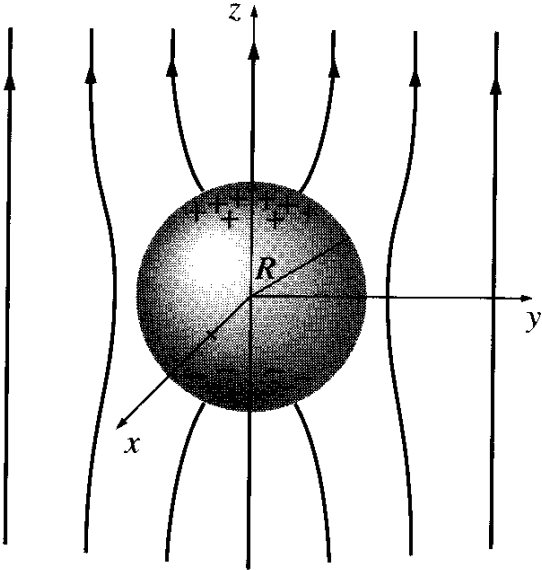
예3: 균일한 외부 전기장과 도체구



$$V(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_{\ell} \left(r^{\ell} - \frac{R^{2\ell+1}}{r^{\ell+1}} \right) P_{\ell}(\cos \theta)$$

여기에 $r = \infty$ 에서의 경계조건을 적용해 봅시다.

예3: 균일한 외부 전기장과 도체구

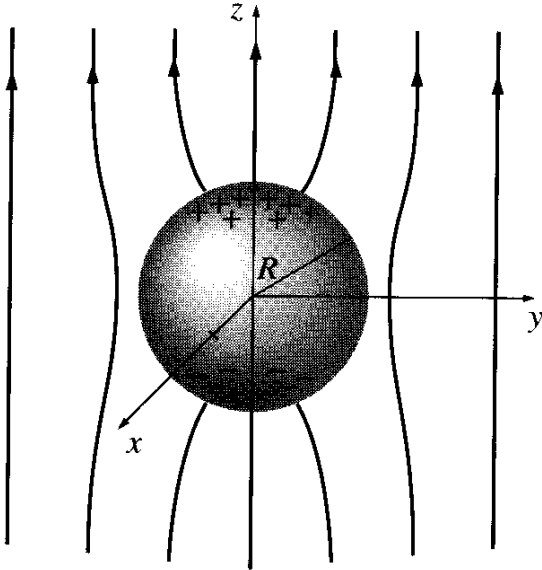


$$V(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_{\ell} \left(r^{\ell} - \frac{R^{2\ell+1}}{r^{\ell+1}} \right) P_{\ell}(\cos \theta)$$

여기에 $r = \infty$ 에서의 **경계조건**을 적용해 봅시다.

$$V(r, \theta) \simeq \sum_{\ell=0}^{\infty} A_{\ell} r^{\ell} P_{\ell}(\cos \theta) = -E_0 r \cos \theta$$

예3: 균일한 외부 전기장과 도체구



$$V(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_{\ell} \left(r^{\ell} - \frac{R^{2\ell+1}}{r^{\ell+1}} \right) P_{\ell}(\cos \theta)$$

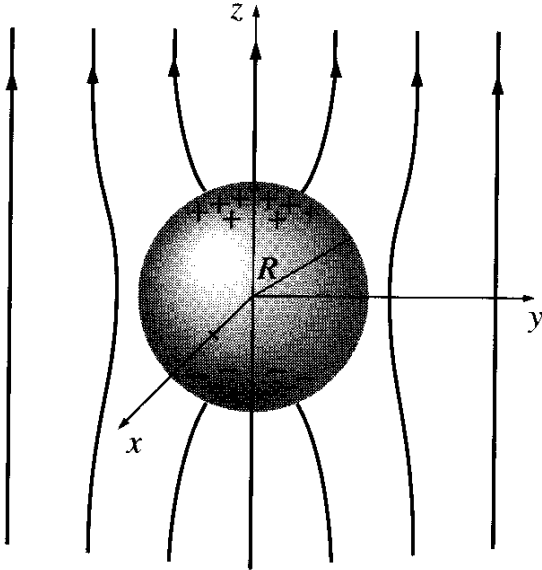
여기에 $r = \infty$ 에서의 **경계조건**을 적용해 봅시다.

