

제5장 정자기학

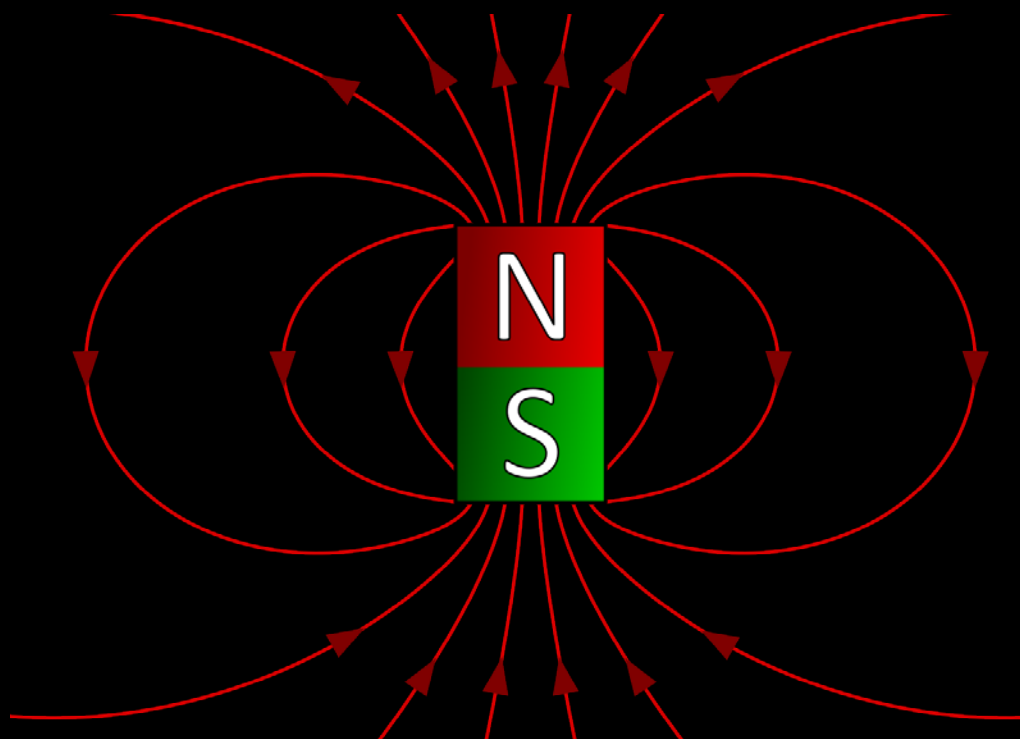
이제 우리의 관심사를 자기장으로 옮겨 봅시다.
자기장이란 대체 무엇인가요?
어떻게 우리는 자기장이란 것을 발견하게 되었을까요?



인류는 지자기terrestrial magnetism와 철을 포함한 광석에 의해
이른바 자석magnet이라는 것을 발견하게 되었습니다.

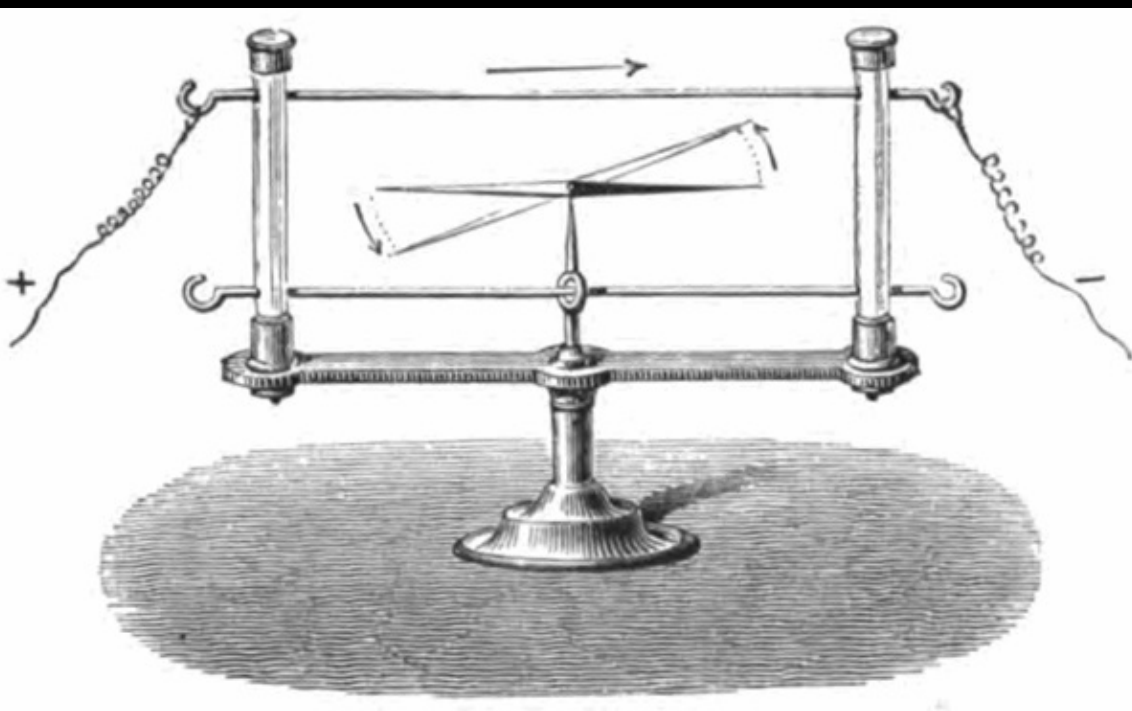


자석은 서로 밀어내거나 끌어당깁니다.
놀랍게도 지구상에서 자석은 어떤 방향을 가리키게 되는데,
이것을 사용해서 **나침반**compass이라는 것을 발명하게 됩니다.
남쪽을 향한다는 의미에서 **지남철**指南鐵이라고 부르기도 합니다.



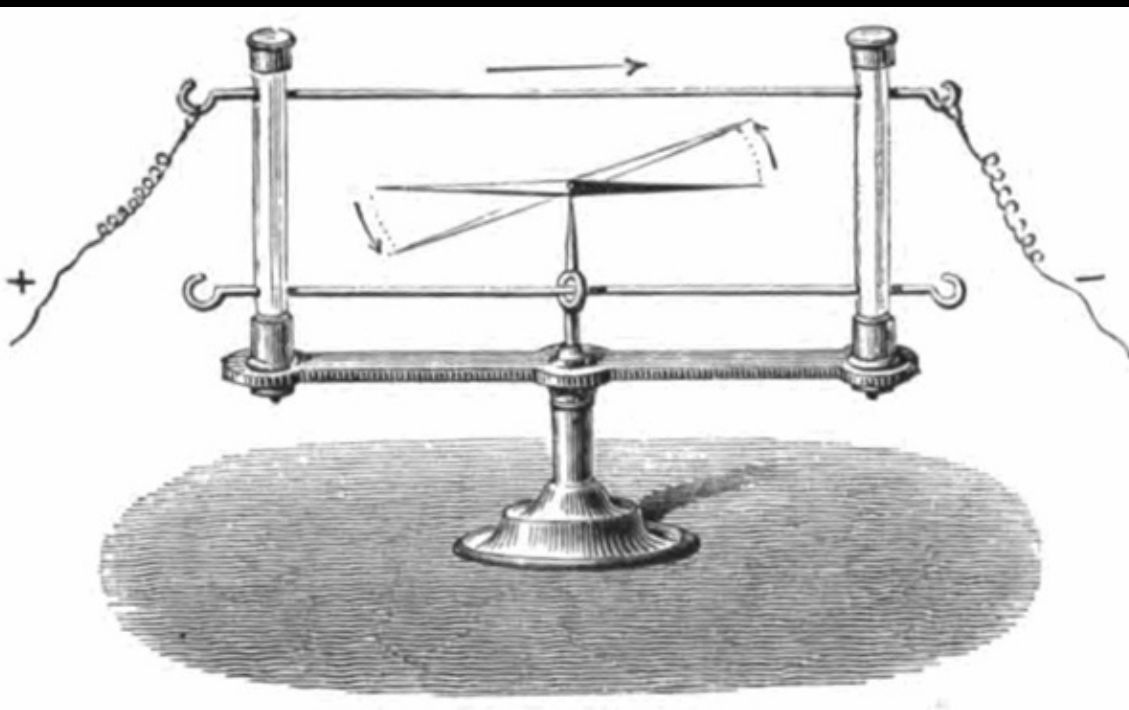
자석이 일정한 방식으로 움직인다는 것은
자석에 작용하는 특별한 힘, 즉 자기력이 존재한다는 것을
의미할 것입니다.

여기에서 자기장의 비밀을 밝혀낼 수 있는 아주 우연한 실험이
외르스테드Hans Christian Ørsted에 의해서 이루어집니다.

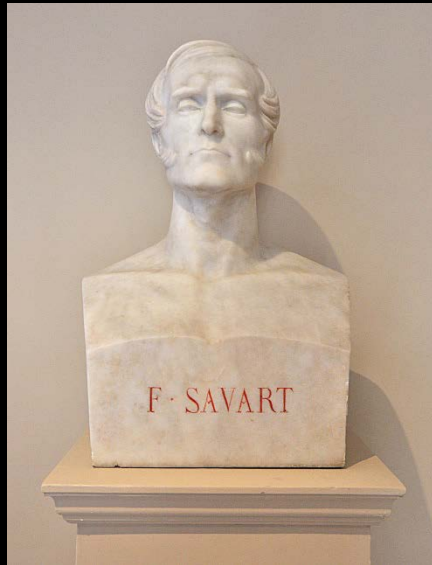


외르스테드는 1820년 4월 21일 저녁 실험 강의 도중
당황스러운 일을 겪게 됩니다.

그는 볼타전지를 사용해서 전류를 흘려 보냈는데
그 때 전선 부근의 나침반이 북쪽을 가리키지 않는 것이었습니다.

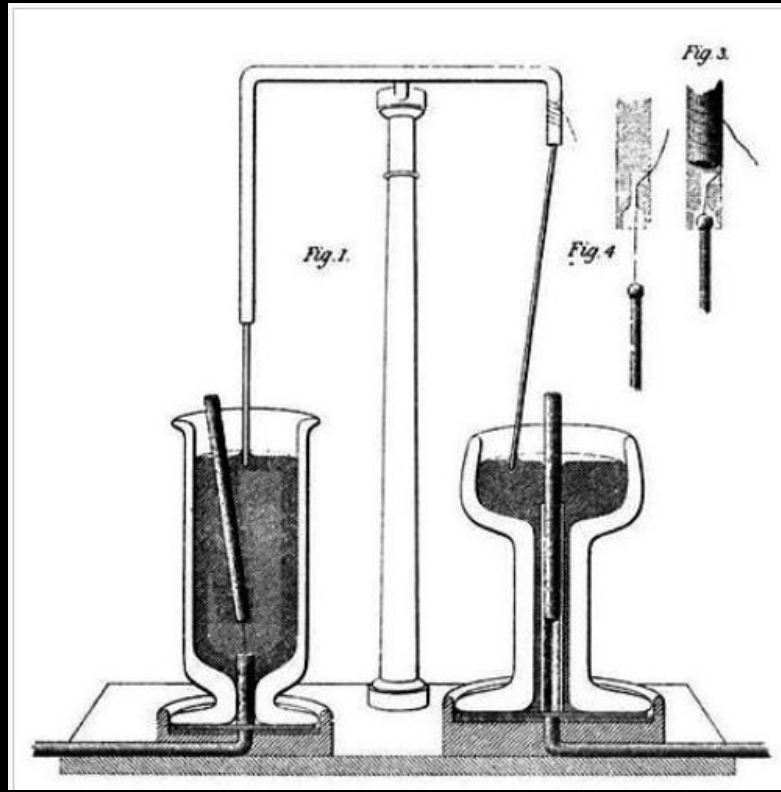
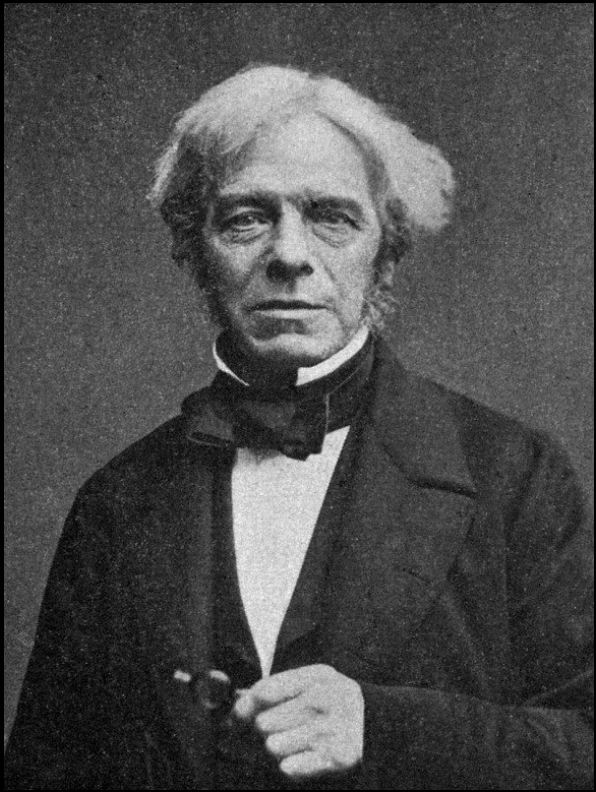


따라서 전류가 자석을 움직이게 한다,
즉 전류가 자기장을 만들어낸다는 것을 발견하게 된 것입니다.



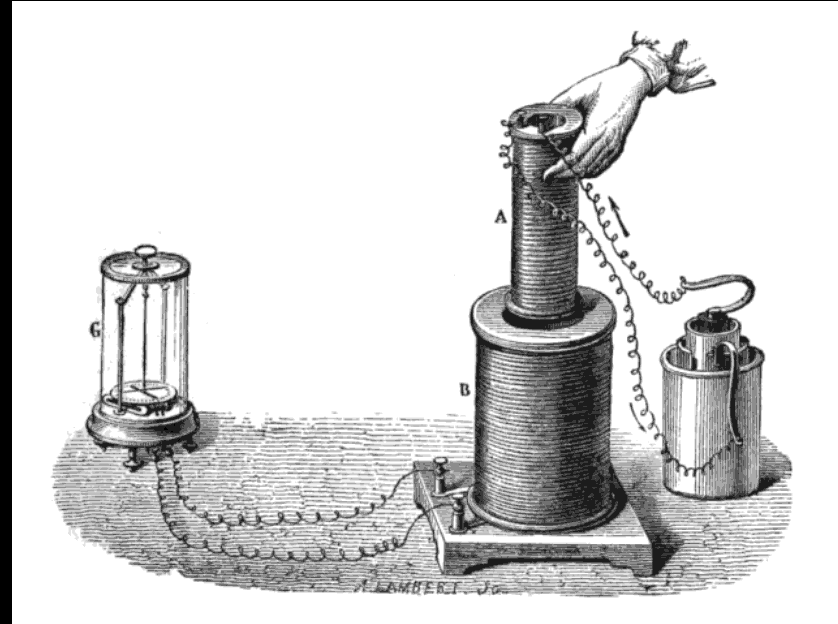
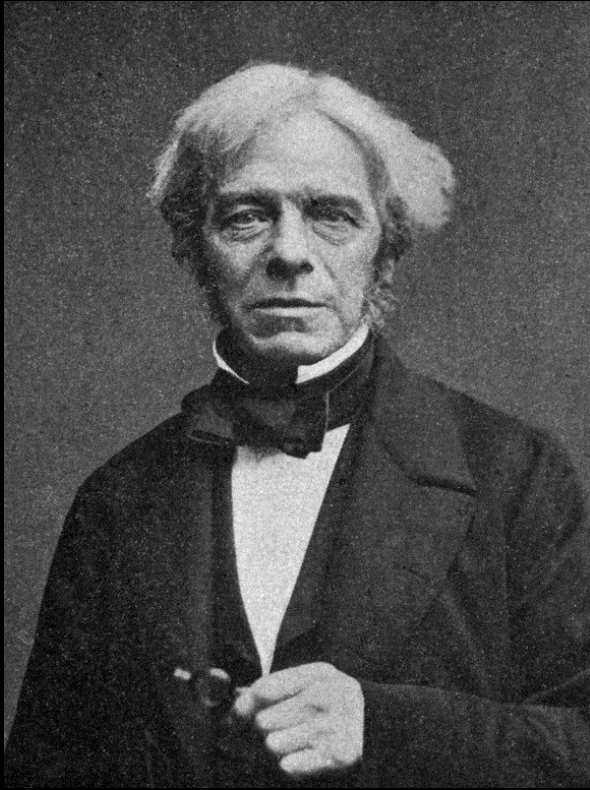
전류와 자기장의 관계에 대한 좀 더 자세한 연구는
비오Jean Baptiste Biot와 사바르Felix Savart, 그리고
앙페르Andre-Marie Ampere에 의해 이루어집니다.

