

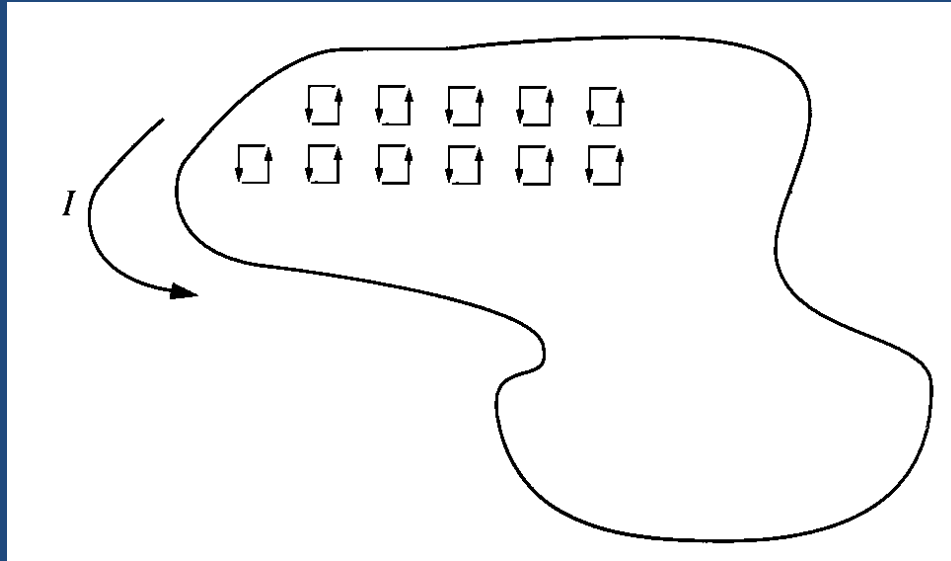
제6장

물질 속의 자기장

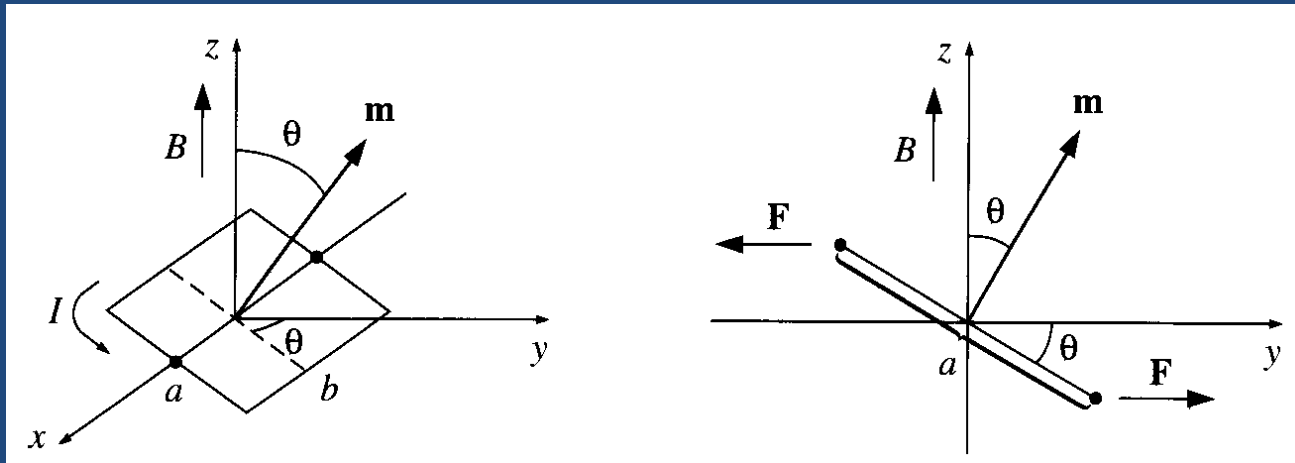
이제 물질 속의 자기장과 물질의 자성에 대해 살펴봅시다.
이것은 자기 쌍극자에 의해서 간단하게 근사될 수 있습니다.

먼저 상자성과 반자성은 어떤 이유에서 생길까요?
상자성은 쌍극자가 외부 자기장과 같은 방향으로,
반자성은 반대 방향으로 정렬될 때 생기게 됩니다.

먼저 상자성의 가능성을 살펴봅시다.



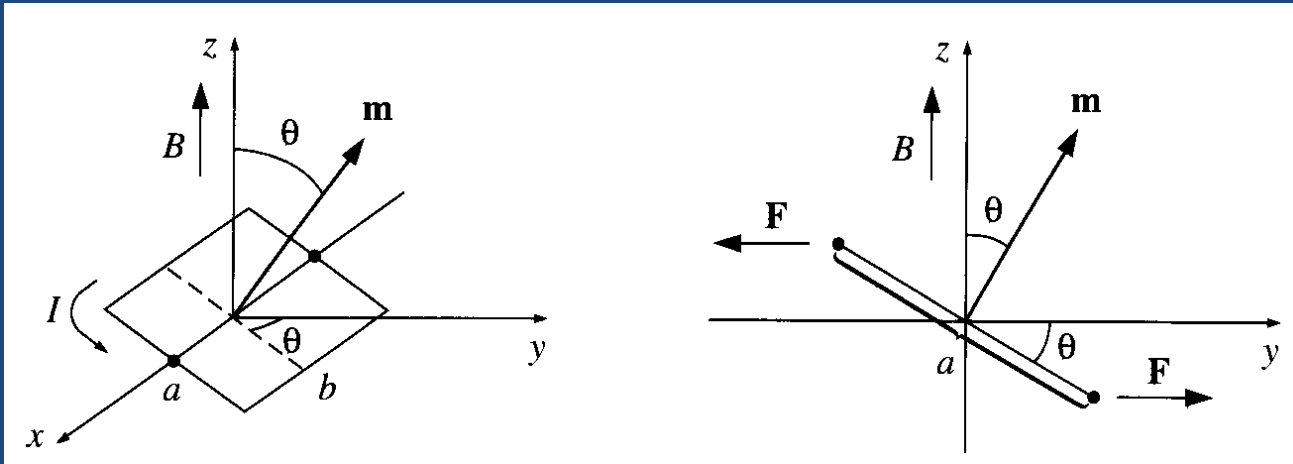
임의의 도선이 외부 자기장에 의해 받는 힘은
그림과 같이 쌍극자에 의한 힘으로 나누어 살펴볼 수 있습니다.