$$V(r, \theta) \simeq \sum_{\ell=0}^{\infty} A_{\ell} r^{\ell} P_{\ell}(\cos \theta) = -E_0 r \cos \theta$$

따라서 $\ell = 1$ 인 경우만 허용되게 됩니다.

$$A_1 r = -E_0 r$$

예3: 균일한 외부 전기장과 도체구



$$V(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_{\ell} \left(r^{\ell} - \frac{R^{2\ell+1}}{r^{\ell+1}} \right) P_{\ell}(\cos \theta)$$

여기에 $r = \infty$ 에서의 **경계조건**을 적용해 봅시다.

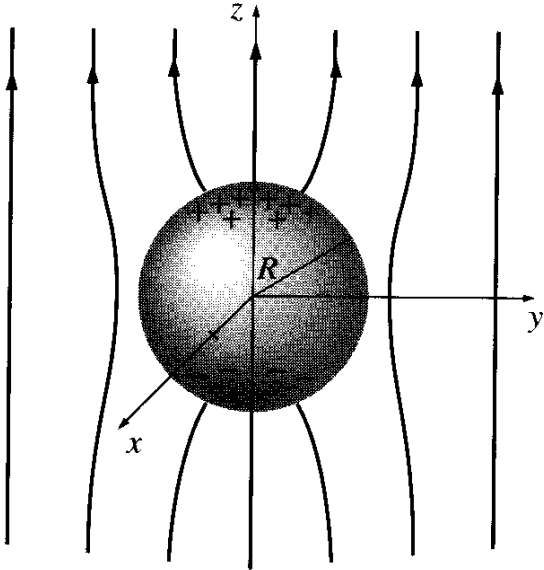
$$V(r, \theta) \simeq \sum_{\ell=0}^{\infty} A_{\ell} r^{\ell} P_{\ell}(\cos \theta) = -E_0 r \cos \theta$$

따라서 $\ell = 1$ 인 경우만 허용되게 됩니다.

$$A_1 r = -E_0 r$$

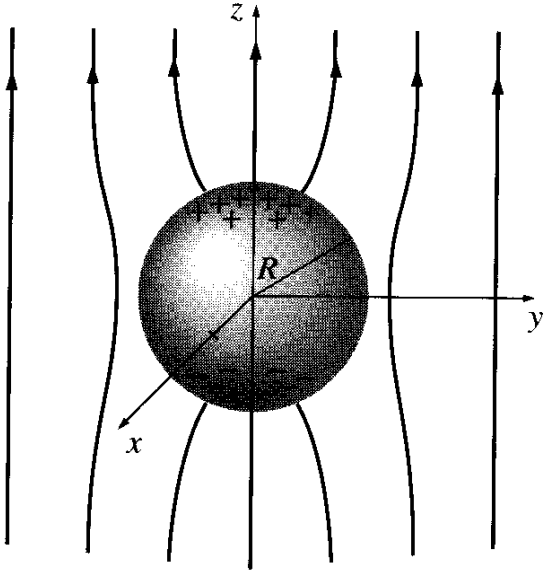
$$\therefore V(r, \theta) = -E_0 \left(r - \frac{R^3}{r^2} \right) \cos \theta$$

예3: 균일한 외부 전기장과 도체구



마지막으로 유도전하를 구해 봅시다.