여기에 덧붙여 한 가지 흥미로운 생각을 한 사람이 있었습니다.
전류가 자기장을 만들어서 자석을 움직인다고 합시다.
그러면 자석을 움직이지 못하게 고정시키면
반대로 **도선을 움직이게** 할 수도 있을까요?



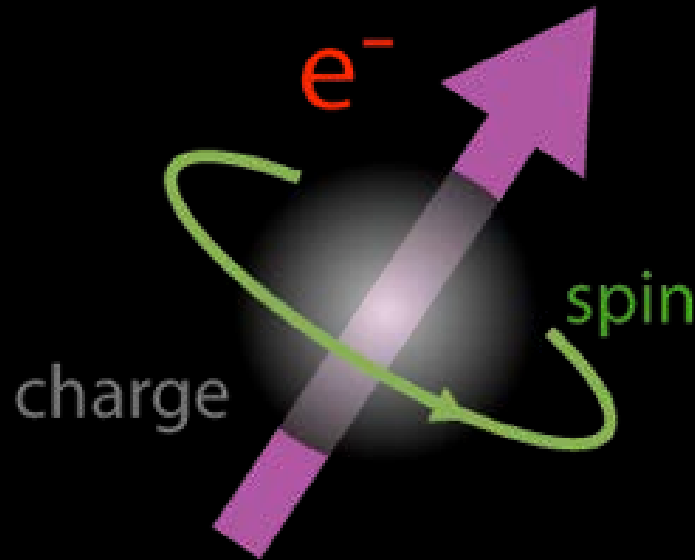
이것이 가능하다는 것을 패러데이 Michael Faraday가 처음 보여주었습니다.

오른쪽의 실험장치가 바로 전기에너지를 역학적에너지로 전환한 역사상 최초의 전동기 motor가 됩니다.

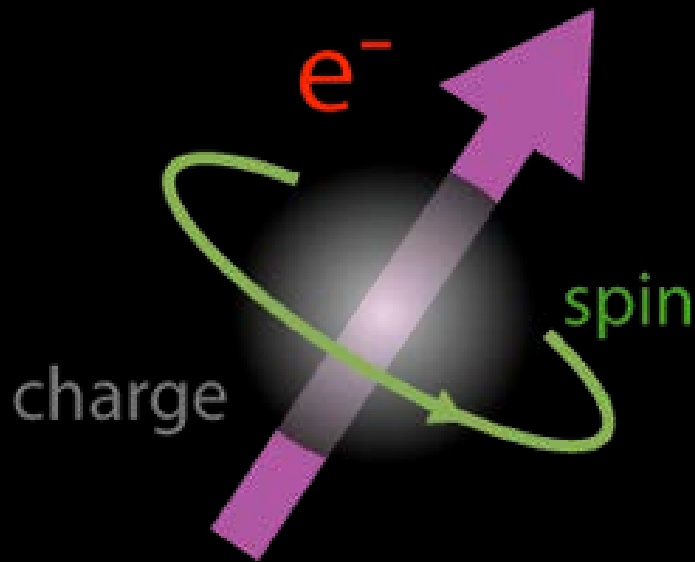


패러데이는 한 걸음 더 나아가
역학적에너지를 전기에너지로 전환할 수 있다는
이른바 **전자기 유도법칙**을 발견합니다.
여기에 대해서는 다음 학기에 더 자세히 살펴봅시다.

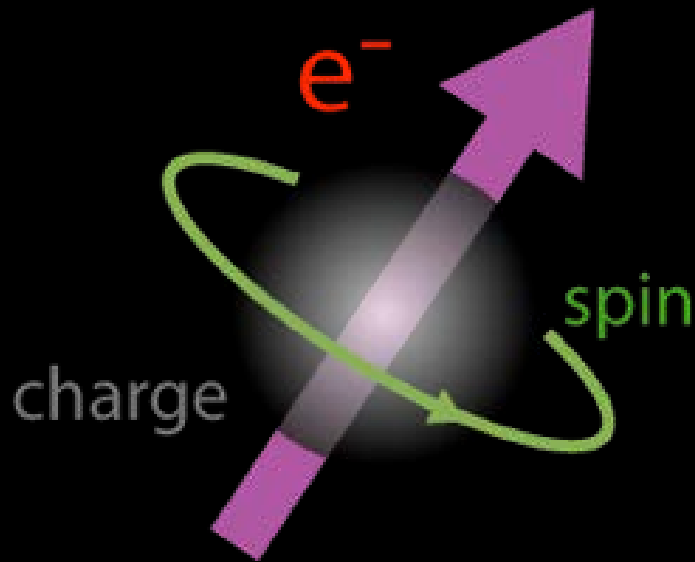
그러면 자기장의 물리적 원천은 무엇일까요?
역사적으로 우리에게 먼저 알려진 **자석**이 근본적인 원천일까요,
아니면 전하의 흐름, 즉 **전류**가 좀 더 근본적인 원천일까요?



여기에 대한 제 대답은 아마도 **둘 다 맞다**는 것입니다.
물질의 자성의 원천은 원자 수준의 작은 자석, 즉
스핀spin이기 때문입니다.



고전적인 관점에서는 스핀이란 전하가 제자리에서 회전하면서 전류를 발생시키는 것으로 생각할 수 있습니다.
따라서 이러한 전류가 자기장을 만든다고 볼 수도 있을 것입니다.



그러나 이것은 양자역학적으로 엄밀한 표현은 아닙니다.
스핀은 전자가 고유하게 가진 양자수이며
회전을 멈추거나 속도를 늦출 수 있는 것이 아니기 때문입니다.
이런 의미에서 가장 원자적인 자석이라고 할 수도 있을 것입니다.

미시적인 스핀들의 상호작용에 의해
거시적인 영역에서

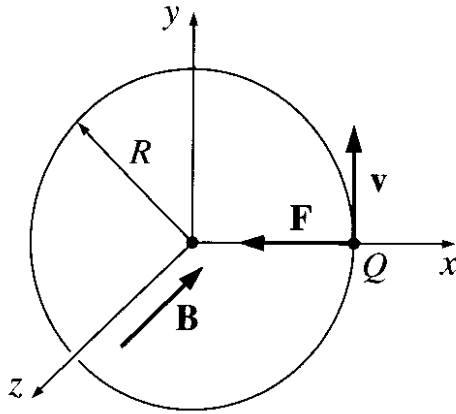
반자성diamagnetism, 상자성paramagnetism, 강자성ferromagnetism 등의
자성magnetism을 설명할 수 있게 됩니다.

이제 이 모든 이야기를 다음과 같은
경험적 힘 법칙으로부터 시작합니다.
이러한 힘의 법칙으로부터
자기장을 정의할 수 있습니다.

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

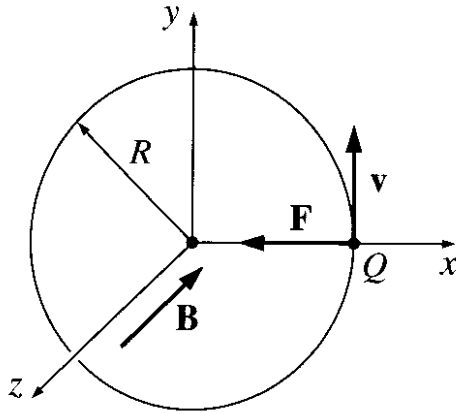
이것을 로렌츠 Lorentz 힘 법칙이라고 합니다.

예1: 사이클로트론 운동



균일한 자기장 $\vec{B} = -B\hat{z}$ 가 주어져 있고
전하 Q 인 입자가 $\hat{y}$ -방향으로 입사했다고 합시다.

예1: 사이클로트론 운동



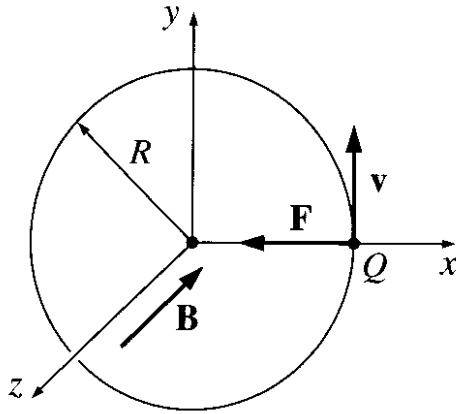
균일한 자기장 $\vec{B} = -B\hat{z}$ 가 주어져 있고
전하 Q 인 입자가 $\hat{y}$ -방향으로 입사했다고 합시다.

입자가 받는 힘은 **진행방향**과 **자기장** 모두에 대해
항상 수직이기 때문에, 결국은 **등속원운동**을 하게 됩니다.

$$QvB = m \frac{v^2}{R}$$

$$p = mv = QBR$$

예1: 사이클로트론 운동

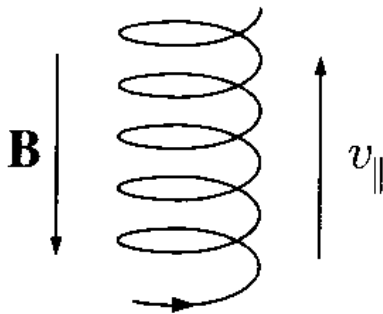


균일한 자기장 $\vec{B} = -B\hat{z}$ 가 주어져 있고
전하 Q 인 입자가 $\hat{y}$ -방향으로 입사했다고 합시다.

입자가 받는 힘은 **진행방향**과 **자기장** 모두에 대해
항상 수직이기 때문에, 결국은 **등속원운동**을 하게 됩니다.

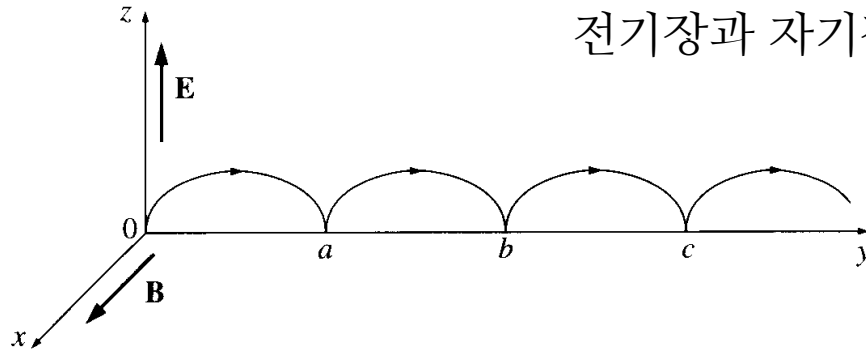
$$QvB = m \frac{v^2}{R}$$

$$p = mv = QBR$$



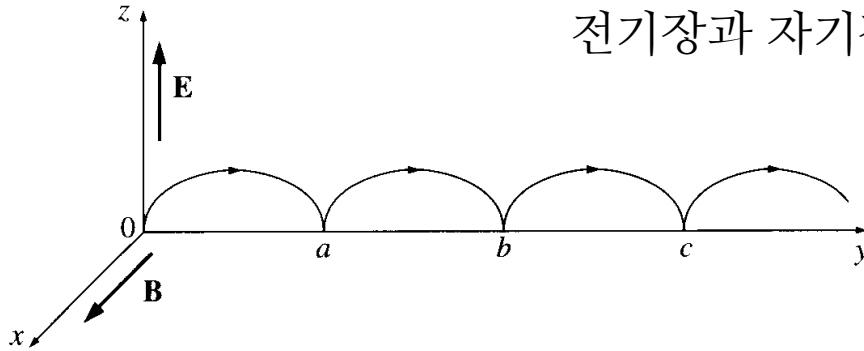
자기장과 같은 방향의 속도도 존재하면
왼쪽과 같은 **나선운동**을 하게 됩니다.

예2: 사이클로이드 운동



전기장과 자기장이 수직으로 교차하고 있다고 합시다.

예2: 사이클로이드 운동

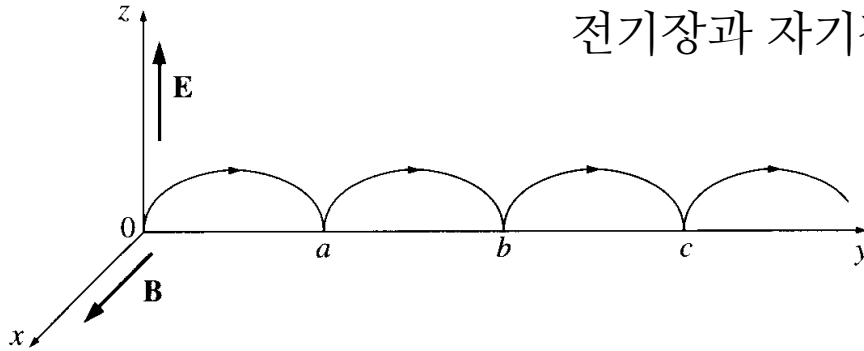


전기장과 자기장이 수직으로 교차하고 있다고 합시다.

$$\vec{v} = (0, \dot{y}, \dot{z})$$

(x 방향으로의 힘은 없기 때문에)

예2: 사이클로이드 운동



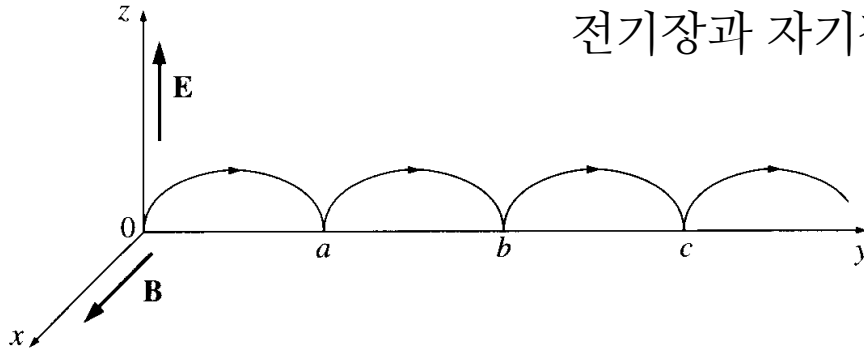
전기장과 자기장이 수직으로 교차하고 있다고 합시다.

$$\vec{v} = (0, \dot{y}, \dot{z})$$

(x 방향으로의 힘은 없기 때문에)

$$\vec{v} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & \dot{y} & \dot{z} \\ B & 0 & 0 \end{vmatrix} = B\dot{z}\hat{y} - B\dot{y}\hat{z}$$

예2: 사이클로이드 운동



전기장과 자기장이 수직으로 교차하고 있다고 합시다.

$$\vec{v} = (0, \dot{y}, \dot{z})$$

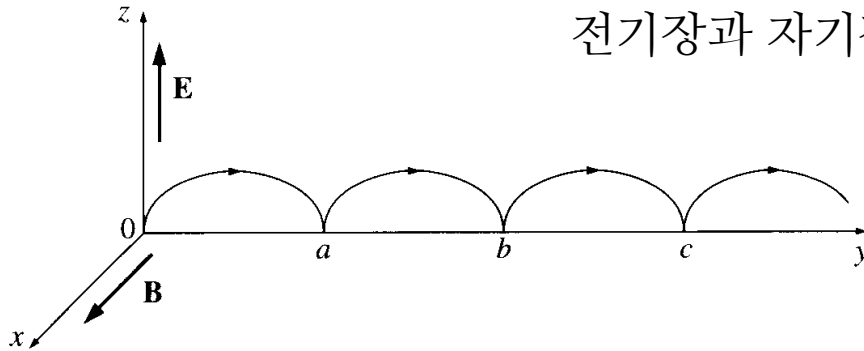
(x 방향으로의 힘은 없기 때문에)

$$\vec{v} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & \dot{y} & \dot{z} \\ B & 0 & 0 \end{vmatrix} = B\dot{z}\hat{y} - B\dot{y}\hat{z}$$

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = q(B\dot{z}\hat{y} + (E - B\dot{y})\hat{z})$$

$$= m(\ddot{y}\hat{y} + \ddot{z}\hat{z})$$

예2: 사이클로이드 운동



전기장과 자기장이 수직으로 교차하고 있다고 합시다.

$$\vec{v} = (0, \dot{y}, \dot{z})$$

(x 방향으로의 힘은 없기 때문에)

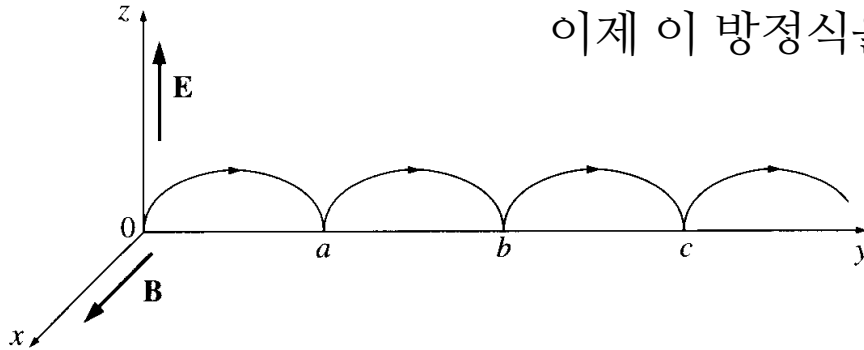
$$\vec{v} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & \dot{y} & \dot{z} \\ B & 0 & 0 \end{vmatrix} = B\dot{z}\hat{y} - B\dot{y}\hat{z}$$

$$\begin{aligned} \vec{F} &= q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = q(B\dot{z}\hat{y} + (E - B\dot{y})\hat{z}) \\ &= m(\ddot{y}\hat{y} + \ddot{z}\hat{z}) \end{aligned}$$

$$\ddot{y} = \frac{q}{m} B \dot{z} \equiv \omega \dot{z}$$

$$\ddot{z} = \frac{q}{m} (E - B\dot{y}) = \omega \left(\frac{E}{B} - \dot{y} \right)$$

예2: 사이클로이드 운동



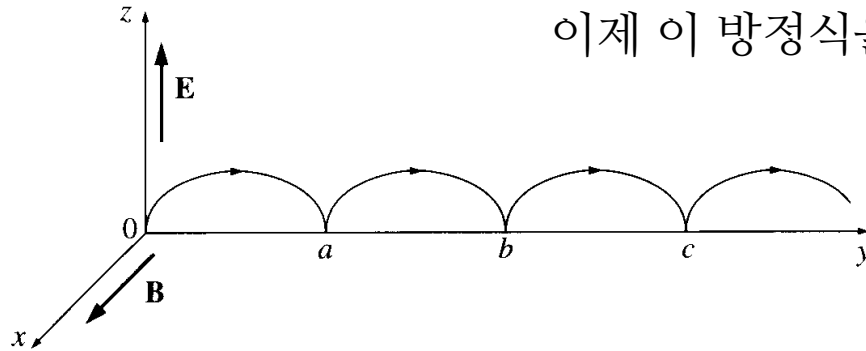
이제 이 방정식을 풀기 위해, 양변을 한 번 더 미분합시다.

$$\dot{y} = \frac{q}{m} B \dot{z} \equiv \omega \dot{z}$$

$$\ddot{z} = \frac{q}{m} (E - B \dot{y}) = \omega \left(\frac{E}{B} - \dot{y} \right)$$

$$\ddot{y} = \omega \ddot{z} = \omega^2 \left(\frac{E}{B} - \dot{y} \right)$$

예2: 사이클로이드 운동



이제 이 방정식을 풀기 위해, 양변을 한 번 더 미분합시다.