$$\vec{N} = aF \sin \theta \hat{x}$$

$$F = IbB$$

자기 쌍극자는 외부 자기장에 의해 토크를 받게 됩니다.



$$\vec{N} = aF \sin \theta \hat{x}$$

$$F = IbB$$

$$\vec{N} = mB \sin \theta \hat{x} = \vec{m} \times \vec{B}$$

이 토크에 의해 외부 자기장과 같은 방향으로 정렬됩니다.
이것은 상자성의 원천이 됩니다.

$$\vec{F} = I \oint d\vec{\ell} \times \vec{B} \stackrel{\text{고른 자기장에서}}{=} I \left(\oint d\vec{\ell} \right) \times \vec{B} = 0$$

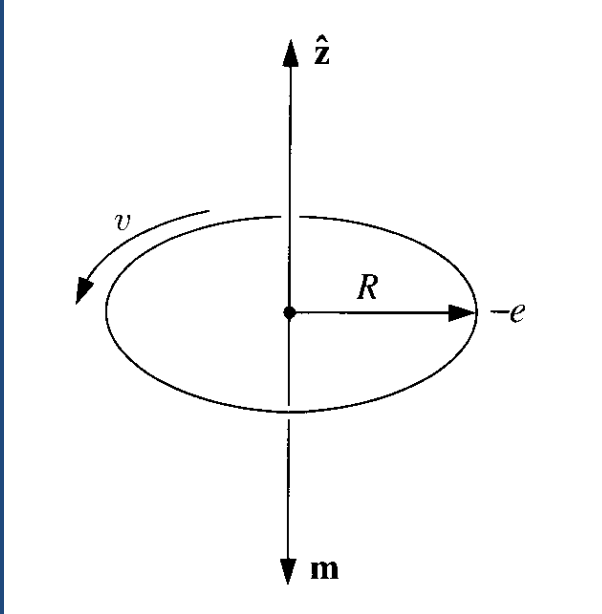
고른 자기장에서는 알짜힘이 없지만
고르지 않은 경우에는 알짜힘이 생기게 됩니다.

$$\vec{F} = I \oint d\vec{\ell} \times \vec{B} \stackrel{\text{고른 자기장에서}}{=} I \left(\oint d\vec{\ell} \right) \times \vec{B} = 0$$

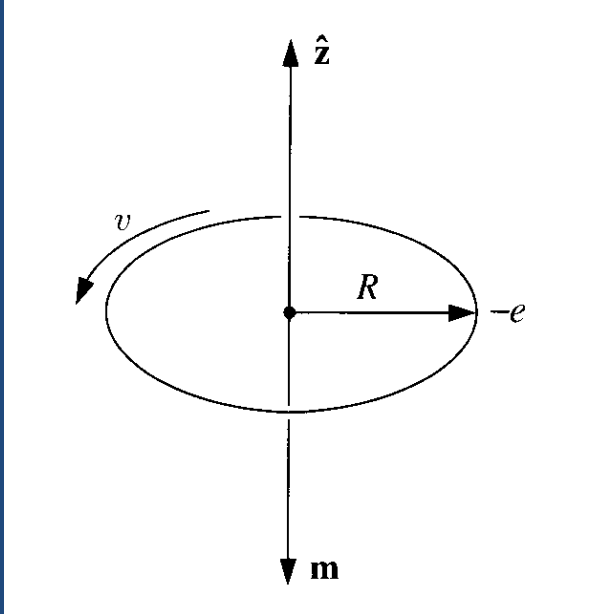
$$\vec{F} = \nabla(\vec{m} \cdot \vec{B})$$

고른 자기장에서는 알짜힘이 없지만
고르지 않은 경우에는 알짜힘이 생기게 됩니다.

그 다음 반자성의 가능성을 살펴봅시다.

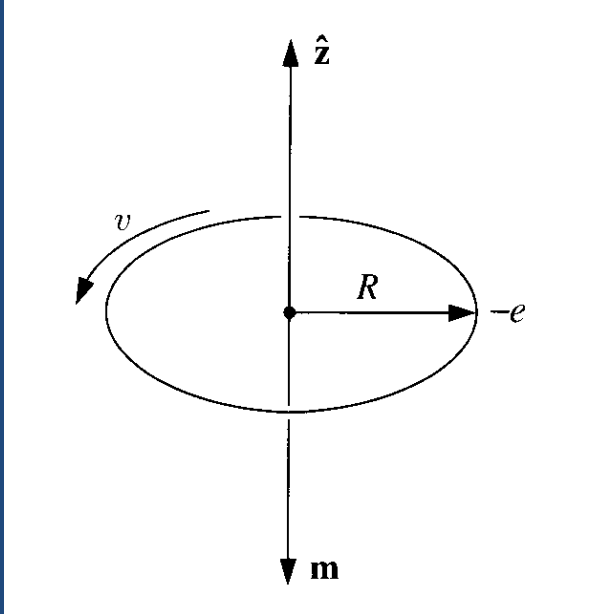


전자가 궤도 운동을 할 때,
외부 자기장에 의해 어떤 변화가 생기는지 살펴봅시다.



$$\vec{m} = -\frac{1}{2}evR\hat{z}$$

먼저 자기 쌍극자 모멘트는 위와 같이 주어집니다.



$$\vec{m} = -\frac{1}{2}evR\hat{z}$$

자기장이 없을 때

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{mv^2}{R}$$

자기장이 있을 때

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^2} + ev'B = \frac{mv'^2}{R}$$

한 편, 자기장이 있는 경우와 없는 경우,
알짜힘 = 구심력의 관계는 위와 같습니다.

$$\vec{m} = -\frac{1}{2}evR\hat{z}$$

자기장이 없을 때

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{mv^2}{R}$$

자기장이 있을 때

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^2} + ev'B = \frac{mv'^2}{R}$$

$$\Delta v \equiv v' - v \simeq \frac{eRB}{2m}$$

따라서 외부 자기장에 의해 속도가 증가하게 됩니다.

$$\vec{m} = -\frac{1}{2}evR\hat{z}$$

$$\Delta v \equiv v' - v \simeq \frac{eRB}{2m}$$

$$\begin{aligned}\Delta\vec{m} &= -\frac{1}{2}e(\Delta v)R\hat{z} \\ &= -\frac{e^2R^2}{4m}\vec{B}\end{aligned}$$

이것을 통해 자기 쌍극자 모멘트의 **변화**를 살펴볼 수 있습니다.
 이 변화는 외부 자기장의 반대 방향이 됩니다.
 이것은 **반자성**의 원천이 됩니다.