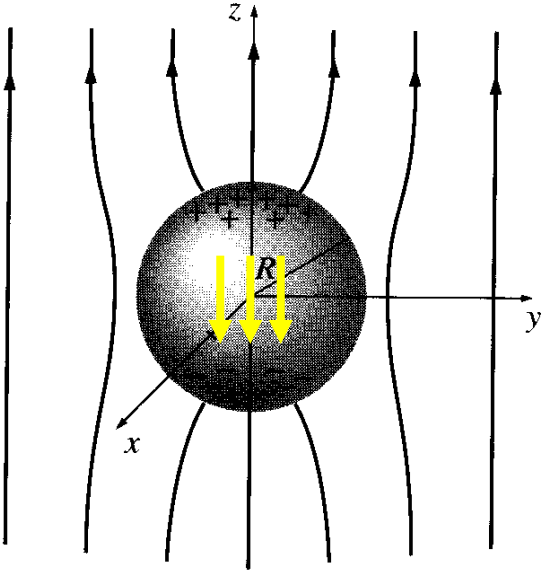
예3: 균일한 외부 전기장과 도체구



마지막으로 유도전하를 구해 봅시다.

$$\begin{aligned}\sigma(\theta) &= -\epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial r} \Big|_{r=R} = \epsilon_0 E_0 \left(1 + 2 \frac{R^3}{r^3} \right) \Big|_{r=R} \cos \theta \\ &= 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta\end{aligned}$$

예3: 균일한 외부 전기장과 도체구

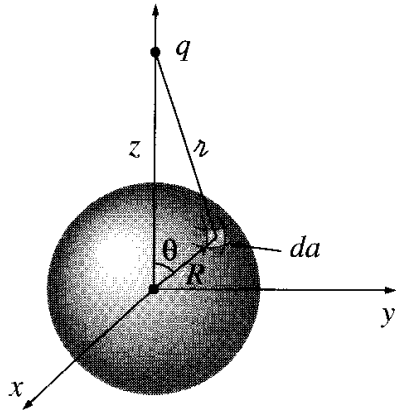


마지막으로 유도전하를 구해 봅시다.

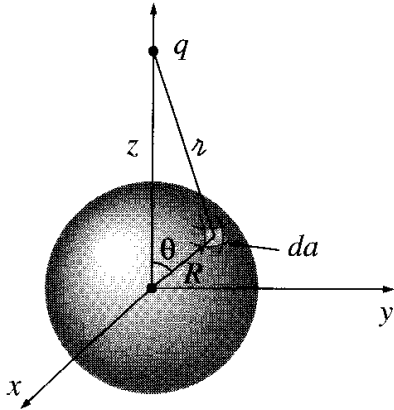
$$\begin{aligned}\sigma(\theta) &= -\epsilon_0 \left. \frac{\partial V}{\partial r} \right|_{r=R} = \epsilon_0 E_0 \left(1 + 2 \frac{R^3}{r^3} \right) \bigg|_{r=R} \cos \theta \\ &= 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta\end{aligned}$$

도체 내부에서는 외부 전기장을 상쇄시켜야 하므로
도체 구의 윗 부분에는 양전하,
아랫 부분에는 음전하가 유도됩니다.

예4: $\sigma(\theta)$ 가 주어진 반지름 R 의 구각



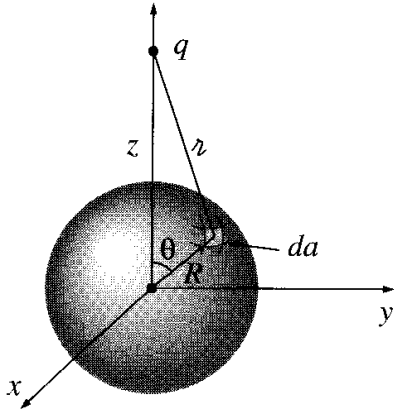
예4: $\sigma(\theta)$ 가 주어진 반지름 R 의 구각



공 내부:
$$V(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_{\ell} r^{\ell} P_{\ell}(\cos \theta)$$

공 외부:
$$V(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{B_{\ell}}{r^{\ell+1}} P_{\ell}(\cos \theta)$$

예4: $\sigma(\theta)$ 가 주어진 반지름 R 의 구각



공 내부:
$$V(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_{\ell} r^{\ell} P_{\ell}(\cos \theta)$$