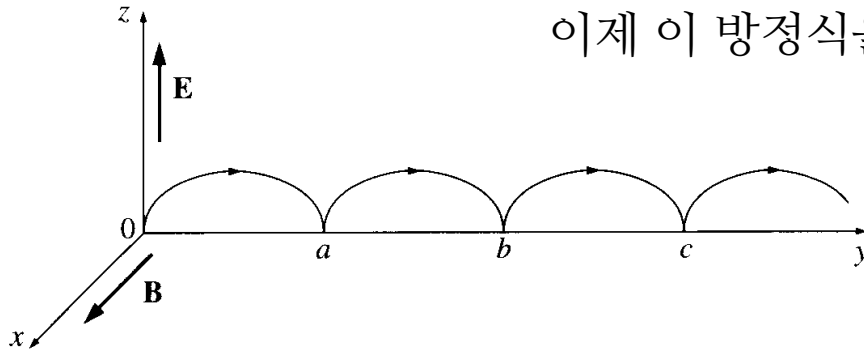
$$\ddot{y} = \frac{q}{m} B \dot{z} \equiv \omega \dot{z}$$

$$\ddot{z} = \frac{q}{m} (E - B \dot{y}) = \omega \left(\frac{E}{B} - \dot{y} \right)$$

$$\ddot{y} = \omega \ddot{z} = \omega^2 \left(\frac{E}{B} - \dot{y} \right)$$

$$\dot{y} = A \cos \omega t + B \sin \omega t + \frac{E}{B}$$

예2: 사이클로이드 운동



이제 이 방정식을 풀기 위해, 양변을 한 번 더 미분합시다.

$$\ddot{y} = \frac{q}{m} B \dot{z} \equiv \omega \dot{z}$$

$$\ddot{z} = \frac{q}{m} (E - B \dot{y}) = \omega \left(\frac{E}{B} - \dot{y} \right)$$

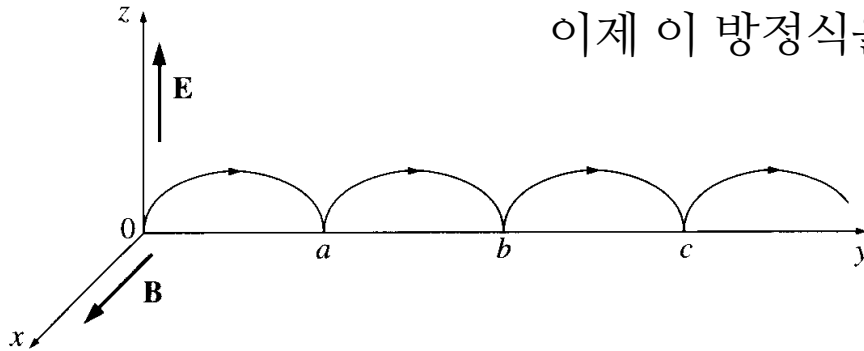
$$\dot{y} = A \cos \omega t + B \sin \omega t + \frac{E}{B}$$

$$\ddot{y} = \omega \ddot{z} = \omega^2 \left(\frac{E}{B} - \dot{y} \right)$$

$$y = A' \cos \omega t + B' \sin \omega t + \frac{E}{B} t + C'$$

$$z = A'' \cos \omega t + B'' \sin \omega t + C''$$

예2: 사이클로이드 운동



이제 이 방정식을 풀기 위해, 양변을 한 번 더 미분합시다.

$$\begin{aligned}\ddot{y} &= \frac{q}{m} B \dot{z} \equiv \omega \dot{z} \\ \ddot{z} &= \frac{q}{m} (E - B \dot{y}) = \omega \left(\frac{E}{B} - \dot{y} \right)\end{aligned}$$

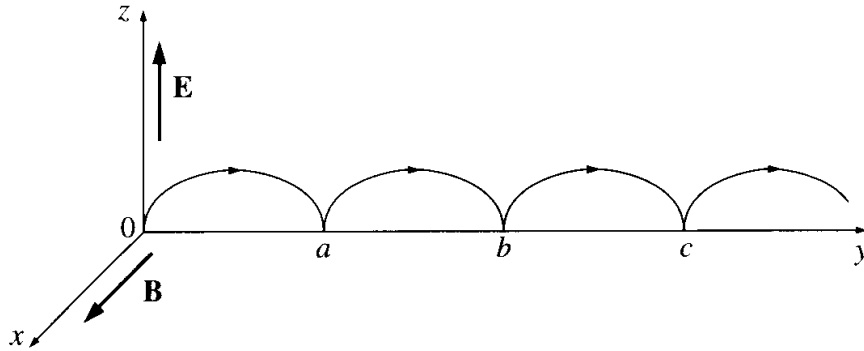
$$\dot{y} = A \cos \omega t + B \sin \omega t + \frac{E}{B}$$

$$\ddot{y} = \omega \dot{z} = \omega^2 \left(\frac{E}{B} - \dot{y} \right)$$

$$\begin{aligned}y &= A' \cos \omega t + B' \sin \omega t + \frac{E}{B} t + C' \\ z &= A'' \cos \omega t + B'' \sin \omega t + C''\end{aligned}$$

여기에는 상수가 여섯 개이지만,
실제로 독립적인 것은
네 개 뿐입니다.

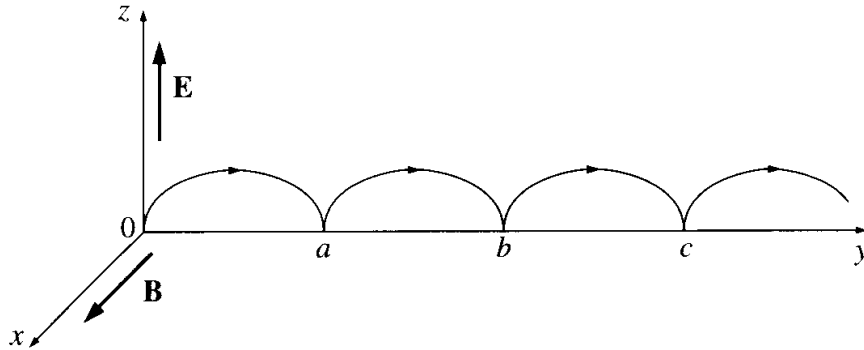
예2: 사이클로이드 운동



이 해를 다시 처음 방정식에 대입합니다.

$$\begin{aligned}\ddot{y} &= \omega \dot{z} \\ &= -A' \omega^2 \cos \omega t - B' \omega^2 \sin \omega t \\ &= -A'' \omega^2 \sin \omega t + B'' \omega^2 \cos \omega t\end{aligned}$$

예2: 사이클로이드 운동

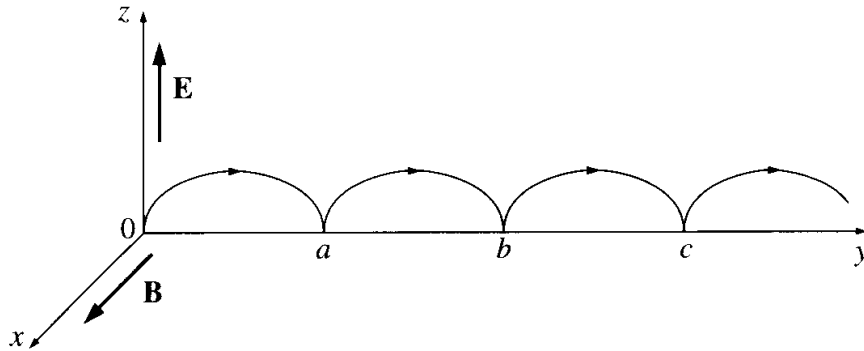


이 해를 다시 처음 방정식에 대입합니다.

$$\begin{aligned}\ddot{y} &= \omega \dot{z} \\ &= -A' \omega^2 \cos \omega t - B' \omega^2 \sin \omega t \\ &= -A'' \omega^2 \sin \omega t + B'' \omega^2 \cos \omega t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A' &= -B'' \\ B' &= A''\end{aligned}$$

예2: 사이클로이드 운동



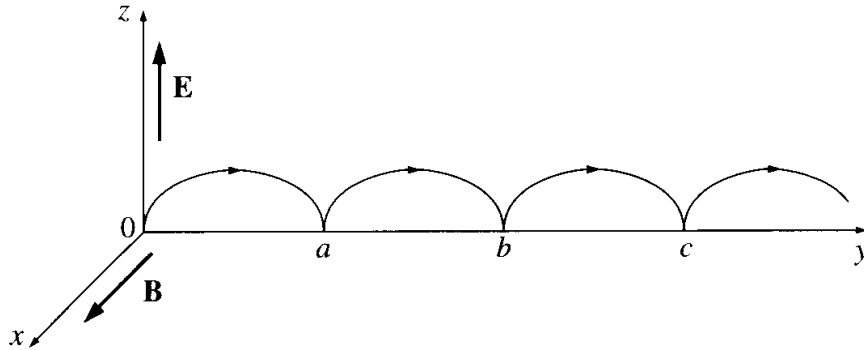
이 해를 다시 처음 방정식에 대입합니다.

$$\begin{aligned}\ddot{y} &= \omega \dot{z} \\ &= -A' \omega^2 \cos \omega t - B' \omega^2 \sin \omega t \\ &= -A'' \omega^2 \sin \omega t + B'' \omega^2 \cos \omega t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y &= C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{E}{B} t + C_3 \\ z &= C_2 \cos \omega t - C_1 \sin \omega t + C_4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A' &= -B'' \\ B' &= A''\end{aligned}$$

예2: 사이클로이드 운동



이 해를 다시 처음 방정식에 대입합니다.

$$\begin{aligned}\ddot{y} &= \omega \dot{z} \\ &= -A' \omega^2 \cos \omega t - B' \omega^2 \sin \omega t \\ &= -A'' \omega^2 \sin \omega t + B'' \omega^2 \cos \omega t\end{aligned}$$

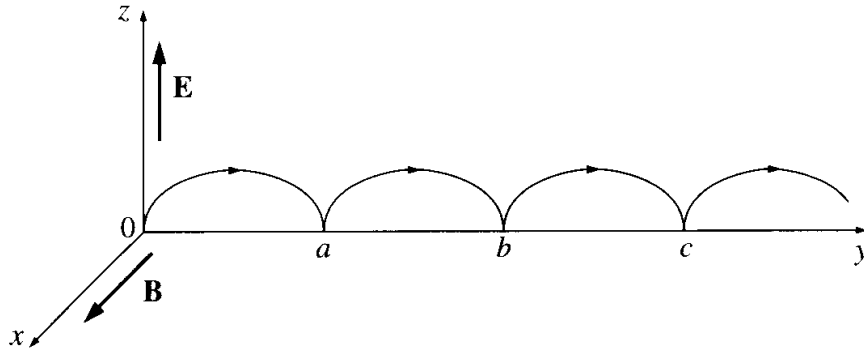
$$\begin{aligned}y &= C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{E}{B} t + C_3 \\ z &= C_2 \cos \omega t - C_1 \sin \omega t + C_4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A' &= -B'' \\ B' &= A''\end{aligned}$$

이제 초기조건을 대입해서 계수를 결정합니다.

$$y(0) = z(0) = \dot{y}(0) = \dot{z}(0) = 0$$

예2: 사이클로이드 운동



이 해를 다시 처음 방정식에 대입합니다.

$$\begin{aligned}\ddot{y} &= \omega \dot{z} \\ &= -A' \omega^2 \cos \omega t - B' \omega^2 \sin \omega t \\ &= -A'' \omega^2 \sin \omega t + B'' \omega^2 \cos \omega t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y &= C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{E}{B}t + C_3 \\ z &= C_2 \cos \omega t - C_1 \sin \omega t + C_4\end{aligned}$$

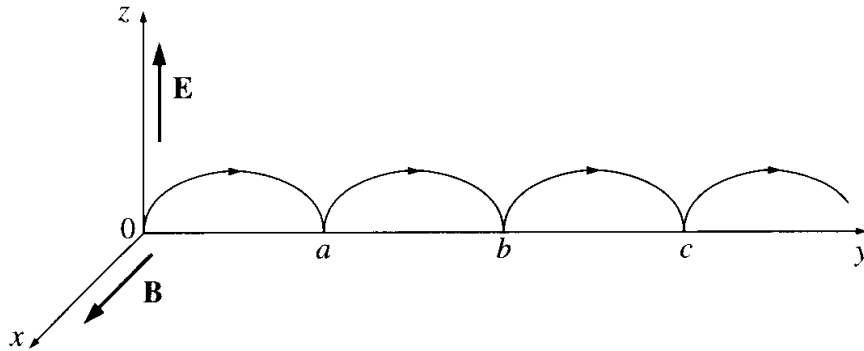
$$\begin{aligned}A' &= -B'' \\ B' &= A''\end{aligned}$$

이제 초기조건을 대입해서 계수를 결정합니다.

$$y(0) = z(0) = \dot{y}(0) = \dot{z}(0) = 0 \longrightarrow$$

$$\begin{aligned}y &= \frac{E}{\omega B} (\omega t - \sin \omega t) \\ z &= \frac{E}{\omega B} (1 - \cos \omega t)\end{aligned}$$

예2: 사이클로이드 운동

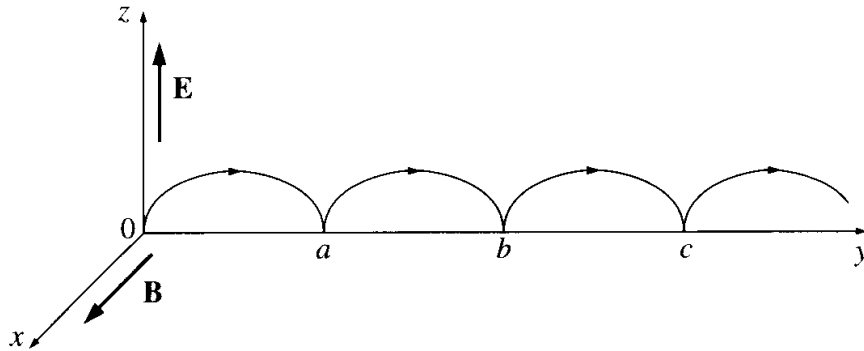


$$y = \frac{E}{\omega B} (\omega t - \sin \omega t)$$

$$z = \frac{E}{\omega B} (1 - \cos \omega t)$$

우리가 얻은 이 식을 다시 정리해 봅시다.