이러한 상자성과 반자성은 실제로는 양자역학적인 현상입니다.
실제 물질에서는 두 효과가 경합해서
물질의 자성이 결정되게 됩니다.

자기 쌍극자가 연속으로 분포하고 있다면
전기장에서도 유사하게
다음과 같은 단위부피당 쌍극자모멘트를 정의하는 게 편리합니다.
이것을 자화밀도magnetization라고 합니다.

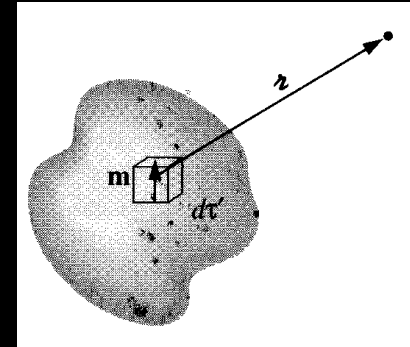
$$\vec{M}$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2}$$

이것을 사용해서 벡터 퍼텐셜을 다시 표현해 봅시다.

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \widehat{(\vec{r} - \vec{r}')}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2}$$

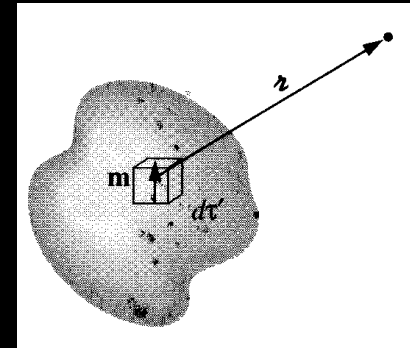
$$\rightarrow \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times \widehat{(\vec{r} - \vec{r}')}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} d^3r'$$



$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \widehat{(\vec{r} - \vec{r}')}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2}$$

$$\rightarrow \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times \widehat{(\vec{r} - \vec{r}')}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} d^3r'$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{M}(\vec{r}') \times \left(\nabla_{r'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) d^3r'$$

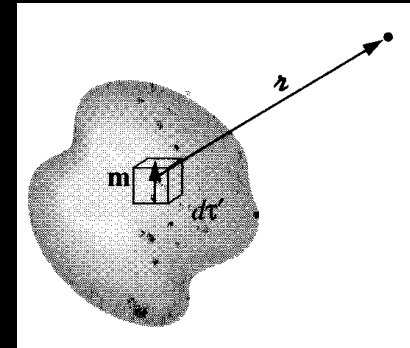


$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2}$$

$$\rightarrow \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} d^3r'$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{M}(\vec{r}') \times \left(\nabla_{r'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) d^3r'$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\int_V \frac{\nabla_{r'} \times \vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' - \int_V \nabla_{r'} \times \left(\frac{\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) d^3r' \right]$$



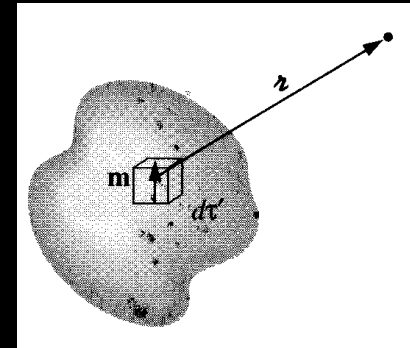
$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2}$$

$$\rightarrow \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} d^3r'$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{M}(\vec{r}') \times \left(\nabla_{r'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) d^3r'$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\int_V \frac{\nabla_{r'} \times \vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' - \int_V \nabla_{r'} \times \left(\frac{\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) d^3r' \right]$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\int_V \frac{\nabla_{r'} \times \vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' + \oint_{\mathcal{A}} \left(\frac{\vec{M}(\vec{r}') \times \hat{n}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dA' \right]$$



$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2}$$

$$\rightarrow \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\int_V \frac{\nabla_{r'} \times \vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' + \oint_{\mathcal{A}} \left(\frac{\vec{M}(\vec{r}') \times \hat{n}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dA' \right]$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\int_V \frac{\vec{J}_b(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' + \oint_{\mathcal{A}} \left(\frac{\vec{K}_b(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dA' \right]$$

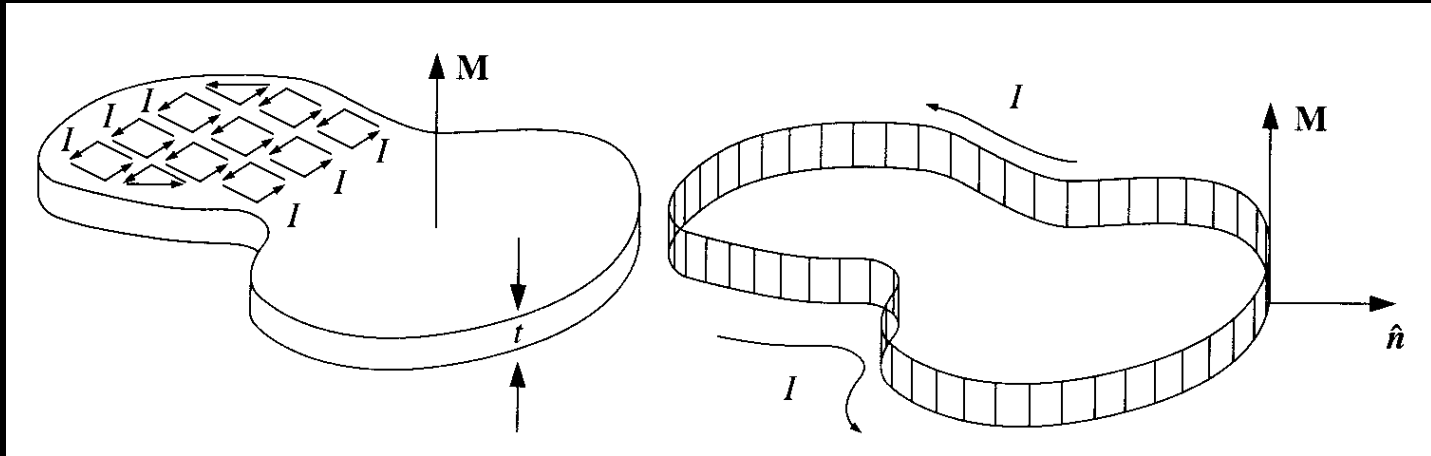
$$\vec{J}_b \equiv \nabla \times \vec{M}(\vec{r})$$

$$\vec{K}_b \equiv \vec{M}(\vec{r}) \times \hat{n}$$

실제 전류에 의한 효과가 아니므로
이것을 **속박전류** bound current라고 합니다.