공 외부:
$$V(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{B_{\ell}}{r^{\ell+1}} P_{\ell}(\cos \theta)$$

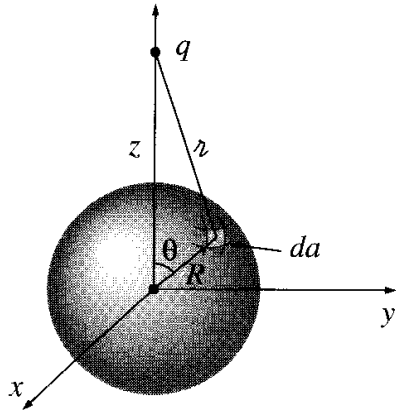
$r = R$ 에서 (1) V 는 연속이어야 하고

(2) $\frac{\partial V}{\partial r}$ 은 불연속인 만큼 표면전하가 보상해 주어야 합니다.

$$(1) \quad B_{\ell} = A_{\ell} R^{2\ell+1}$$

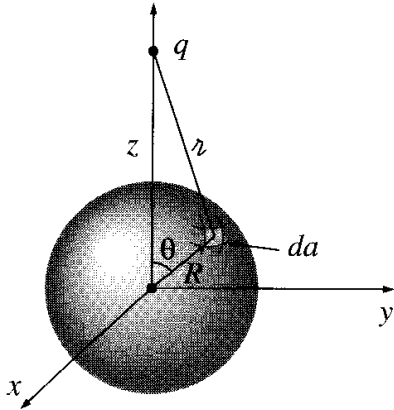
$$(2) \quad \left. \frac{\partial V_+}{\partial r} \right|_{r=R} - \left. \frac{\partial V_-}{\partial r} \right|_{r=R} = -\frac{\sigma_0(\theta)}{\epsilon_0}$$

예4: $\sigma(\theta)$ 가 주어진 반지름 R 의 구각



$$\left. \frac{\partial V_+}{\partial r} \right|_{r=R} - \left. \frac{\partial V_-}{\partial r} \right|_{r=R} = -\frac{\sigma_0(\theta)}{\epsilon_0}$$

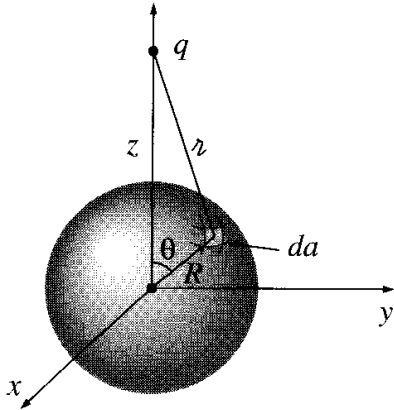
예4: $\sigma(\theta)$ 가 주어진 반지름 R 의 구각



$$\left. \frac{\partial V_+}{\partial r} \right|_{r=R} - \left. \frac{\partial V_-}{\partial r} \right|_{r=R} = -\frac{\sigma_0(\theta)}{\epsilon_0}$$

$$= -\sum_{\ell=0}^{\infty} (\ell + 1) \frac{B_{\ell}}{R^{\ell+2}} P_{\ell}(\cos \theta) - \sum_{\ell=0}^{\infty} \ell A_{\ell} R^{\ell-1} P_{\ell}(\cos \theta)$$