예2: 사이클로이드 운동



$$y = \frac{E}{\omega B} (\omega t - \sin \omega t)$$

$$z = \frac{E}{\omega B} (1 - \cos \omega t)$$

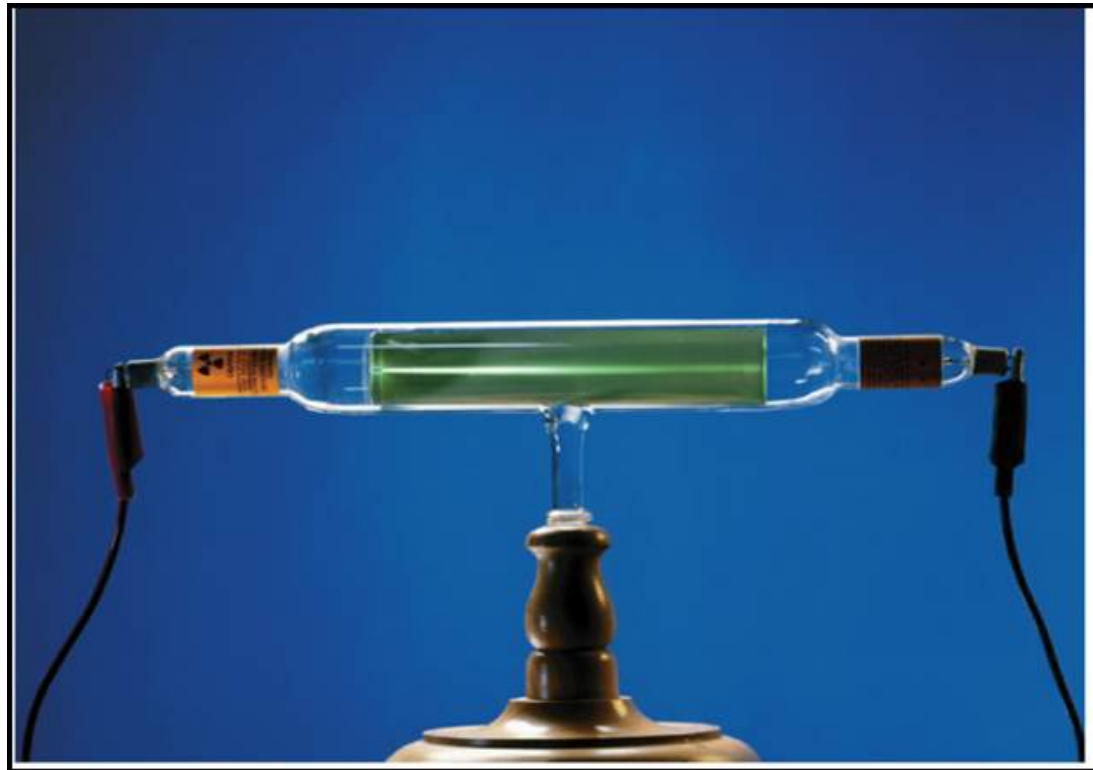
우리가 얻은 이 식을 다시 정리해 봅시다.

$$\left(y - \frac{E}{B}t\right)^2 + \left(z - \frac{E}{\omega B}\right)^2 = \left(\frac{E}{\omega B}\right)^2$$

즉, 중심이 $\left(0, \left(\frac{E}{\omega B}\right)\omega t, \frac{E}{\omega B}\right)$ 에 있어서 등속운동하는 반지름 $\frac{E}{\omega B}$ 인 원 상의 한 점,
즉 이른바 **사이클로이드**cycloid를 나타낸다는 것을 알 수 있습니다.

예3: 톰슨 효과

진공관 안에 있는 두 금속 전극(양극Anode과 음극Cathode) 사이에 전위차를 걸어주면 이른바 음극선cathode rays이라는 것이 방출됩니다.

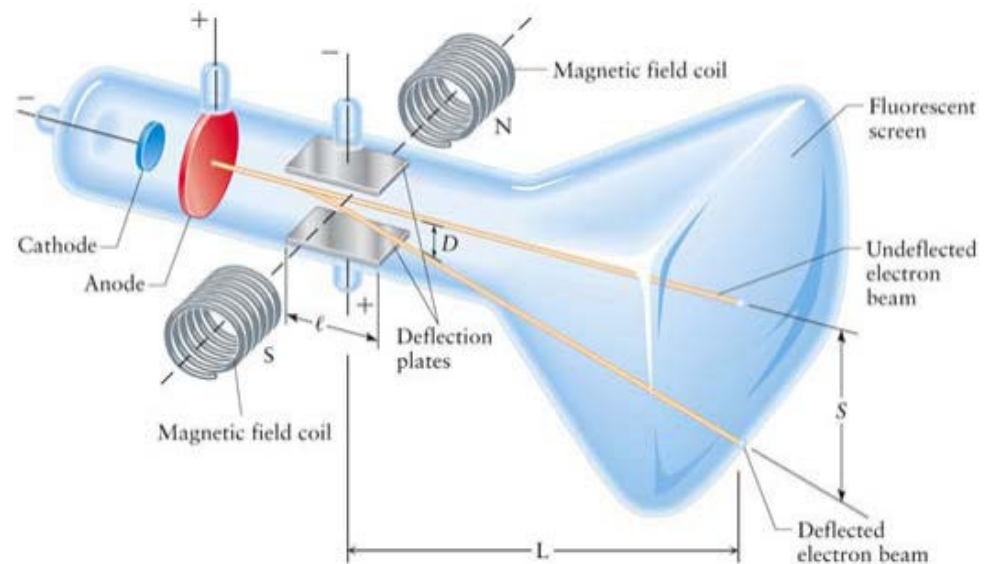


예3: 톰슨 효과

진공관 안에 있는 두 금속 전극(양극Anode과 음극Cathode) 사이에 전위차를 걸어주면 이른바 음극선cathode rays이라는 것이 방출됩니다.



톰슨Joseph John Thomson은 음극선의 성질을 밝히기 위해 여기에 전기장과 자기장을 동시에 걸어주는 실험을 하게 됩니다.

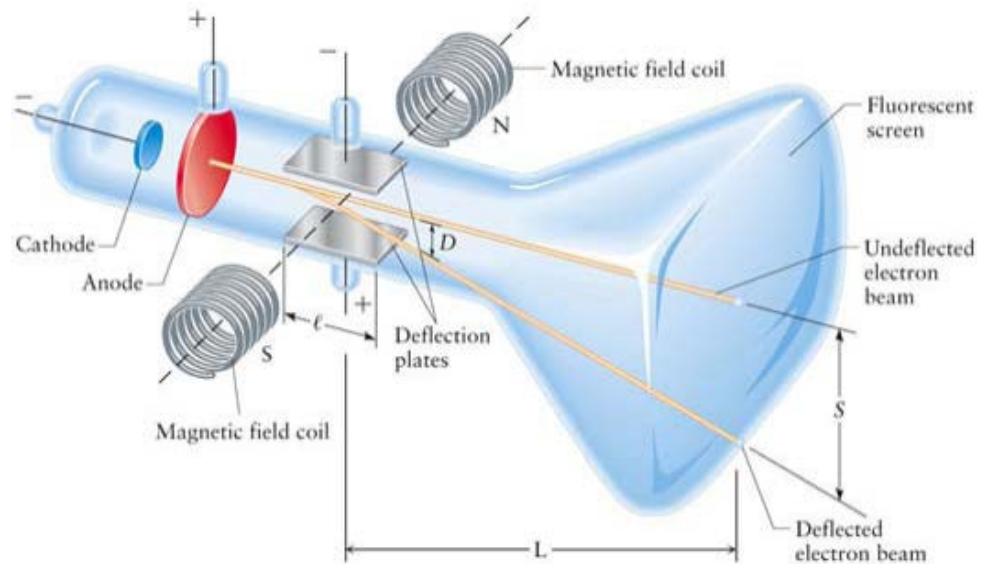


예3: 톰슨 효과

수직으로 걸려있는 전기장과 자기장의 세기를 조절하면서
스크린에 도달하는 음극선의 위치가 휘어지지 않도록 하는 조건을 찾아볼 수
있습니다.

$$qE = qvB$$

$$v = \frac{E}{B}$$



예3: 톰슨 효과

수직으로 걸려있는 전기장과 자기장의 세기를 조절하면서
스크린에 도달하는 음극선의 위치가 휘어지지 않도록 하는 조건을 찾아볼 수
있습니다.

$$qE = qvB$$

$$v = \frac{E}{B}$$

한 편, 자기장만 있을 때는 원운동을 하게 됩니다.

$$\frac{mv^2}{R} = |q|vB$$

$$v = \frac{|q|BR}{m}$$



예3: 톰슨 효과

이 두 가지 관계로부터 다음 조건을 얻습니다.

$$v = \frac{E}{B} = \frac{|q|BR}{m}$$

$$\boxed{\frac{|q|}{m} = \frac{E}{B^2 R}}$$

예3: 톰슨 효과

이 두 가지 관계로부터 다음 조건을 얻습니다.

$$v = \frac{E}{B} = \frac{|q|BR}{m}$$

$$\boxed{\frac{|q|}{m} = \frac{E}{B^2 R}}$$

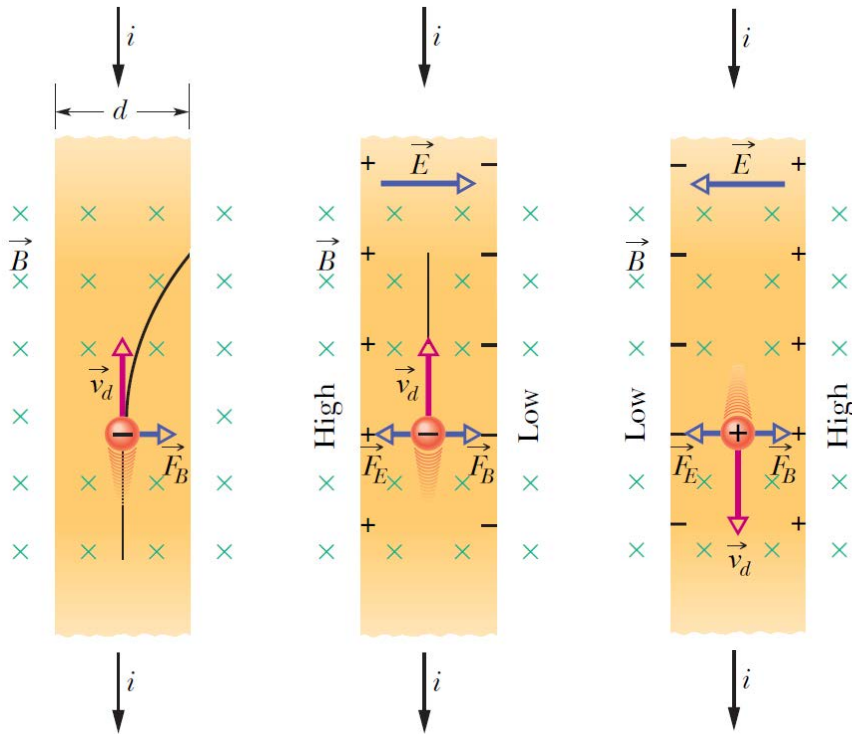
나중에 이 음극선을 전자electron라고 부르게 됩니다.

톰슨은 이런 방식으로 전자의 비전하를 측정할 수 있었습니다.

놀랍게도 원자도 쪼갤 수 있다는 것을 이 실험으로부터 발견하게 되었습니다.

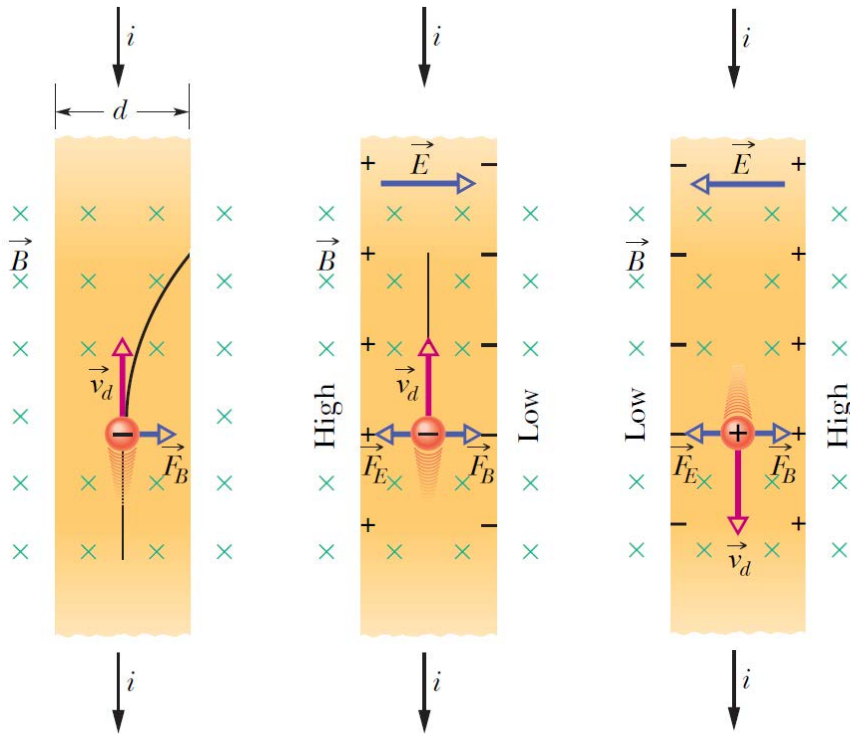
예4: 홀 효과

이번에는 아래와 같이 전류가 위에서 아래로 흐르는 도선에 자기장을 걸어주는 경우를 생각하겠습니다.



예4: 홀 효과

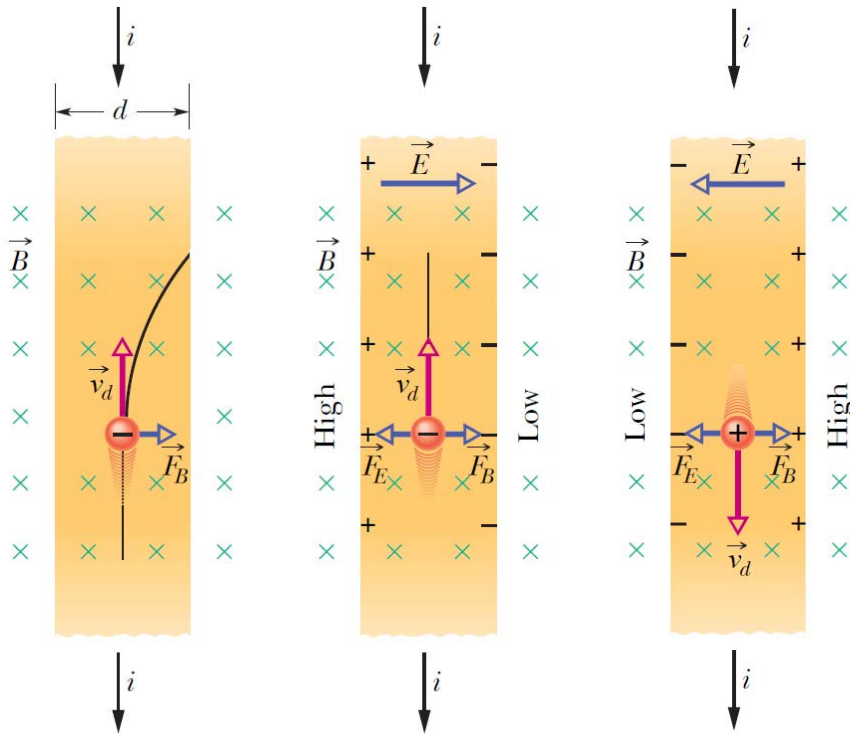
이번에는 아래와 같이 전류가 위에서 아래로 흐르는 도선에 자기장을 걸어주는 경우를 생각하겠습니다.



전류를 매개하는 입자가 양전하라면,
양전하는 위에서 아래로 움직이게 되고,
자기장에 의해 **오른쪽**으로 쏠리게 됩니다.

예4: 홀 효과

이번에는 아래와 같이 전류가 위에서 아래로 흐르는 도선에 자기장을 걸어주는 경우를 생각하겠습니다.

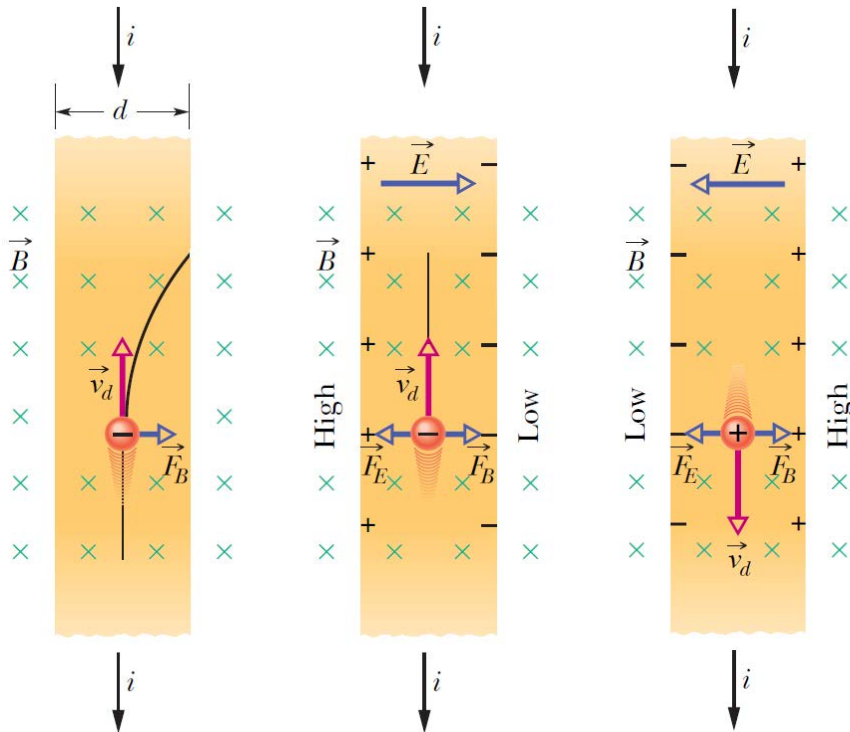


전류를 매개하는 입자가 양전하라면,
양전하는 위에서 아래로 움직이게 되고,
자기장에 의해 **오른쪽**으로 쏠리게 됩니다.