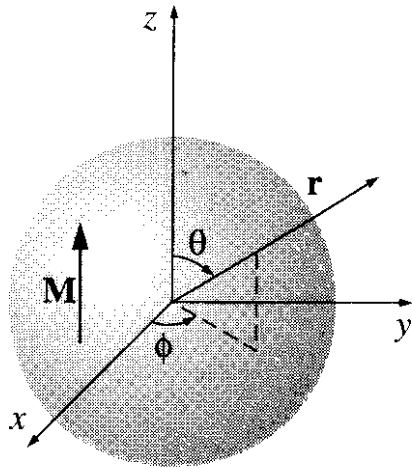
$$\begin{aligned}
\vec{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \\
&\rightarrow \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\int_{\mathcal{V}} \frac{\nabla_{\vec{r}'} \times \vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' + \oint_{\mathcal{A}} \left(\frac{\vec{M}(\vec{r}') \times \hat{n}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dA' \right] \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\int_{\mathcal{V}} \frac{\vec{J}_b(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' + \oint_{\mathcal{A}} \left(\frac{\vec{K}_b(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dA' \right]
\end{aligned}$$

따라서 쌍극자들의 분포가 만드는 벡터 퍼텐셜은
속박된 전류가 만드는 벡터 퍼텐셜과 같습니다.



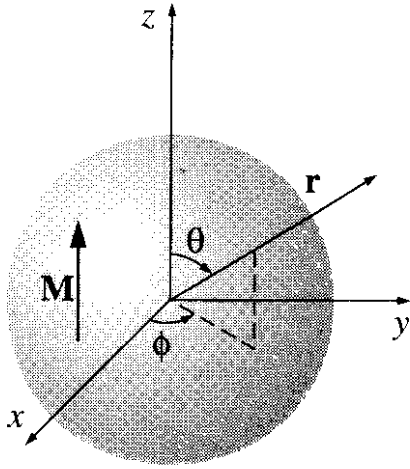
균일한 자화 밀도의 경우 내부의 전하 밀도는 사라지고
표면의 전류만 남게 됩니다.

예: 고르게 자화된 공



한 방향으로 고르게 자화된 공을 생각합시다.

예: 고르게 자화된 공

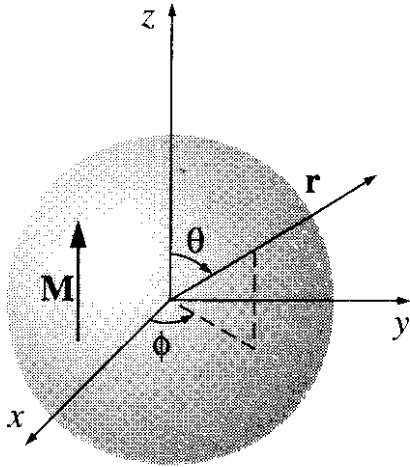


한 방향으로 고르게 자화된 공을 생각합시다.

$$\vec{J}_b = \nabla \times \vec{M} = 0$$

$$\vec{K}_b = \vec{M} \times \hat{n} = M \sin \theta \hat{\phi}$$

예: 고르게 자화된 공



한 방향으로 고르게 자화된 공을 생각합시다.

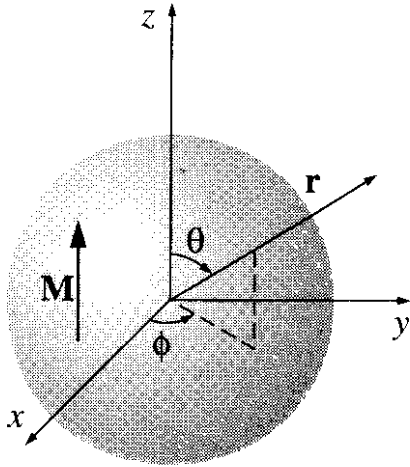
$$\vec{J}_b = \nabla \times \vec{M} = 0$$

$$\vec{K}_b = \vec{M} \times \hat{n} = M \sin \theta \hat{\phi}$$

이것은 균일한 표면 전하가 회전하면서 만들어내는 자기장으로 생각할 수 있습니다.

$$\vec{B} = \frac{2}{3} \mu_0 \vec{M} \quad (\text{내부})$$

예: 고르게 자화된 공



한 방향으로 고르게 자화된 공을 생각합시다.

$$\vec{J}_b = \nabla \times \vec{M} = 0$$

$$\vec{K}_b = \vec{M} \times \hat{n} = M \sin \theta \hat{\phi}$$

이것은 균일한 표면 전하가 회전하면서 만들어내는 자기장으로 생각할 수 있습니다.

$$\vec{B} = \frac{2}{3} \mu_0 \vec{M} \quad (\text{내부})$$

외부에서는 다음과 같은 쌍극자가 만들어내는 자기장을 고려하면 됩니다.

$$\vec{m} = \frac{4}{3} \pi R^3 \vec{M}$$

$$\vec{J} = \vec{J}_b + \vec{J}_f$$

총 전류밀도는 속박전류와 자유전류의 합으로 기술됩니다.

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} &= \vec{J} = \vec{J}_b + \vec{J}_f \\ &= \nabla \times \vec{M} + \vec{J}_f\end{aligned}$$

따라서 앙페르 법칙은 다음과 같습니다.