예4: $\sigma(\theta)$ 가 주어진 반지름 R 의 구각



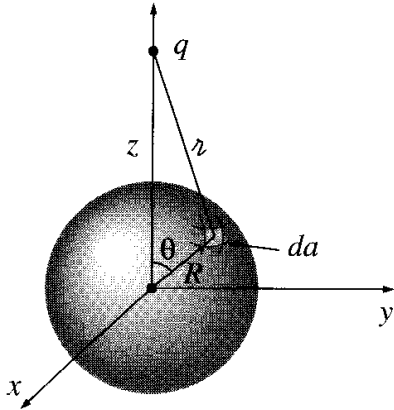
$$\left. \frac{\partial V_+}{\partial r} \right|_{r=R} - \left. \frac{\partial V_-}{\partial r} \right|_{r=R} = -\frac{\sigma_0(\theta)}{\epsilon_0}$$

$$= -\sum_{\ell=0}^{\infty} (\ell + 1) \frac{B_{\ell}}{R^{\ell+2}} P_{\ell}(\cos \theta) - \sum_{\ell=0}^{\infty} \ell A_{\ell} R^{\ell-1} P_{\ell}(\cos \theta)$$

$$= -\sum_{\ell=0}^{\infty} (\ell + 1) \frac{A_{\ell} R^{2\ell+1}}{R^{\ell+2}} P_{\ell}(\cos \theta) - \sum_{\ell=0}^{\infty} \ell A_{\ell} R^{\ell-1} P_{\ell}(\cos \theta)$$

$B_{\ell} = A_{\ell} R^{2\ell+1}$

예4: $\sigma(\theta)$ 가 주어진 반지름 R 의 구각



$$\left. \frac{\partial V_+}{\partial r} \right|_{r=R} - \left. \frac{\partial V_-}{\partial r} \right|_{r=R} = -\frac{\sigma_0(\theta)}{\epsilon_0}$$

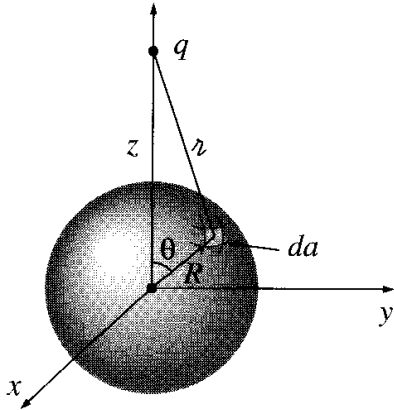
$$= -\sum_{\ell=0}^{\infty} (\ell + 1) \frac{B_{\ell}}{R^{\ell+2}} P_{\ell}(\cos \theta) - \sum_{\ell=0}^{\infty} \ell A_{\ell} R^{\ell-1} P_{\ell}(\cos \theta)$$

$$= -\sum_{\ell=0}^{\infty} (\ell + 1) \frac{A_{\ell} R^{2\ell+1}}{R^{\ell+2}} P_{\ell}(\cos \theta) - \sum_{\ell=0}^{\infty} \ell A_{\ell} R^{\ell-1} P_{\ell}(\cos \theta)$$

$B_{\ell} = A_{\ell} R^{2\ell+1}$

$$= -\sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) A_{\ell} R^{\ell-1} P_{\ell}(\cos \theta)$$

예4: $\sigma(\theta)$ 가 주어진 반지름 R 의 구각



$$\left. \frac{\partial V_+}{\partial r} \right|_{r=R} - \left. \frac{\partial V_-}{\partial r} \right|_{r=R} = -\frac{\sigma_0(\theta)}{\epsilon_0}$$

$$= -\sum_{\ell=0}^{\infty} (\ell + 1) \frac{B_{\ell}}{R^{\ell+2}} P_{\ell}(\cos \theta) - \sum_{\ell=0}^{\infty} \ell A_{\ell} R^{\ell-1} P_{\ell}(\cos \theta)$$

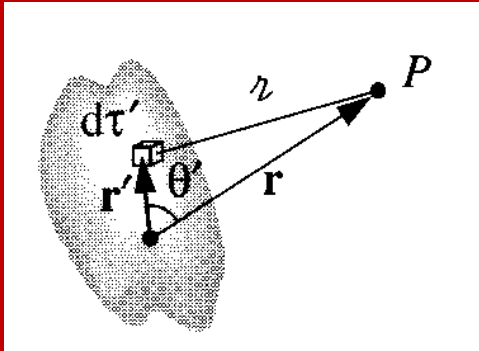
$$= -\sum_{\ell=0}^{\infty} (\ell + 1) \frac{\overset{B_{\ell} = A_{\ell} R^{2\ell+1}}{A_{\ell} R^{2\ell+1}}}{R^{\ell+2}} P_{\ell}(\cos \theta) - \sum_{\ell=0}^{\infty} \ell A_{\ell} R^{\ell-1} P_{\ell}(\cos \theta)$$