반면에 음전하가 전류를 매개한다면,
음전하는 아래에서 위로 움직이게 되고,
자기장에 의해 **오른쪽**으로 쏠리게 됩니다.

예4: 홀 효과

두 경우 모두 오른쪽으로 쏠린다는 것은 중요한 차이를 보여줍니다.



양전하의 경우에는 양전하가 오른쪽에,
음전하의 경우에는 음전하가 오른쪽에
쌓이게 됩니다.

따라서 평형상태에서 **전기장**이 발생하게
됩니다. 우리는 이 전기장을 측정해서
어떤 전하가 전류를 매개하는지를
검증할 수 있습니다.

예4: 홀 효과

$$V = Ed$$

예4: 홀 효과

$$V = Ed$$

평형상태에서는 전기장과 자기장에 의한 힘이 균형을 이루게 됩니다.

예4: 홀 효과

$$V = Ed$$

평형상태에서는 전기장과 자기장에 의한 힘이 균형을 이루게 됩니다.

$$qE = qvB$$
$$v = \frac{i}{neA}$$

↓
도선의 단면적

예4: 홀 효과

$$V = Ed$$

평형상태에서는 전기장과 자기장에 의한 힘이 균형을 이루게 됩니다.

$$\begin{aligned} qE &= qvB \\ v &= \frac{i}{ne\underline{A}} \end{aligned}$$

↓
도선의 단면적

$$n = \frac{Bi}{V\ell e}$$

전하운반자의 수 밀도

$$\ell = \frac{A}{d} \quad : \text{도선의 두께}$$

예4: 홀 효과

$$V = Ed$$

평형상태에서는 전기장과 자기장에 의한 힘이 균형을 이루게 됩니다.

$$\begin{aligned} qE &= qvB \\ v &= \frac{i}{ne\underline{A}} \end{aligned}$$

↓
도선의 단면적

$$n = \frac{Bi}{V\ell e}$$

전하운반자의 수 밀도

$$\ell = \frac{A}{d} \quad : \text{도선의 두께}$$

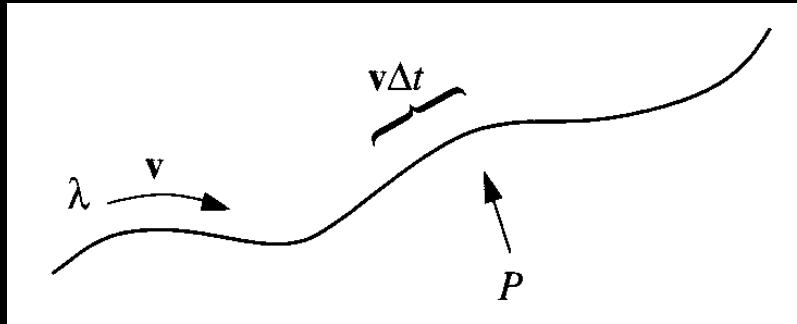
홀 효과를 통해 전하 운반자의 부호와 함께,
전하의 이동속도와 전하운반자의 수 밀도를 구할 수 있습니다.

$$I = \frac{dq}{dt}$$

전류란 전하의 흐름을 의미합니다.

$$I = \lambda v$$

전류가 1차원 도선을 따라 흐르는 경우
위와 같이 표현할 수 있습니다.



$$\vec{I} = \lambda \vec{v}$$

도선의 모양에 따라 위와 같이
벡터의 형태로 나타낼 수도 있습니다.

$$\vec{I} = \lambda \vec{v}$$

$$\vec{K} = \sigma \vec{v}$$

$$\vec{J} = \rho \vec{v}$$

그리고 일반적인 차원의 경우로 확장하면
위와 같이 표현됩니다.

$$\vec{I} = \lambda \vec{v}$$

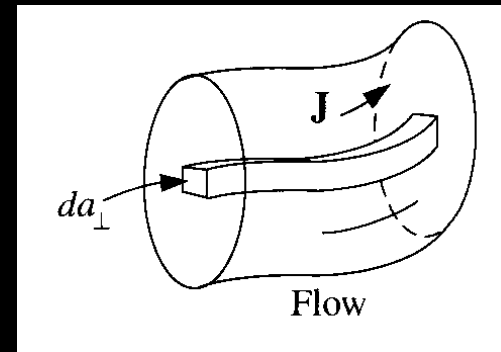
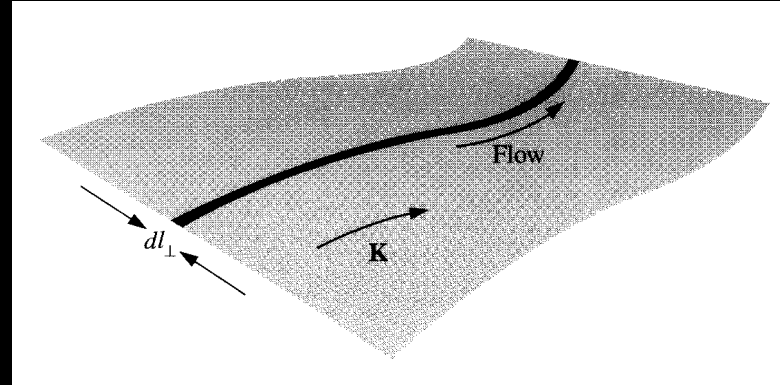
단위길이당 전류밀도 선전하밀도

$$\vec{K} = \sigma \vec{v}$$

단위면적당 전류밀도 면전하밀도

$$\vec{J} = \rho \vec{v}$$

단위면적당 전류밀도 부피전하밀도



그리고 일반적인 차원의 경우로 확장하면
위와 같이 표현됩니다.

$$\vec{I} = \lambda \vec{v}$$

선전하밀도

단위길이당
전류밀도

$$\vec{K} = \sigma \vec{v}$$

면전하밀도

단위면적당
전류밀도

$$\vec{J} = \rho \vec{v}$$

부피전하밀도

$$I = \int |\vec{K} \times d\vec{s}|$$

$$I = \int \vec{J} \cdot d\vec{A}$$

그리고 일반적인 차원의 경우로 확장하면
위와 같이 표현됩니다.

$$\vec{F} = \int (\vec{v} \times \vec{B}) dq$$

이제 전하가 아니라 **도선**이 자기장에 의해 받는 힘을
계산해 봅시다.
이것은 로렌츠 힘 법칙으로부터 유도되어야 합니다.

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \int (\vec{v} \times \vec{B}) dq \\ &= \int (\vec{v} \times \vec{B}) \lambda ds\end{aligned}$$

$$\vec{F} = \int (\vec{v} \times \vec{B}) dq$$

$$= \int (\vec{v} \times \vec{B}) \lambda ds$$

$$\vec{I} = \lambda \vec{v} \quad = \int (\vec{I} \times \vec{B}) ds$$

$$\vec{F} = \int (\vec{v} \times \vec{B}) dq$$

$$= \int (\vec{v} \times \vec{B}) \lambda ds$$

$$\vec{I} = \lambda \vec{v} \quad = \int (\vec{I} \times \vec{B}) ds$$

$$\vec{I} \parallel d\vec{s} \quad = \int I (d\vec{s} \times \vec{B})$$

$$\vec{F} = \int I (d\vec{s} \times \vec{B})$$

$$= I \int (d\vec{s} \times \vec{B})$$

I 가 일정한 경우

$$\vec{F} = \int I(d\vec{s} \times \vec{B})$$

$$= I \int (d\vec{s} \times \vec{B})$$

I 가 일정한 경우

$$= I \vec{L} \times \vec{B}$$

B 가 도선에
균일한 경우

$$I = \oint_{\partial V} \vec{J} \cdot d\vec{A} = \int_V (\nabla \cdot \vec{J}) dV$$

우리는 전류와 전류밀도의 관계로부터
다음 관계식을 구할 수 있습니다.

$$I = \oint_{\partial \mathcal{V}} \vec{J} \cdot d\vec{A} = \int_{\mathcal{V}} (\nabla \cdot \vec{J}) dV$$

$$= - \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \rho dV$$

$$I = \left| \frac{dq}{dt} \right|$$

에서 부피영역 $\mathcal{V}$ 를
빠져나가는 것들을 고려

우리는 전류와 전류밀도의 관계로부터
다음 관계식을 구할 수 있습니다.

$$I = \oint_{\partial \mathcal{V}} \vec{J} \cdot d\vec{A} = \int_{\mathcal{V}} (\nabla \cdot \vec{J}) dV$$

$$I = \left| \frac{dq}{dt} \right| = - \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \rho dV = - \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

에서 부피영역 $\mathcal{V}$ 를
빠져나가는 것들을 고려

우리는 전류와 전류밀도의 관계로부터
다음 관계식을 구할 수 있습니다.

$$\nabla \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

이것을 연속방정식continuity equation이라고 합니다.

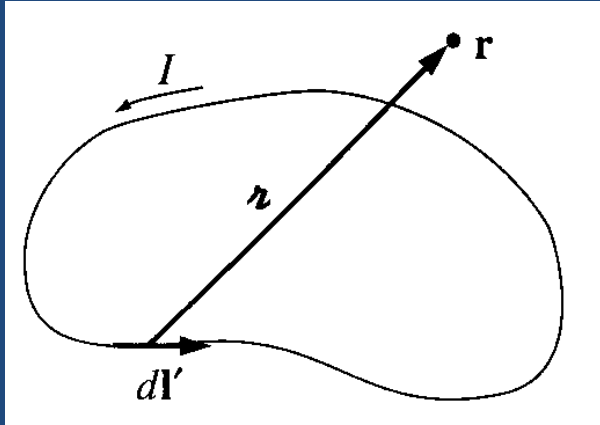
$$\nabla \cdot \vec{j} = 0$$

우리가 정자기학magnetostatics을 한다는 것은, 특히
이 연속방정식의 우변이 0이 된다는 것을 의미합니다.

이제 전류와 자기장이 정량적으로 어떤 관계를 가지는지에 대한
두 가지 경험적 법칙을 살펴보도록 합시다.

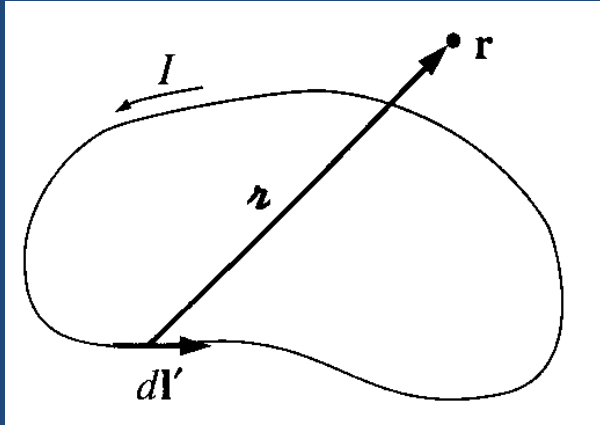
이제 전류와 자기장이 정량적으로 어떤 관계를 가지는지에 대한
두 가지 경험적 법칙을 살펴보도록 합시다.

첫 번째는 비오-사바르Biot-Savart 법칙이고,
두 번째는 앙페르Ampere 법칙으로 알려져 있습니다.



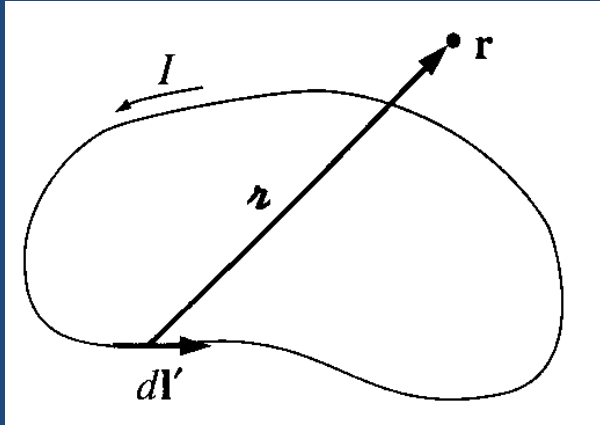
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} d^3r'$$

비오-사바르 법칙은 위와 같이 표현됩니다.
여기에서 방향을 나타내는 벡터에 대한 정확한 표현을
기억해 둡시다.



$$\begin{aligned}\vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times \widehat{(\vec{r} - \vec{r}')}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} d^3 r' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{id\vec{s}' \times \widehat{(\vec{r} - \vec{r}')}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{K}(\vec{r}') \times \widehat{(\vec{r} - \vec{r}')}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} d^2 r'\end{aligned}$$

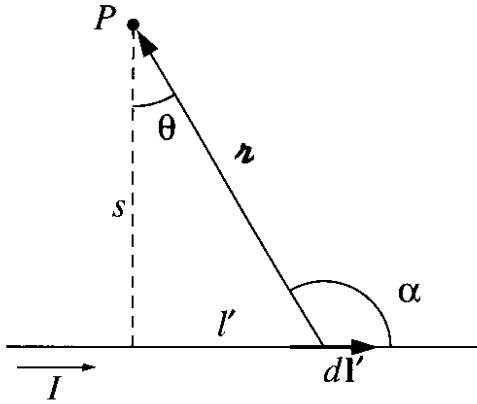
1차원 및 2차원 도선에 대해서는
위와 같이 확장될 수 있습니다.



$$\begin{aligned}\vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} d^3r' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{i d\vec{s}' \times (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{K}(\vec{r}') \times (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} d^2r'\end{aligned}$$

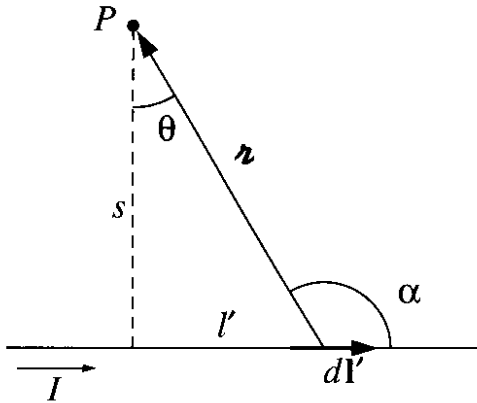
비오-사바르 법칙은 기본적으로 **역제곱 법칙**이며 **전류가 흐르는 방향**과 **전류에서 우리가 측정하는 점까지의 방향**에 모두 수직인 방향으로 생성된다는 것을 이야기합니다.

예1: 직선 도선



직선 도선에 전류 I 가 흐를 때, 이 도선에서 s 만큼 떨어진 곳에서의 자기장을 계산해 봅시다.

예1: 직선 도선

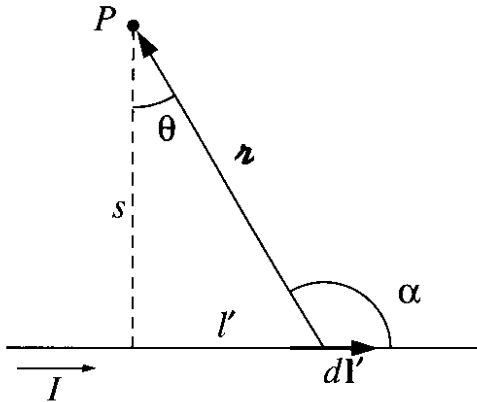


직선 도선에 전류 I 가 흐를 때, 이 도선에서 s 만큼 떨어진 곳에서의 자기장을 계산해 봅시다.

이 때 자기장의 방향은 지면을 뚫고 나오는 방향이고 각도의 관계는 다음과 같습니다.

$$|d\vec{\ell}' \times (\vec{r} - \vec{r}')| = d\ell' \sin \alpha = d\ell' \cos \theta$$

예1: 직선 도선



직선 도선에 전류 I 가 흐를 때, 이 도선에서 s 만큼 떨어진 곳에서의 자기장을 계산해 봅시다.