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} &= \vec{J} = \vec{J}_b + \vec{J}_f \\ &= \nabla \times \vec{M} + \vec{J}_f\end{aligned}$$

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \right) = \vec{J}_f$$

또는 자유전류의 밀도에 대해 위와 같이 쓸 수 있습니다.

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} &= \vec{J} = \vec{J}_b + \vec{J}_f \\ &= \nabla \times \vec{M} + \vec{J}_f\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla \times \left(\underbrace{\frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}}_{\equiv \vec{H}} \right) &= \vec{J}_f\end{aligned}$$

여기에서 H-장H-field을 정의할 수 있습니다.

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_f$$

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = I_f$$

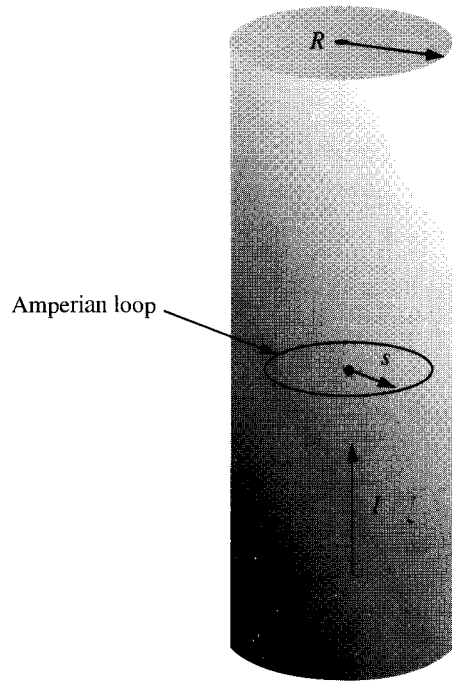
그러면 새로운 형태의 앙페르 법칙을
H-장을 사용해서 적을 수 있습니다.
그러면 방정식의 우변은 오직 자유전류에 대한 것이 됩니다.

$$H_+^\perp - H_-^\perp = -(M_+^\perp - M_-^\perp)$$

$$\vec{H}_+^\parallel - \vec{H}_-^\parallel = \vec{K}_f \times \hat{n}$$

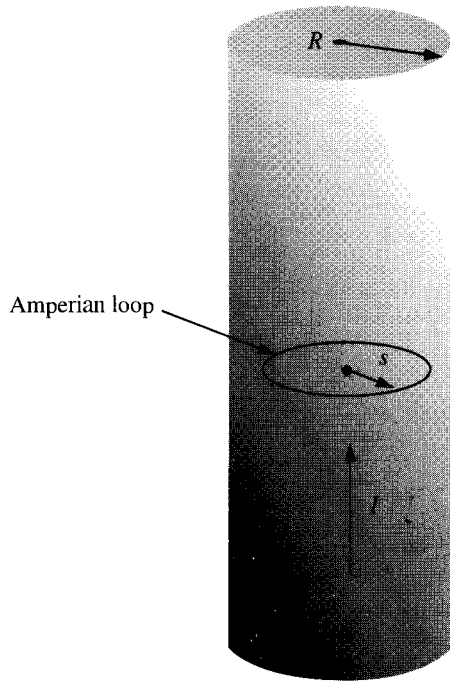
그리고 H-장에 대한 경계조건은
다음과 같이 됩니다.

예: 도선 내부의 H-장



H-장을 계산하기 위해 왼쪽과 같은 앙페르 고리를 잡아 봅시다.

예: 도선 내부의 H-장

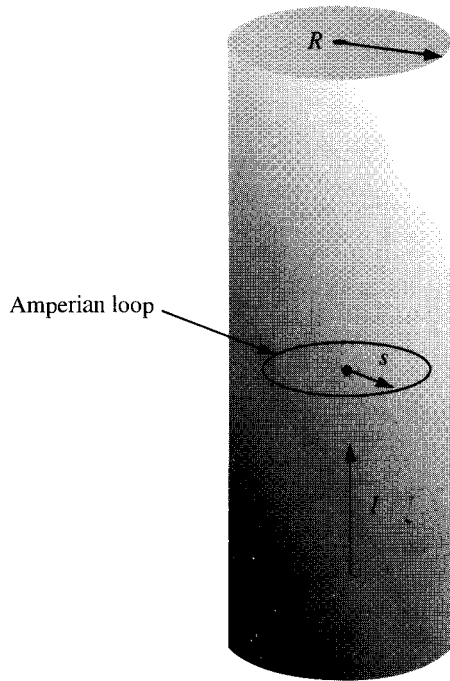


H-장을 계산하기 위해 왼쪽과 같은 앙페르 고리를 잡아 봅시다.

$$H \cdot 2\pi s = I_f = I \frac{\pi s^2}{\pi R^2}$$

$$\vec{H} = \frac{Is}{2\pi R^2} \hat{\phi} \quad \text{도선 내부}$$

예: 도선 내부의 H-장



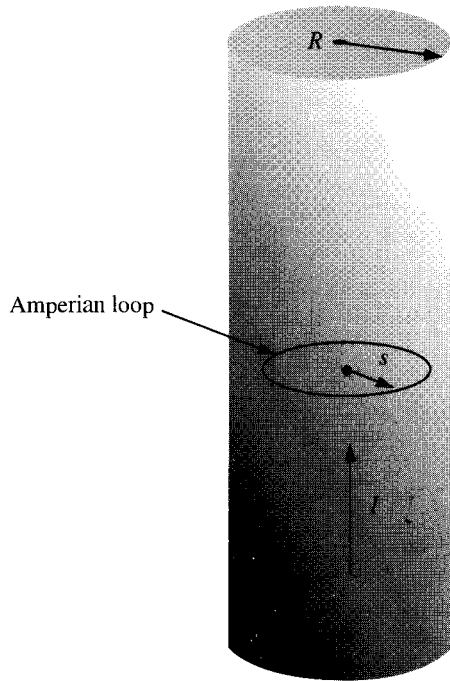
H-장을 계산하기 위해 왼쪽과 같은 앙페르 고리를 잡아 봅시다.

$$H \cdot 2\pi s = I_f = I \frac{\pi s^2}{\pi R^2}$$

$$\vec{H} = \frac{Is}{2\pi R^2} \hat{\phi} \quad \text{도선 내부}$$

자기장과 자화 밀도의 관계를 알지 못하면
일단 도선 내부에서는 자기장을 구할 수 없습니다.