$$= -\sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) A_{\ell} R^{\ell-1} P_{\ell}(\cos \theta)$$

$$\therefore A_{\ell} = \frac{1}{2\epsilon_0 R^{\ell-1}} \int_0^{\pi} \sigma_0(\theta) P_{\ell}(\cos \theta) \sin \theta d\theta$$

마지막으로 전위를 먼 거리에서
전개해 봅시다.

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

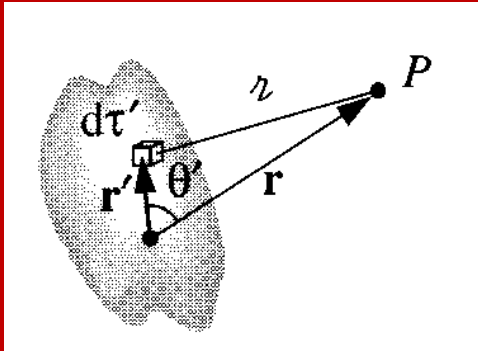


$$|\vec{r} - \vec{r}'|^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta'$$

$$= r^2 \left(1 + \left(\frac{r'}{r} \right)^2 - 2 \frac{r'}{r} \cos \theta' \right)$$

전위의 원천 적분에서 분모를 위와 같이 전개할 수 있습니다.
이 전개는 $r \gg r'$, 즉 원천의 분포에서 멀리 떨어진 곳에서 볼 때
아주 좋은 근사가 됩니다.

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$



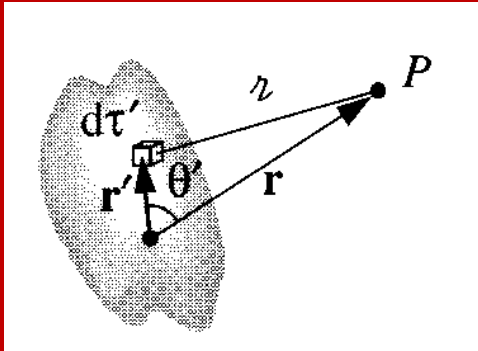
$$|\vec{r} - \vec{r}'|^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta'$$

$$= r^2 \left(1 + \left(\frac{r'}{r} \right)^2 - 2 \frac{r'}{r} \cos \theta' \right)$$

$$\equiv \epsilon$$

전위의 원천 적분에서 분모를 위와 같이 전개할 수 있습니다.
이 전개는 $r \gg r'$, 즉 원천의 분포에서 멀리 떨어진 곳에서 볼 때
아주 좋은 근사가 됩니다.

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$



$$|\vec{r} - \vec{r}'|^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta'$$

$$= r^2 \left(1 + \underbrace{\left(\frac{r'}{r} \right)^2 - 2 \frac{r'}{r} \cos \theta'}_{\equiv \epsilon} \right)$$

$$\equiv \epsilon$$

$$= r^2(1 + \epsilon)$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \simeq \frac{1}{r} \left(1 - \frac{\epsilon}{2} + \frac{3}{8}\epsilon^2 + \dots \right)$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \simeq \frac{1}{r} \left(1 - \frac{\epsilon}{2} + \frac{3}{8} \epsilon^2 + \dots \right)$$