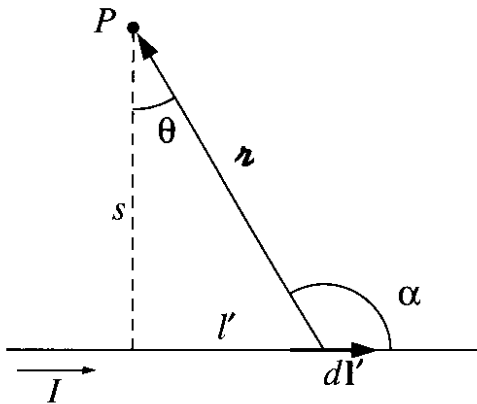
이 때 자기장의 방향은 지면을 뚫고 나오는 방향이고 각도의 관계는 다음과 같습니다.

$$|d\vec{\ell}' \times (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})| = d\ell' \sin \alpha = \textcolor{red}{d\ell' \cos \theta}$$

따라서 비오-사바르 법칙에 대입하면 다음과 같습니다.

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{\ell_1}^{\ell_2} \frac{\textcolor{red}{d\ell' \cos \theta}}{(\ell'^2 + s^2)} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{\ell_1}^{\ell_2} \frac{s d\ell'}{(\ell'^2 + s^2)^{3/2}}$$

예1: 직선 도선



직선 도선에 전류 I 가 흐를 때, 이 도선에서 s 만큼 떨어진 곳에서의 자기장을 계산해 봅시다.

이 때 자기장의 방향은 지면을 뚫고 나오는 방향이고 각도의 관계는 다음과 같습니다.

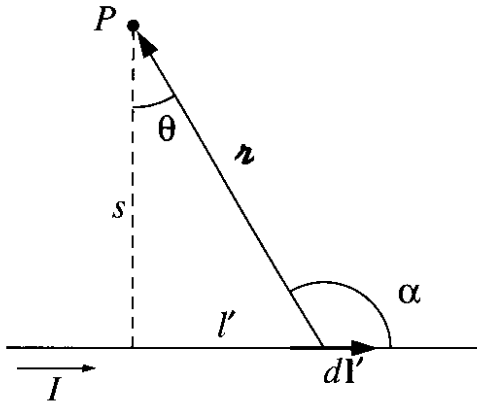
$$|d\vec{\ell}' \times (\vec{r} - \vec{r}')| = d\ell' \sin \alpha = d\ell' \cos \theta$$

따라서 비오-사바르 법칙에 대입하면 다음과 같습니다.

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{\ell_1}^{\ell_2} \frac{d\ell' \cos \theta}{(\ell'^2 + s^2)} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{\ell_1}^{\ell_2} \frac{s d\ell'}{(\ell'^2 + s^2)^{3/2}} \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi s} I \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\sec^2 \theta d\theta}{\sec^3 \theta}
 \end{aligned}$$

$\ell' = s \tan \theta$
 $d\ell' = s \sec^2 \theta d\theta$

예1: 직선 도선



직선 도선에 전류 I 가 흐를 때, 이 도선에서 s 만큼 떨어진 곳에서의 자기장을 계산해 봅시다.

이 때 자기장의 방향은 지면을 뚫고 나오는 방향이고 각도의 관계는 다음과 같습니다.

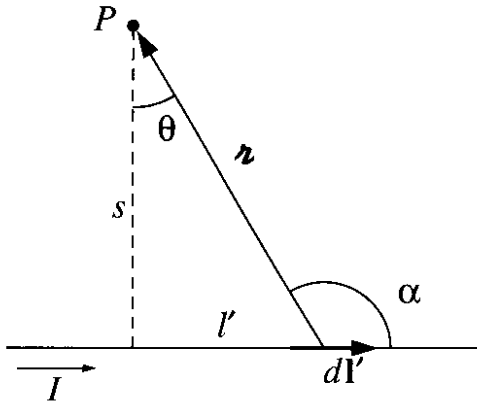
$$|d\vec{\ell}' \times (\vec{r} - \vec{r}')| = d\ell' \sin \alpha = d\ell' \cos \theta$$

따라서 비오-사바르 법칙에 대입하면 다음과 같습니다.

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{\ell_1}^{\ell_2} \frac{d\ell' \cos \theta}{(\ell'^2 + s^2)} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{\ell_1}^{\ell_2} \frac{s d\ell'}{(\ell'^2 + s^2)^{3/2}} \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi s} I \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\sec^2 \theta d\theta}{\sec^3 \theta} = \frac{\mu_0}{4\pi s} I \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos \theta d\theta = \frac{\mu_0}{4\pi s} I (\sin \theta_2 - \sin \theta_1)
 \end{aligned}$$

$\ell' = s \tan \theta$
 $d\ell' = s \sec^2 \theta d\theta$

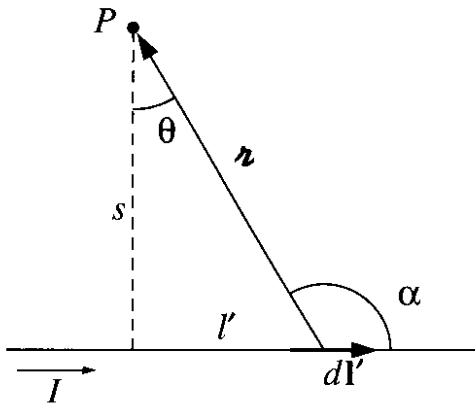
예1: 직선 도선



도선의 길이가 무한대가 되면 $\theta_{1,2} = \pm\pi/2$ 가 되므로 자기장은 다음과 같은 값을 갖게 됩니다.

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi s}$$

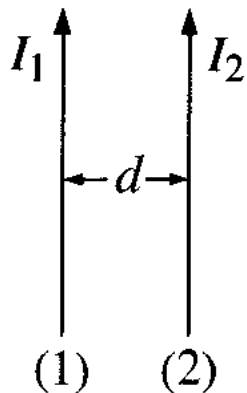
예1: 직선 도선



도선의 길이가 무한대가 되면 $\theta_{1,2} = \pm\pi/2$ 가 되므로 자기장은 다음과 같은 값을 갖게 됩니다.

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi s}$$

두 개의 긴 도선에 같은 방향으로 전류가 흐른다면, 첫 번째 도선이 두 번째 도선에 작용하는 힘은 다음과 같습니다.

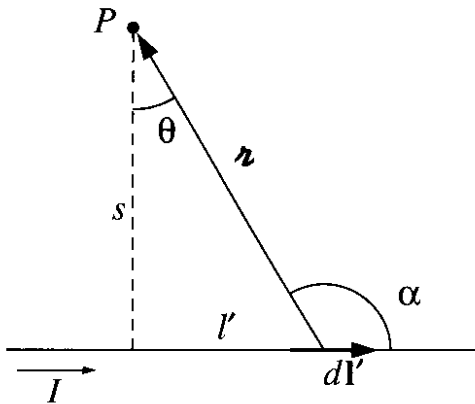


$$F_{12} = I_2 L_2 B_1$$

도선 1이 2에 미치는 힘

도선 1이 2의 위치에 만드는 자기장

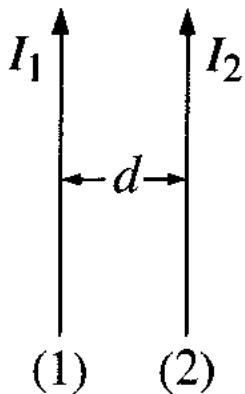
예1: 직선 도선



도선의 길이가 무한대가 되면 $\theta_{1,2} = \pm\pi/2$ 가 되므로 자기장은 다음과 같은 값을 갖게 됩니다.

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi s}$$

두 개의 긴 도선에 같은 방향으로 전류가 흐른다면, 첫 번째 도선이 두 번째 도선에 작용하는 힘은 다음과 같습니다.



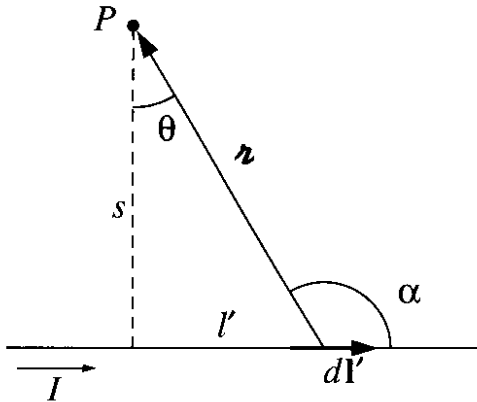
$$F_{12} = I_2 L_2 B_1$$

도선 1이 2에 미치는 힘

도선 1이 2의 위치에 만드는 자기장

$$= I_2 L_2 \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}$$

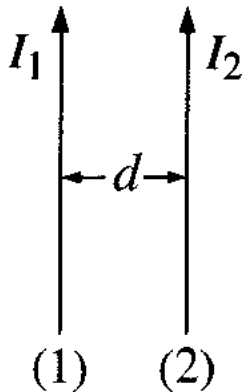
예1: 직선 도선



도선의 길이가 무한대가 되면 $\theta_{1,2} = \pm\pi/2$ 가 되므로 자기장은 다음과 같은 값을 갖게 됩니다.

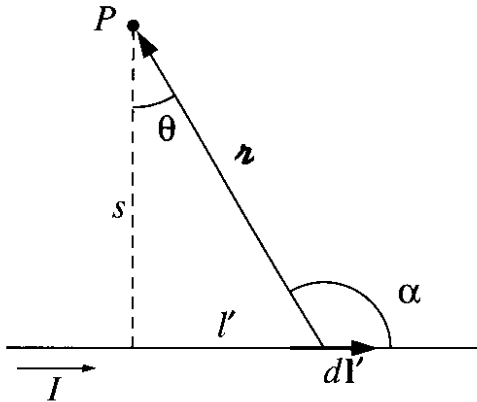
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi s}$$

물론 무한히 긴 도선에서 상호간에 작용하는 힘은 무한대가 되지만, 단위 길이당 작용하는 힘은 유한한 값을 갖게 됩니다.



$$\frac{F_{12}}{L_2} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} = \frac{F_{21}}{L_1}$$

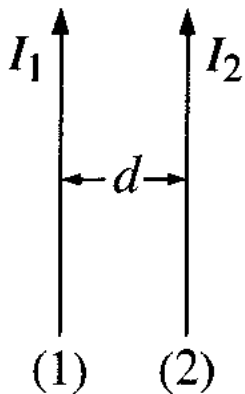
예1: 직선 도선



도선의 길이가 무한대가 되면 $\theta_{1,2} = \pm\pi/2$ 가 되므로 자기장은 다음과 같은 값을 갖게 됩니다.

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi s}$$

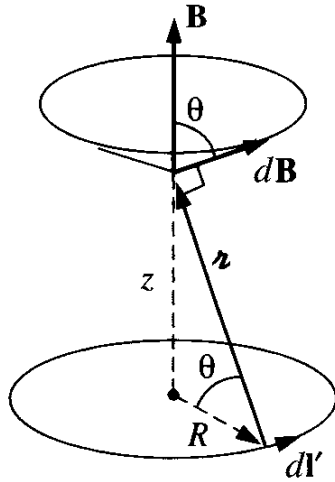
물론 무한히 긴 도선에서 상호간에 작용하는 힘은 무한대가 되지만, 단위 길이당 작용하는 힘은 유한한 값을 갖게 됩니다.



$$\frac{F_{12}}{L_2} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} = \frac{F_{21}}{L_1}$$

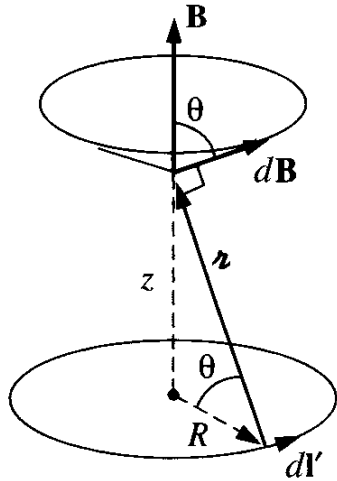
전류의 방향이 같으면 힘의 방향은 인력으로 작용하며 1과 2의 교환에 대해 대칭적인 값을 갖게 됩니다.

예2: 원형 도선



원형 도선의 경우 자기장을 원의 중심에서 수직으로 떨어진 곳에서 계산해 봅시다.

예2: 원형 도선



원형 도선의 경우 자기장을 원의 중심에서 수직으로 떨어진 곳에서 계산해 봅시다.

대칭성에 의해 $\hat{z}$ 성분만 남게 된다는 것을 알 수 있습니다.

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_0^{2\pi} \frac{1}{z^2 + R^2} \cdot \frac{R}{\sqrt{z^2 + R^2}} \cdot R d\phi \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{2\pi R^2}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \\
 &= \frac{\mu_0}{2} I \frac{R^2}{(z^2 + R^2)^{3/2}}
 \end{aligned}$$

이제 비오-사바르 법칙으로 주어지는 자기장의
발산과 회전을 계산해 봅시다.
이것으로부터 앙페르Ampere 법칙을 얻을 수 있습니다.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times \widehat{(\vec{r} - \vec{r}')}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} d^3r'$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} d^3r'$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla_r \cdot \left(\frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right) d^3r'$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times \widehat{(\vec{r} - \vec{r}')}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} d^3r'$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla_r \cdot \left(\frac{\vec{j}(\vec{r}') \times \widehat{(\vec{r} - \vec{r}')}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right) d^3r'$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left(\frac{\widehat{(\vec{r} - \vec{r}')}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \cdot (\nabla_r \times \vec{j}(\vec{r}')) - \vec{j}(\vec{r}') \cdot \left(\nabla_r \times \frac{\widehat{(\vec{r} - \vec{r}')}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right) \right) d^3r'$$

$$\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{B} - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B})$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} d^3r'$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla_r \cdot \left(\frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right) d^3r'$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left(\frac{(\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \cdot \underbrace{(\nabla_r \times \vec{j}(\vec{r}'))}_{=0} - \vec{j}(\vec{r}') \cdot \underbrace{\left(\nabla_r \times \frac{(\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right)}_{=\nabla \times \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = 0} \right) d^3r'$$

$$\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{B} - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B}) \quad = 0 \text{ (} r \text{에 대한 미분이므로)} \quad = \nabla \times \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = 0$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} d^3r'$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla_r \cdot \left(\frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right) d^3r'$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left(\frac{(\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \cdot (\nabla_r \times \vec{j}(\vec{r}')) - \vec{j}(\vec{r}') \cdot \left(\nabla_r \times \frac{(\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right) \right) d^3r'$$

$$\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{B} - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B}) \quad \quad \quad = 0 \text{ (} r \text{에 대한 미분이므로)} \quad \quad \quad = \nabla \times \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = 0$$

$$= 0$$

자기장에 관한 가우스 법칙

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times \widehat{(\vec{r} - \vec{r}')}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} d^3r'$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla_r \times \left(\frac{\vec{j}(\vec{r}') \times \widehat{(\vec{r} - \vec{r}')}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right) d^3r'$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} d^3r'$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla_r \times \left(\frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right) d^3r'$$

$$\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{A}(\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\nabla \cdot \vec{A})$$

이 중에서 두 개의 항은 r 에 대한 미분을 r' 에 작용하는 것이 되어 0이 됩니다.

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left(\vec{j}(\vec{r}') \left(\nabla_r \cdot \frac{(\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right) - (\vec{j}(\vec{r}') \cdot \nabla_r) \frac{(\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right) d^3r'$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} d^3r'$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla_r \times \left(\frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right) d^3r'$$

$$\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{A}(\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\nabla \cdot \vec{A})$$

이 중에서 두 개의 항은 r 에 대한 미분을 r' 에 작용하는 것이 되어 0이 됩니다.

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left(\vec{j}(\vec{r}') \left(\underbrace{\nabla_r \cdot \frac{(\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2}}_{= 4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}')} \right) - (\vec{j}(\vec{r}') \cdot \nabla_r) \frac{(\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right) d^3r'$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} d^3r'$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla_r \times \left(\frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right) d^3r'$$

$$\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{A}(\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\nabla \cdot \vec{A})$$

이 중에서 두 개의 항은 r 에 대한 미분을 r' 에 작용하는 것이 되어 0이 됩니다.