예: 도선 내부의 H-장



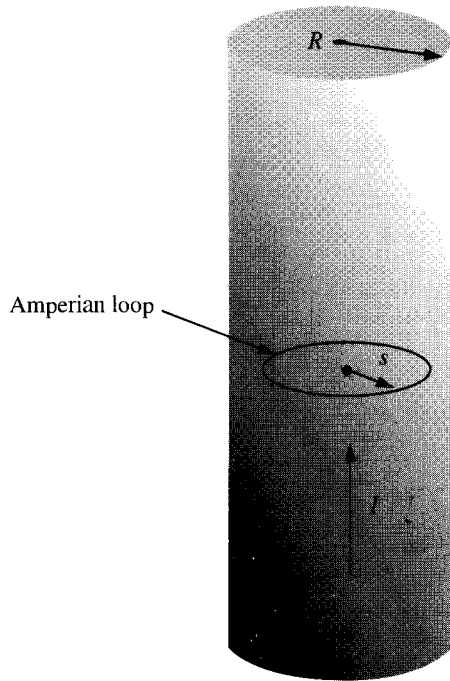
도선 외부에서도 같은 일을 할 수 있습니다.

$$H \cdot 2\pi s = I_f = I$$

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi s} \hat{\phi}$$

도선 외부

예: 도선 내부의 H-장



도선 외부에서도 같은 일을 할 수 있습니다.

$$H \cdot 2\pi s = I_f = I$$

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi s} \hat{\phi} \quad \text{도선 외부}$$

도선 외부에는 물질이 없으므로 다음과 같이
자기장을 구할 수 있습니다.

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \hat{\phi}$$

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

만일 자화밀도가 자기장에 선형적으로 비례하는 관계에 있다면,
즉 **선형매질**이라면, 기술 방식이 좀 더 단순해집니다.

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

자기감수율

이 때의 비례상수를 자기 감수율magnetic susceptibility이라고 합니다.

Material	Susceptibility	Material	Susceptibility
<i>Diamagnetic:</i>		<i>Paramagnetic:</i>	
Bismuth	-1.6×10^{-4}	Oxygen	1.9×10^{-6}
Gold	-3.4×10^{-5}	Sodium	8.5×10^{-6}
Silver	-2.4×10^{-5}	Aluminum	2.1×10^{-5}
Copper	-9.7×10^{-6}	Tungsten	7.8×10^{-5}
Water	-9.0×10^{-6}	Platinum	2.8×10^{-4}
Carbon Dioxide	-1.2×10^{-8}	Liquid Oxygen (-200° C)	3.9×10^{-3}
Hydrogen	-2.2×10^{-9}	Gadolinium	4.8×10^{-1}

자기 감수율은 상자성체에서는 양수,
반자성체에서는 음수가 됩니다.

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

그러면 자기장을 다시 적을 수 있습니다.

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \\ &= \mu_0 (\vec{H} + \chi_m \vec{H})\end{aligned}$$

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \\ &= \mu_0 (\vec{H} + \chi_m \vec{H}) \\ &= \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H}\end{aligned}$$

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

$$= \mu_0 (\vec{H} + \chi_m \vec{H})$$

$$= \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H}$$

$$= \mu_0 \kappa_m \vec{H}$$

상대 투자율relative permeability

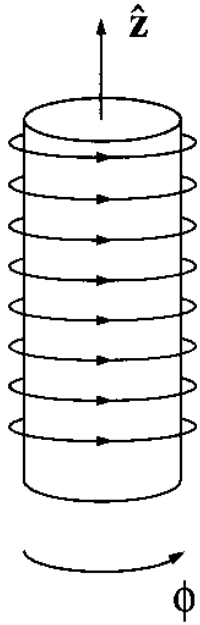
$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \\ &= \mu_0 (\vec{H} + \chi_m \vec{H}) \\ &= \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} \\ &= \mu_0 \kappa_m \vec{H}\end{aligned}$$

투자율 permeability

$$= \mu \vec{H}$$

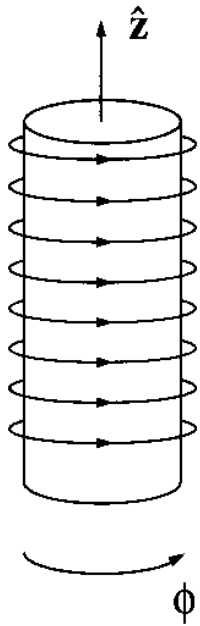
예: 솔레노이드



솔레노이드 내부에 물질이 들어있다고 합시다.
솔레노이드 내부의 H-장은 다음과 같습니다.

$$\vec{H} = nI\hat{z}$$

예: 솔레노이드



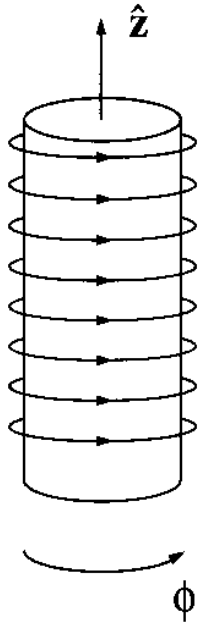
솔레노이드 내부에 물질이 들어있다고 합시다.
솔레노이드 내부의 H-장은 다음과 같습니다.

$$\vec{H} = nI\hat{z}$$

선형 매질을 가정하면 자기장은 다음과 같습니다.

$$\vec{B} = \mu_0(1 + \chi_m)nI\hat{z}$$

예: 솔레노이드



솔레노이드 내부에 물질이 들어있다고 합시다.
솔레노이드 내부의 H-장은 다음과 같습니다.

$$\vec{H} = nI\hat{z}$$

선형 매질을 가정하면 자기장은 다음과 같습니다.

$$\vec{B} = \mu_0(1 + \chi_m)nI\hat{z}$$

이 때, 속박 표면 전류는 다음과 같습니다.