$$= \frac{1}{r} \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r'}{r} \right) \left(\frac{r'}{r} - 2 \cos \theta' \right) + \frac{3}{8} \left(\frac{r'}{r} \right)^2 \left(\frac{r'}{r} - 2 \cos \theta' \right)^2 + \dots \right)$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} &\simeq \frac{1}{r} \left(1 - \frac{\epsilon}{2} + \frac{3}{8}\epsilon^2 + \dots \right) \\ &= \frac{1}{r} \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r'}{r} \right) \left(\frac{r'}{r} - 2 \cos \theta' \right) + \frac{3}{8} \left(\frac{r'}{r} \right)^2 \left(\frac{r'}{r} - 2 \cos \theta' \right)^2 + \dots \right) \\ &= \frac{1}{r} \left(1 + \left(\frac{r'}{r} \right) \cos \theta' + \left(\frac{r'}{r} \right)^2 \left(\frac{3 \cos^2 \theta' - 1}{2} \right) + \dots \right) \end{aligned}$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} &\simeq \frac{1}{r} \left(1 - \frac{\epsilon}{2} + \frac{3}{8}\epsilon^2 + \dots \right) \\ &= \frac{1}{r} \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r'}{r} \right) \left(\frac{r'}{r} - 2 \cos \theta' \right) + \frac{3}{8} \left(\frac{r'}{r} \right)^2 \left(\frac{r'}{r} - 2 \cos \theta' \right)^2 + \dots \right) \\ &= \frac{1}{r} \left(1 + \left(\frac{r'}{r} \right) \cos \theta' + \left(\frac{r'}{r} \right)^2 \left(\frac{3 \cos^2 \theta' - 1}{2} \right) + \dots \right) \\ &= \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r} \right)^n P_n(\cos \theta') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \int (r')^n P_n(\cos \theta') \rho(\vec{r}') dV' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \int (r')^n P_n(\cos \theta') \rho(\vec{r}') dV' \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} \int \rho(\vec{r}') d^3r' + \frac{1}{r^2} \int r' \cos \theta' \rho(\vec{r}') d^3r' + \dots \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \int (r')^n P_n(\cos \theta') \rho(\vec{r}') dV' \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\underbrace{\frac{1}{r} \int \rho(\vec{r}') d^3 r'}_{\text{홀극} \sim \frac{1}{r}} + \underbrace{\frac{1}{r^2} \int r' \cos \theta' \rho(\vec{r}') d^3 r'}_{\text{쌍극자} \sim \frac{1}{r^2}} + \dots \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \int (r')^n P_n(\cos \theta') \rho(\vec{r}') dV' \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\underbrace{\frac{1}{r} \int \rho(\vec{r}') d^3r'}_{\text{홀극} \sim \frac{1}{r}} + \underbrace{\frac{1}{r^2} \int r' \cos \theta' \rho(\vec{r}') d^3r'}_{\text{쌍극자} \sim \frac{1}{r^2}} + \dots \right]
 \end{aligned}$$

$$V_m = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$$

좌표의 중심과 전하의 위치가 일치하는 경우에만
정확한 기술이 되고, 그 이외에는 근사적인 기술이 됩니다.

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \int (r')^n P_n(\cos \theta') \rho(\vec{r}') dV'$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\underbrace{\frac{1}{r} \int \rho(\vec{r}') d^3 r'}_{\text{홀극} \sim \frac{1}{r}} + \underbrace{\frac{1}{r^2} \int r' \cos \theta' \rho(\vec{r}') d^3 r'}_{\text{쌍극자} \sim \frac{1}{r^2}} + \dots \right]$$

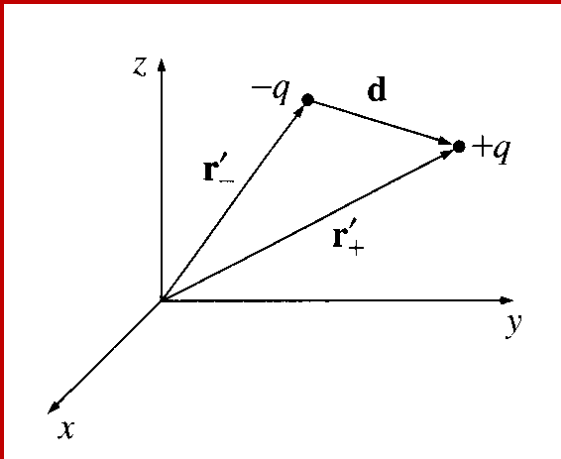
$$V_m = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$$