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left(\vec{j}(\vec{r}') \left(\underbrace{\nabla_r \cdot \frac{(\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2}}_{= 4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}')} \right) - \underbrace{(\vec{j}(\vec{r}') \cdot \nabla_r) \frac{(\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2}}_{= +(\vec{j}(\vec{r}') \cdot \nabla_{r'}) \frac{(\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2}} \right) d^3r'$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} d^3r'$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla_r \times \left(\frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right) d^3r'$$

$$\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{A}(\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\nabla \cdot \vec{A})$$

이 중에서 두 개의 항은 r 에 대한 미분을 r' 에 작용하는 것이 되어 0이 됩니다.

$$\begin{aligned} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left(\vec{j}(\vec{r}') \left(\underbrace{\nabla_r \cdot \frac{(\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2}}_{= 4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}')} \right) - \underbrace{(\vec{j}(\vec{r}') \cdot \nabla_r) \frac{(\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2}}_{= +(\vec{j}(\vec{r}') \cdot \nabla_{r'}) \frac{(\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2}} \right) d^3r' \\ &= \left[\nabla_{r'} \cdot \left(\frac{(x - x')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \vec{j}(\vec{r}') \right) - \frac{(x - x')(\nabla_{r'} \cdot \vec{j}(\vec{r}'))}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] \hat{x} + \dots \end{aligned}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} d^3r'$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla_r \times \left(\frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right) d^3r'$$

$$\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{A}(\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\nabla \cdot \vec{A})$$

이 중에서 두 개의 항은 r 에 대한 미분을 r' 에 작용하는 것이 되어 0이 됩니다.

$$\begin{aligned} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left(\vec{j}(\vec{r}') \left(\nabla_r \cdot \frac{(\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right) - (\vec{j}(\vec{r}') \cdot \nabla_r) \frac{(\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right) d^3r' \\ &\quad \quad \quad = 4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad \quad \quad = +(\vec{j}(\vec{r}') \cdot \nabla_{r'}) \frac{(\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \\ &\quad \quad \quad = \left[\nabla_{r'} \cdot \left(\frac{(x - x')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \vec{j}(\vec{r}') \right) - \frac{(x - x')(\nabla_{r'} \cdot \vec{j}(\vec{r}'))}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] \hat{x} + \dots \\ &\quad \quad \quad = \int \nabla_{r'} \cdot \left(\frac{(x - x')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \vec{j}(\vec{r}') \right) dV = \oint \left(\frac{(x - x')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \vec{j}(\vec{r}') \right) \cdot d\vec{A} \end{aligned}$$

이 적분은 적분 영역을 잘 선택해서
0으로 보낼 수 있습니다.

가우스 정리

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} d^3r'$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla_r \times \left(\frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right) d^3r'$$

$$\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{A}(\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\nabla \cdot \vec{A})$$

이 중에서 두 개의 항은 r 에 대한 미분을 r' 에 작용하는 것이 되어 0이 됩니다.

$$\begin{aligned} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left(\vec{j}(\vec{r}') \left(\nabla_r \cdot \frac{(\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right) - (\vec{j}(\vec{r}') \cdot \nabla_r) \frac{(\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right) d^3r' \\ &\qquad\qquad\qquad = 4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}') \qquad\qquad\qquad = +(\vec{j}(\vec{r}') \cdot \nabla_{r'}) \frac{(\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \\ &\qquad\qquad\qquad = \left[\nabla_{r'} \cdot \left(\frac{(x - x')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \vec{j}(\vec{r}') \right) - \frac{(x - x')(\nabla_{r'} \cdot \vec{j}(\vec{r}'))}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] \hat{x} + \dots \end{aligned}$$

정상 전류에 대해
이 항은 0이 됩니다.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} d^3r'$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla_r \times \left(\frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right) d^3r'$$

$$\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{A}(\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\nabla \cdot \vec{A})$$

이 중에서 두 개의 항은 r 에 대한 미분을 r' 에 작용하는 것이 되어 0이 됩니다.

$$\begin{aligned} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left(\vec{j}(\vec{r}') \left(\underbrace{\nabla_r \cdot \frac{(\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2}}_{= 4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}')} \right) - \underbrace{(\vec{j}(\vec{r}') \cdot \nabla_r) \frac{(\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2}}_{= +(\vec{j}(\vec{r}') \cdot \nabla_{r'}) \frac{(\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2}} \right) d^3r' \\ &= \left[\nabla_{r'} \cdot \left(\frac{(x - x')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \vec{j}(\vec{r}') \right) - \frac{(x - x')(\nabla_{r'} \cdot \vec{j}(\vec{r}'))}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] \hat{x} + \dots \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} d^3r'$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla_r \times \left(\frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right) d^3r'$$

$$\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{A}(\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\nabla \cdot \vec{A})$$

이 중에서 두 개의 항은 r 에 대한 미분을 r' 에 작용하는 것이 되어 0이 됩니다.

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left(\vec{j}(\vec{r}') \left(\nabla_r \cdot \frac{(\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right) - (\vec{j}(\vec{r}') \cdot \nabla_r) \frac{(\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right) d^3r'$$

$$\begin{aligned} &= 4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}') &= +(\vec{j}(\vec{r}') \cdot \nabla_{r'}) \frac{(\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \end{aligned}$$

$$= \mu_0 \vec{j}(\vec{r})$$

앙페르 법칙

$$= \left[\nabla_{r'} \cdot \left(\frac{(x - x')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \vec{j}(\vec{r}') \right) - \frac{(x - x')(\nabla_{r'} \cdot \vec{j}(\vec{r}'))}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] \hat{x} + \dots$$

$$= 0$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}(\vec{r})$$

$$\int_{\mathcal{A}} (\nabla \times \vec{B}) \cdot d\vec{A} = \oint_{\partial \mathcal{A}} \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

따라서 **스토크스의 정리**를 사용하면
앙페르 법칙에 대한 적분형식을 얻게 됩니다.

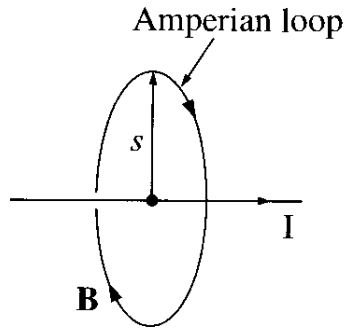
$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}(\vec{r})$$

$$\int_{\mathcal{A}} (\nabla \times \vec{B}) \cdot d\vec{A} = \oint_{\partial \mathcal{A}} \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

$$= \mu_0 \int_{\mathcal{A}} \vec{j} \cdot d\vec{A} = \mu_0 I$$

따라서 **스토크스의 정리**를 사용하면
앙페르 법칙에 대한 **적분형식**을 얻게 됩니다.

예1: 직선 도선

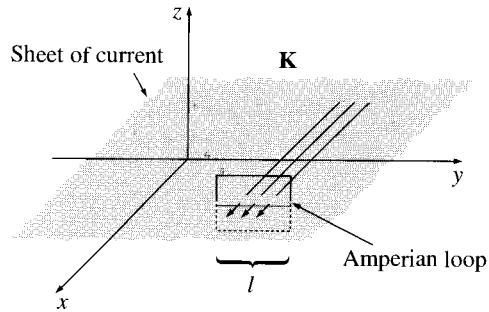


직선 도선의 경우 반지름 s 인 원을 따라 선적분하면 다음 관계를 얻습니다.

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = B \cdot 2\pi s = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi s}$$

예2: 평면 전류

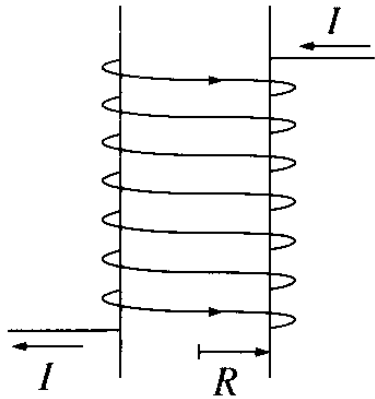


평면 위에 전류밀도 $\vec{K}$ 인 표면 전류가 흐를 때,
수직으로 s 만큼 떨어진 곳에서 너비 ℓ 인
사각형 경로를 따라 선적분하면 다음 관계를 얻습니다.

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = B \cdot 2\ell = \mu_0 K \ell$$

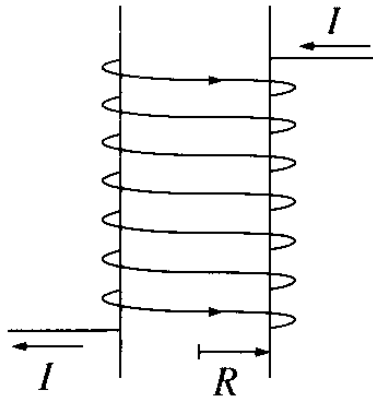
$$B = \frac{\mu_0}{2} K$$

예3: 솔레노이드



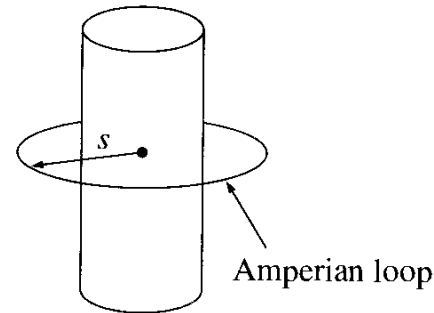
왼쪽과 같이 도선이 규칙적으로 감긴 솔레노이드를 생각합시다.

예3: 솔레노이드



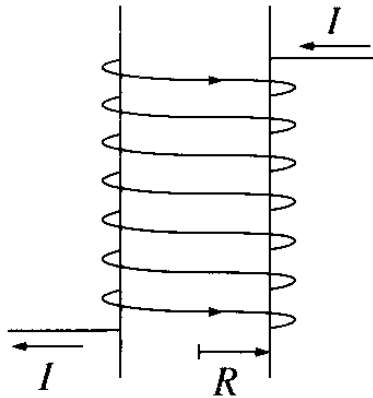
왼쪽과 같이 도선이 규칙적으로 감긴 솔레노이드를 생각합시다.

솔레노이드의 **외부**에서는 다음과 같은 선적분을 고려합니다.



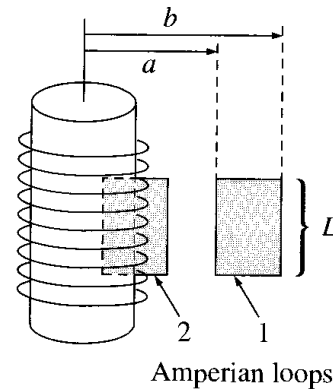
그러면 고리의 내부에 알짜로 흐르는 전류가 없으므로
솔레노이드 외부의 자기장은 0이 된다는 것을 알 수 있습니다.

예3: 솔레노이드



왼쪽과 같이 도선이 규칙적으로 감긴 솔레노이드를 생각합시다.

솔레노이드의 **내부**에서는 다음과 같은 선적분을 고려합니다.

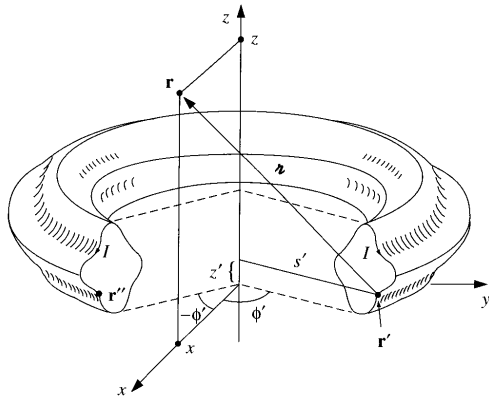


$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = BL = \mu_0 \overset{\text{단위 길이당 도선 수}}{n} IL$$

$$\vec{B} = \mu_0 n I \hat{z}$$

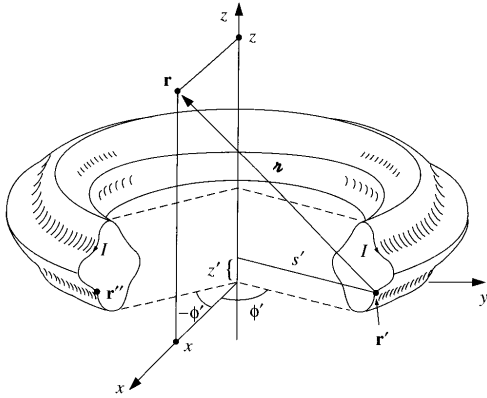
솔레노이드 내부의 자기장

예4: 토로이드



솔레노이드를 원형으로 감은 토로이드를 생각합시다.
마찬가지로 토로이드의 외부에는 자기장이 없고,
토로이드의 중심에서 반지름 s 인 원형 경로를 따라
선적분을 해볼 수 있습니다.

예4: 토로이드



솔레노이드를 원형으로 감은 토로이드를 생각합시다.
 마찬가지로 토로이드의 외부에는 자기장이 없고,
 토로이드의 중심에서 반지름 s 인 원형 경로를 따라
 선적분을 해볼 수 있습니다.

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = B \cdot 2\pi s = \mu_0 \overset{\text{코일을 감은 수}}{NI}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 NI}{2\pi s} \hat{\phi}$$

토로이드 내부의 자기장

흥미롭게도 이것은 반지름 s 에 의존합니다.

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

위와 같은 벡터 퍼텐셜을 도입해 봅시다.

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$$

그러면 먼저 발산에 대한 관계식은 쉽게 만족됩니다.

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{B} &= \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) \\ &= \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J}\end{aligned}$$

그 다음 회전에 대한 관계식을 적용해 봅시다.

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

무한대에서 전류가 흐르지 않는 경우 벡터 퍼텐셜을
위와 같이 가정해 봅시다.

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} =$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int (\vec{j}(\vec{r}') \cdot \nabla_r) \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int (\vec{j}(\vec{r}') \cdot \nabla_r) \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int (\vec{j}(\vec{r}') \cdot \nabla_{r'}) \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int (\vec{j}(\vec{r}') \cdot \nabla_r) \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int (\vec{j}(\vec{r}') \cdot \nabla_{r'}) \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

$$\text{부분적분} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} (\nabla_{r'} \cdot \vec{j}(\vec{r}')) d^3r' - \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot d\vec{A}'$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int (\vec{j}(\vec{r}') \cdot \nabla_r) \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int (\vec{j}(\vec{r}') \cdot \nabla_{r'}) \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

$$\text{부분적분} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} (\nabla_{r'} \cdot \vec{j}(\vec{r}')) d^3r' - \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot d\vec{A}'$$

$= 0$
(정상 전류)

$= 0$
(무한대에서 전류가 0으로 수렴)

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int (\vec{j}(\vec{r}') \cdot \nabla_r) \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int (\vec{j}(\vec{r}') \cdot \nabla_{r'}) \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

$$\text{부분적분} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} (\nabla_{r'} \cdot \vec{j}(\vec{r}')) d^3r' - \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot d\vec{A}'$$

$$= 0$$

$$\begin{array}{c} = 0 \\ \text{(정상 전류)} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} = 0 \\ \text{(무한대에서 전류가 0으로 수렴)} \end{array}$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = -\nabla^2 \vec{A}$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = -\nabla^2 \vec{A}$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{j}(\vec{r}') \nabla_r^2 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = -\nabla^2 \vec{A}$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{j}(\vec{r}') \nabla_r^2 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

$$= +\frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{j}(\vec{r}') 4\pi \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') d^3r'$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = -\nabla^2 \vec{A}$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{j}(\vec{r}') \nabla_r^2 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

$$= +\frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{j}(\vec{r}') 4\pi \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') d^3r'$$

$$= \mu_0 \vec{j}$$

$$\begin{aligned}
\vec{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{I}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} ds' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{K}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} da' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv'
\end{aligned}$$

따라서 벡터 퍼텐셜은 전류 밀도를 사용해서
위와 같이 표현할 수 있습니다.

예1: $\vec{A}$ 를 $\vec{B}$ 의 적분으로 나타내시오.

자기장에 대한 다음 두 방정식을 살펴봅시다.

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

예1: $\vec{A}$ 를 $\vec{B}$ 의 적분으로 나타내시오.

자기장에 대한 다음 두 방정식을 살펴봅시다.

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

이 때, 자기장과 전류의 관계는 아래와 같습니다.

$$\vec{B} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mu_0 \vec{J}(\vec{r}') \times (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} d^3 r'$$

예1: $\vec{A}$ 를 $\vec{B}$ 의 적분으로 나타내시오.

벡터 퍼텐셜에 대한 관계는 오른쪽과 같습니다.

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

$$\nabla \times \vec{A} = \vec{B}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mu_0 \vec{J}(\vec{r}') \times (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} d^3 r'$$

예1: $\vec{A}$ 를 $\vec{B}$ 의 적분으로 나타내시오.

벡터 퍼텐셜에 대한 관계는 오른쪽과 같습니다.

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

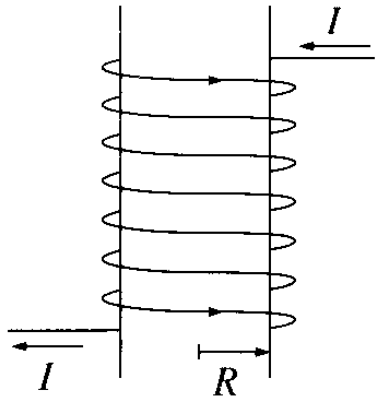
$$\nabla \times \vec{A} = \vec{B}$$

따라서 자연스럽게 아래의 관계식을 얻습니다.

$$\vec{B} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mu_0 \vec{J}(\vec{r}') \times (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} d^3 r'$$

$$\vec{A} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{B}(\vec{r}') \times (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} d^3 r'$$

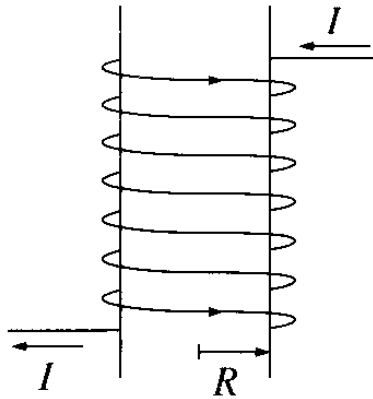
예2: 솔레노이드의 벡터 퍼텐셜



왼쪽과 같이 도선이 규칙적으로 감긴 솔레노이드를 생각합시다.