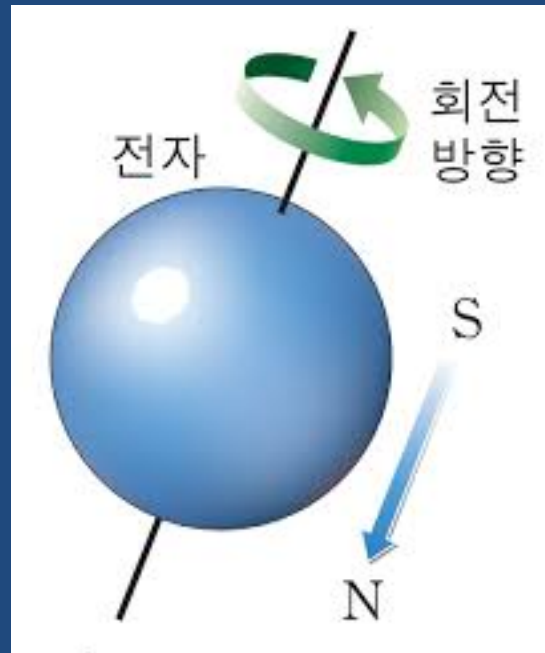
$$\vec{K}_b = \vec{M} \times \hat{n} = \chi_m nI\hat{\phi}$$

마지막으로 물질의 자성에 대한 내용을
다시 한 번 살펴보도록 하겠습니다.

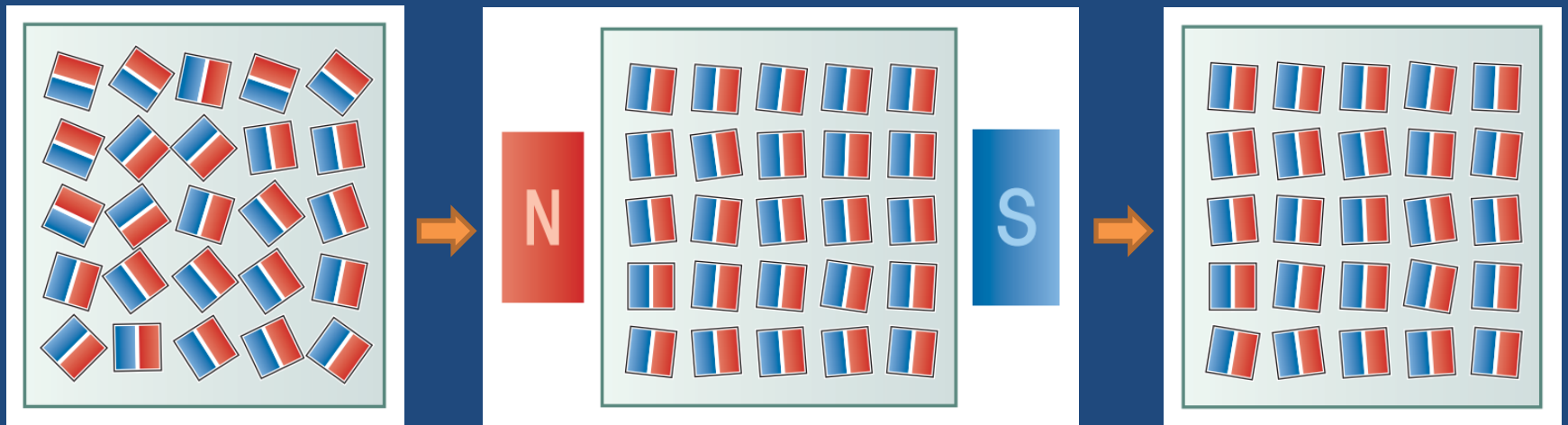
$$dW = -p_E \cdot dE$$

$$dW = -m \cdot dB$$

전기 쌍극자 및 자기 쌍극자가 한 일

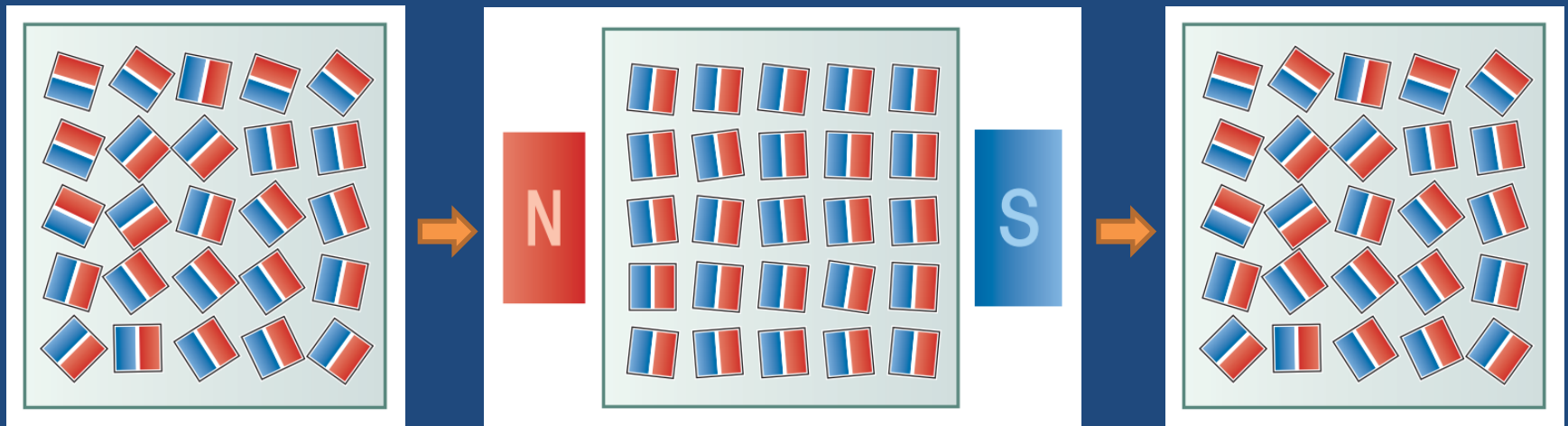


물질의 자성의 원천은 **스핀**에 있습니다.
스핀은 **자기 쌍극자 모멘트**를 형성합니다.