$$V_d = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{r} \cdot \int \vec{r}' \rho(\vec{r}') d^3 r'$$

$$\equiv \vec{p}$$

전기쌍극자모멘트

$$V_d(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{r^2}$$



$$\vec{p} = q\vec{d}$$

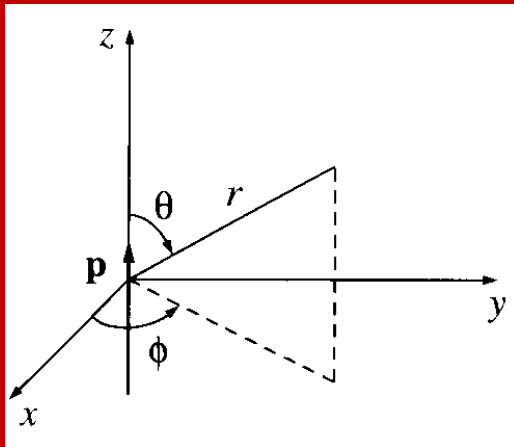
두 입자의 경우

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^n q_i \vec{r}'_i$$

여러 입자의 경우

전하의 총 합이 0인 경우, 전기쌍극자모멘트는
좌표의 중심에 무관한 값이 됩니다.
 따라서 쌍극자는 거시적인 전하의 합이 0인 경우에
 물리적인 효력을 발휘할 것입니다.

$$V_d(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2}$$



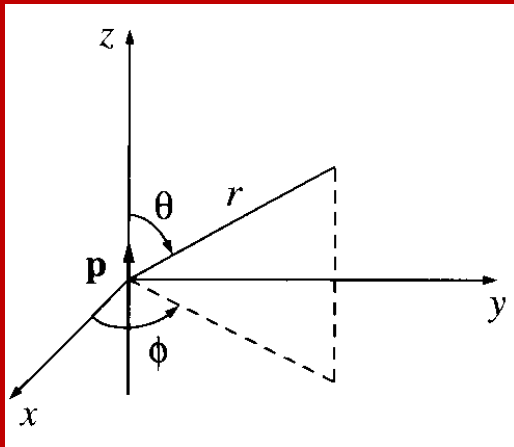
$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p \cos \theta}{r^3}$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin \theta}{r^3}$$

$$E_\phi = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0$$

전기쌍극자모멘트의 방향을 $\hat{z}$ -축과 일치시켜봅시다.
그러면 쌍극자가 만들어내는 전기장을 계산할 수 있습니다.

$$V_d(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2}$$



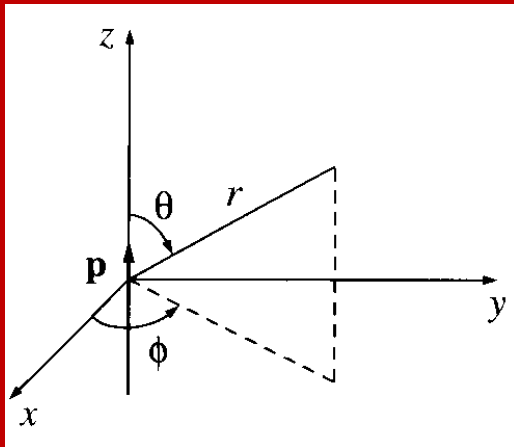
$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p \cos \theta}{r^3}$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin \theta}{r^3}$$

$$E_\phi = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0$$

$$\vec{E}_d = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3} (2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta})$$

$$V_d(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2}$$



$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p \cos \theta}{r^3}$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin \theta}{r^3}$$

$$E_\phi = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0$$

$$\vec{E}_d = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3} (2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta})$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3(\vec{p} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{p}) - \frac{1}{3\epsilon_0} \vec{p} \delta^3(\vec{r})$$

감사합니다