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{A} = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = \Phi_B$$

예2: 솔레노이드의 벡터 퍼텐셜



왼쪽과 같이 도선이 규칙적으로 감긴 솔레노이드를 생각합시다.

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{A} = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = \Phi_B$$

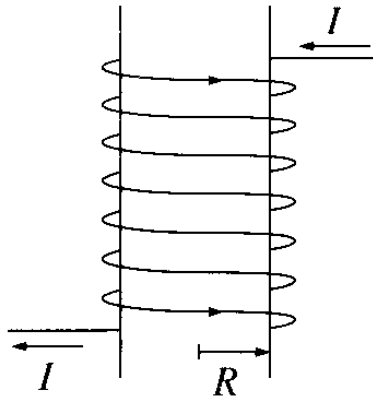
$$= A \cdot 2\pi s$$

$$= \mu_0 n I \pi s^2$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 n I s}{2} \hat{\phi}$$

솔레노이드 내부의 벡터 퍼텐셜

예2: 솔레노이드의 벡터 퍼텐셜



왼쪽과 같이 도선이 규칙적으로 감긴 솔레노이드를 생각합시다.

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{A} = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = \Phi_B$$

$$= A \cdot 2\pi s$$

$$= \mu_0 n I \pi R^2$$

$$\boxed{\vec{A} = \frac{\mu_0 n I R^2}{2s} \hat{\phi}}$$

솔레노이드 외부의 벡터 퍼텐셜

$$= \frac{\Phi_B}{2\pi s} \hat{\phi}$$

예3: 특별한 형태의 벡터 퍼텐셜

이번에는 다음과 같이 벡터 퍼텐셜의 형태가 주어졌다고 합시다.

$$\vec{A} = \frac{g}{r \sin \theta} (\pm 1 - \cos \theta) \hat{\phi}$$

예3: 특별한 형태의 벡터 퍼텐셜

이번에는 다음과 같이 벡터 퍼텐셜의 형태가 주어졌다고 합시다.

$$\vec{A} = \frac{g}{r \sin \theta} (\pm 1 - \cos \theta) \hat{\phi}$$

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_{\phi}) \hat{r}$$

예3: 특별한 형태의 벡터 퍼텐셜

이번에는 다음과 같이 벡터 퍼텐셜의 형태가 주어졌다고 합시다.

$$\vec{A} = \frac{g}{r \sin \theta} (\pm 1 - \cos \theta) \hat{\phi}$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{A} &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_{\phi}) \hat{r} \\ &= \frac{g}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\pm 1 - \cos \theta) \hat{r} \end{aligned}$$

예3: 특별한 형태의 벡터 퍼텐셜

이번에는 다음과 같이 벡터 퍼텐셜의 형태가 주어졌다고 합시다.

$$\vec{A} = \frac{g}{r \sin \theta} (\pm 1 - \cos \theta) \hat{\phi}$$

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_{\phi}) \hat{r}$$

$$= \frac{g}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\pm 1 - \cos \theta) \hat{r}$$

$$= \frac{g}{r^2} \hat{r}$$

$$= \vec{B}$$

예3: 특별한 형태의 벡터 퍼텐셜

이번에는 다음과 같이 벡터 퍼텐셜의 형태가 주어졌다고 합시다.

$$\vec{A} = \frac{g}{r \sin \theta} (\pm 1 - \cos \theta) \hat{\phi}$$

따라서 다음의 관계를 얻습니다.

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 4\pi g \neq 0$$

예3: 특별한 형태의 벡터 퍼텐셜

이번에는 다음과 같이 벡터 퍼텐셜의 형태가 주어졌다고 합시다.

$$\vec{A} = \frac{g}{r \sin \theta} (\pm 1 - \cos \theta) \hat{\phi}$$

따라서 다음의 관계를 얻습니다.

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 4\pi g \neq 0$$

무엇이 잘못된 것일까요?

예3: 특별한 형태의 벡터 퍼텐셜

이번에는 다음과 같이 벡터 퍼텐셜의 형태가 주어졌다고 합시다.

$$\vec{A} = \frac{g}{r \sin \theta} (\pm 1 - \cos \theta) \hat{\phi}$$

이러한 해를 자기 홀극magnetic monopole이라고 부릅니다.

이 해의 문제점은 $\theta = 0$ 또는 $\theta = \pi$ 에서 벡터 퍼텐셜이 발산한다는 것입니다.

따라서 자기장에 대한 가우스 법칙이 성립하지 않아도 이상하지 않습니다.

예3: 특별한 형태의 벡터 퍼텐셜

이번에는 다음과 같이 벡터 퍼텐셜의 형태가 주어졌다고 합시다.

$$\vec{A} = \frac{g}{r \sin \theta} (\pm 1 - \cos \theta) \hat{\phi}$$

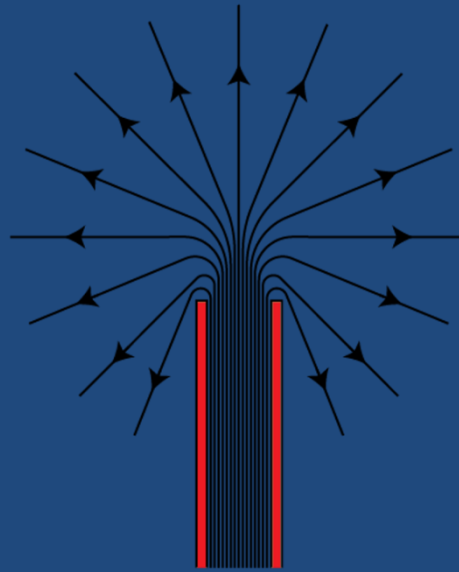
이러한 해를 자기 홀극magnetic monopole이라고 부릅니다.

이 해의 문제점은 $\theta = 0$ 또는 $\theta = \pi$ 에서 벡터 퍼텐셜이 발산한다는 것입니다.

따라서 자기장에 대한 가우스 법칙이 성립하지 않아도 이상하지 않습니다.

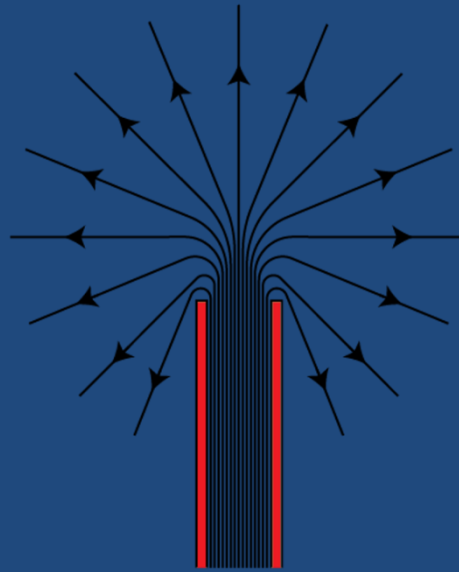
여기에서 디랙은 이 해가 **물리적 의미**를 가질 수 있다고 주장합니다.

디랙의 자기 홀극 magnetic monopole



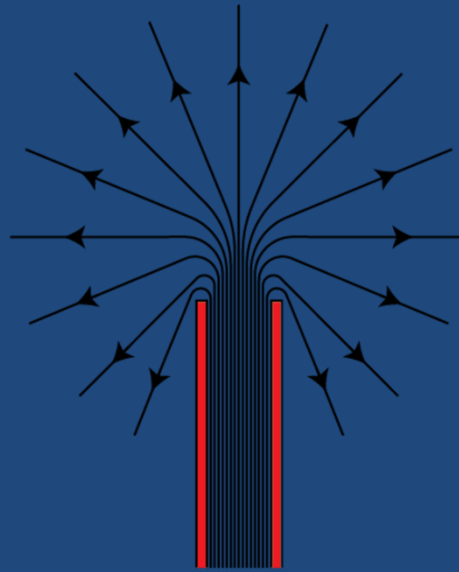
디랙은 1931년 특이점을 갖는 벡터 퍼텐셜을 가정함으로써 자기 홀극의 이론적 가능성을 생각했습니다.

디랙의 자기 홀극 magnetic monopole



여기에서 **특이점**이란 자기력선이 아주 좁은 공간으로 들어오는 곳이라고 생각하면 됩니다.

디랙의 자기 홀극 magnetic monopole

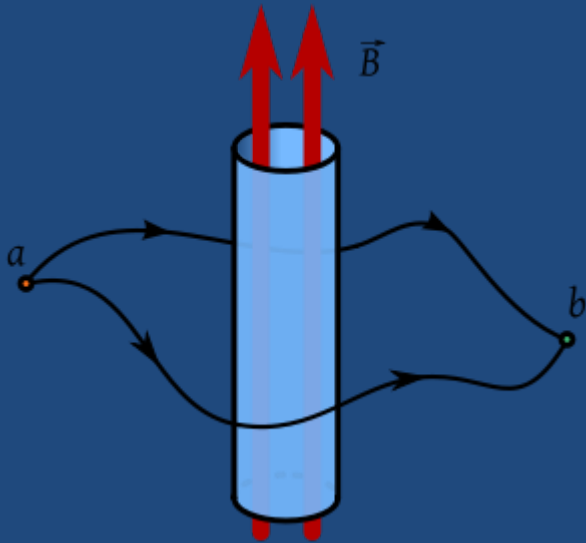


자기력선이 들어오는 좁은 공간이 엄청나게 좁아지게 된다면
우리는 물리적으로 이 곳을 측정할 수 없을 것입니다.
따라서 우리는 사실상 자기 홀극을 보는 것으로
착각할 수도 있을 것입니다.

하지만 디랙은 이런 거짓말이 통할 수 없다는 것을
깨닫게 됩니다.

아하라노프-봄 효과에 의해
자기장을 직접 볼 수는 없어도
벡터 퍼텐셜의 존재를 측정할 수 있기 때문입니다.

자기 홀극과 아하라노프-봄 효과



$$\vec{A} = \frac{\Phi}{2\pi r} \hat{\phi} \quad \Phi = \pi a^2 B$$

$$(\text{위상차}) = \frac{q}{\hbar} \oint \vec{A}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' = \frac{q}{\hbar} \Phi$$

여기에서 디랙은 마지막 가능성을 생각합니다.
만일 위상차가 $2\pi n$ 이 된다면, 아하라노프-봄 효과조차도
그 존재를 파악할 수 없을 것입니다.

자기 홀극과 아하라노프-봄 효과

$$(\text{위상차}) = \frac{q}{\hbar} \oint \vec{A}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' = \frac{q}{\hbar} \Phi$$

자기 선속 Φ 는 자기하(magnetic charge) q_M 에 비례하므로

$$q q_M \propto n$$

이라는 결과를 얻게 됩니다.

디랙의 양자화 조건

$$(\text{위상차}) = \frac{q}{\hbar} \oint \vec{A}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' = \frac{q}{\hbar} \Phi$$

$$q q_M \propto n$$

따라서 자하는 전하에 반비례하고
더 나아가서 불연속적인 값을 갖게 됩니다.
이것을 자기 홀극에 대한
디랙의 양자화 조건이라고 합니다.

자기 홀극은 이론적인 맥락에서
자연스럽게 존재할 수 있다는 것이 알려져 있습니다.
디랙의 양자화 조건은 자기 홀극과 관련해서
수학적으로 요청되는 조건을 반영하고 있습니다.

한 편, 자기 홀극은 아직까지 발견되지 않았습니다.
자기 홀극이 이론적으로는 존재해야 하지만
실험적으로는 발견되지 않는다는 사실로부터
초기 우주론에 대한 중요한 단서를 얻을 수 있습니다.

$$B_+^\perp = B_-^\perp$$

$$B_+^\parallel - B_-^\parallel = \mu_0 K$$

$$\frac{\partial \vec{A}_+}{\partial n} - \frac{\partial \vec{A}_-}{\partial n} = -\mu_0 \vec{K}$$

전기장과 유사하게 자기장도 위와 같은
경계조건을 만족해야 합니다.

$$B_+^\perp = B_-^\perp$$

$$B_+^\parallel - B_-^\parallel = \mu_0 K$$

$$\frac{\partial \vec{A}_+}{\partial n} - \frac{\partial \vec{A}_-}{\partial n} = -\mu_0 \vec{K}$$

$$E_+^\parallel = E_-^\parallel$$

$$E_+^\perp - E_-^\perp = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$\frac{\partial V_+}{\partial n} - \frac{\partial V_-}{\partial n} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

전기장의 경계조건과 비교해보면
흥미로운 대응 관계를 볼 수 있습니다.

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{s}'$$

마지막으로 다음과 같이 전류가 일정한 도선의 벡터 퍼텐셜에 대한 **다중극 전개**를 살펴봅시다.

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{s}'$$

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \simeq \frac{1}{r} \left(1 - \frac{\epsilon}{2} + \frac{3}{8} \epsilon^2 + \dots \right)$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{s}'$$

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \simeq \frac{1}{r} \left(1 - \frac{\epsilon}{2} + \frac{3}{8} \epsilon^2 + \dots \right)$$

$$= \frac{1}{r} \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r'}{r} \right) \left(\frac{r'}{r} - 2 \cos \theta' \right) + \frac{3}{8} \left(\frac{r'}{r} \right)^2 \left(\frac{r'}{r} - 2 \cos \theta' \right)^2 + \dots \right)$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{s}'$$

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \simeq \frac{1}{r} \left(1 - \frac{\epsilon}{2} + \frac{3}{8} \epsilon^2 + \dots \right)$$

$$= \frac{1}{r} \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r'}{r} \right) \left(\frac{r'}{r} - 2 \cos \theta' \right) + \frac{3}{8} \left(\frac{r'}{r} \right)^2 \left(\frac{r'}{r} - 2 \cos \theta' \right)^2 + \dots \right)$$

$$= \frac{1}{r} \left(1 + \left(\frac{r'}{r} \right) \cos \theta' + \left(\frac{r'}{r} \right)^2 \left(\frac{3 \cos^2 \theta' - 1}{2} \right) + \dots \right)$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{s}'$$

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \simeq \frac{1}{r} \left(1 - \frac{\epsilon}{2} + \frac{3}{8} \epsilon^2 + \dots \right)$$

$$= \frac{1}{r} \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r'}{r} \right) \left(\frac{r'}{r} - 2 \cos \theta' \right) + \frac{3}{8} \left(\frac{r'}{r} \right)^2 \left(\frac{r'}{r} - 2 \cos \theta' \right)^2 + \dots \right)$$

$$= \frac{1}{r} \left(1 + \left(\frac{r'}{r} \right) \cos \theta' + \left(\frac{r'}{r} \right)^2 \left(\frac{3 \cos^2 \theta' - 1}{2} \right) + \dots \right)$$

$$= \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r} \right)^n P_n(\cos \theta')$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{s}'$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \oint (r')^n P_n(\cos \theta') d\vec{s}'$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{s}'$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \oint (r')^n P_n(\cos \theta') d\vec{s}'$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\frac{1}{r} \oint d\vec{s}' + \frac{1}{r^2} \oint r' \cos \theta' d\vec{s}' + \dots \right]$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{s}'$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \oint (r')^n P_n(\cos \theta') d\vec{s}'$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\underbrace{\frac{1}{r} \oint d\vec{s}'}_{\text{홀극} \sim \frac{1}{r}} + \underbrace{\frac{1}{r^2} \oint r' \cos \theta' d\vec{s}'}_{\text{쌍극자} \sim \frac{1}{r^2}} + \dots \right]$$

$\rightarrow 0$

$$\vec{A}_{dipole}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} I \oint r' \cos \theta' d\vec{s}'$$

$$\begin{aligned}\vec{A}_{dipole}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi r^2} I \oint r' \cos \theta' d\vec{s}' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi r^2} I \oint (\hat{r} \cdot \vec{r}') d\vec{s}'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{A}_{dipole}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi r^2} I \oint r' \cos \theta' d\vec{s}' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi r^2} I \oint (\hat{r} \cdot \vec{r}') d\vec{s}' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi r^2} I \left(-\hat{r} \times \int d\vec{A} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{A}_{dipole}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi r^2} I \oint r' \cos \theta' d\vec{s}' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi r^2} I \oint (\hat{r} \cdot \vec{r}') d\vec{s}' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi r^2} I \left(-\hat{r} \times \int d\vec{A} \right) \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi r^2} \vec{m} \times \hat{r}
\end{aligned}$$

$\vec{m} \equiv I\vec{A}$: 자기쌍극자모멘트

점에 위치한 쌍극자

$$\vec{A}_{dipole}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 m \sin \theta}{4\pi r^2} \hat{\phi}$$

점에 위치한 쌍극자

$$\vec{A}_{dipole}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 m \sin \theta}{4\pi r^2} \hat{\phi}$$

$$\vec{B}_{dipole}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A}_{dipole}(\vec{r})$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi r^3} (3 (\vec{m} \cdot \hat{r}) \hat{r} - \vec{m}) + \frac{2\mu_0}{3} \vec{m} \delta^3(\vec{r})$$

감사합니다