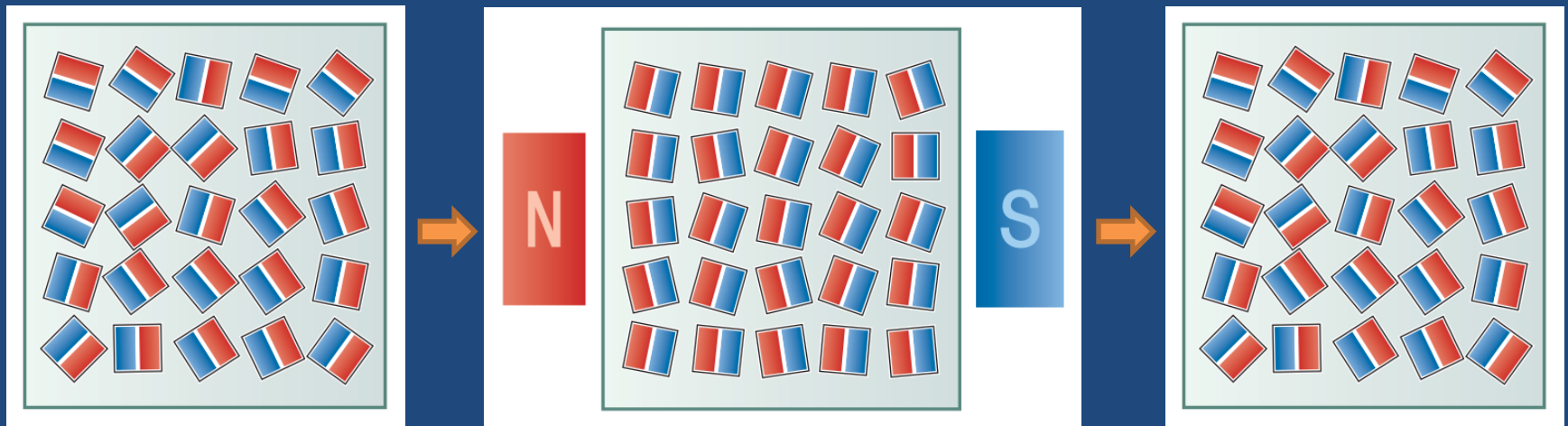
물질의 자성

강자성ferromagnetism의 경우 외부 자기장이 스핀을 정렬시키고 나면
외부 자기장이 사라진 뒤에도 정렬된 스핀이 유지됩니다.



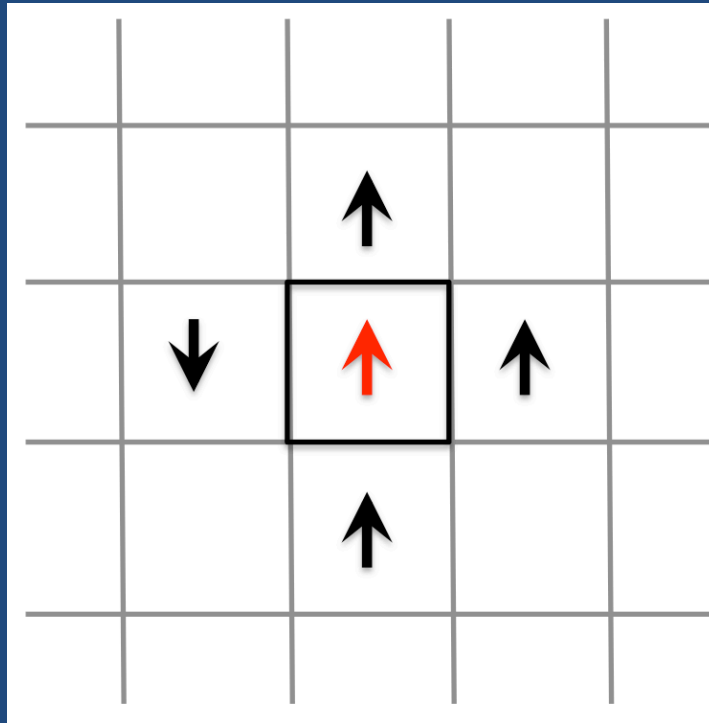
물질의 자성

상자성paramagnetism의 경우 외부 자기장이 존재하는 경우에만 스핀이 정렬됩니다.



물질의 자성

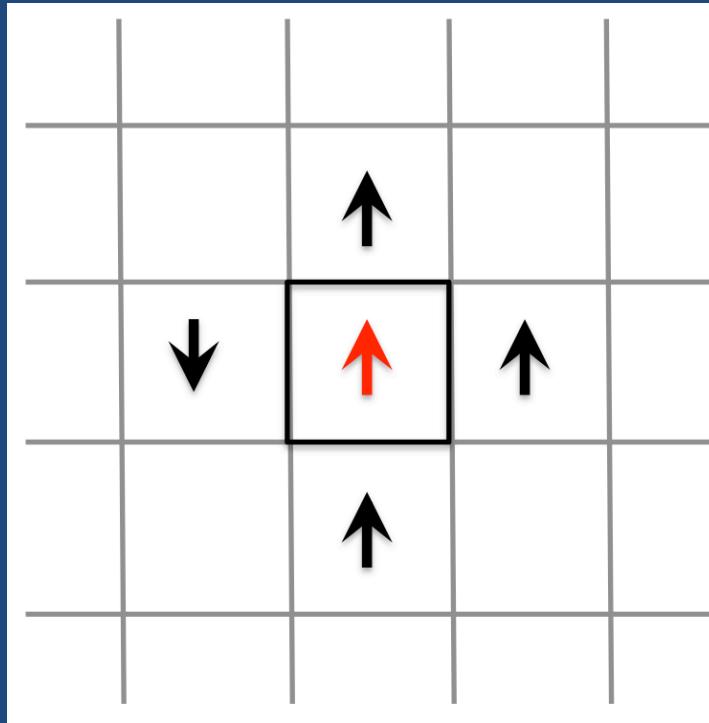
반자성diamagnetism의 경우 외부 자기장에 대한 반발력으로
유도 자기장이 생겨서 자기장을 소멸시키게 됩니다.



물질이 서로 다른 자성을 갖는 이유는
스핀들 사이의 상호작용에 있습니다.

$$\chi \approx \frac{\mu_0 M}{B} \propto \frac{1}{T}$$

상자성의 경우, 스핀들이 서로 상호작용하지 않으면
외부 자기장과 열적 요동의 두 효과만
서로 경합하게 됩니다 (퀴리의 법칙).



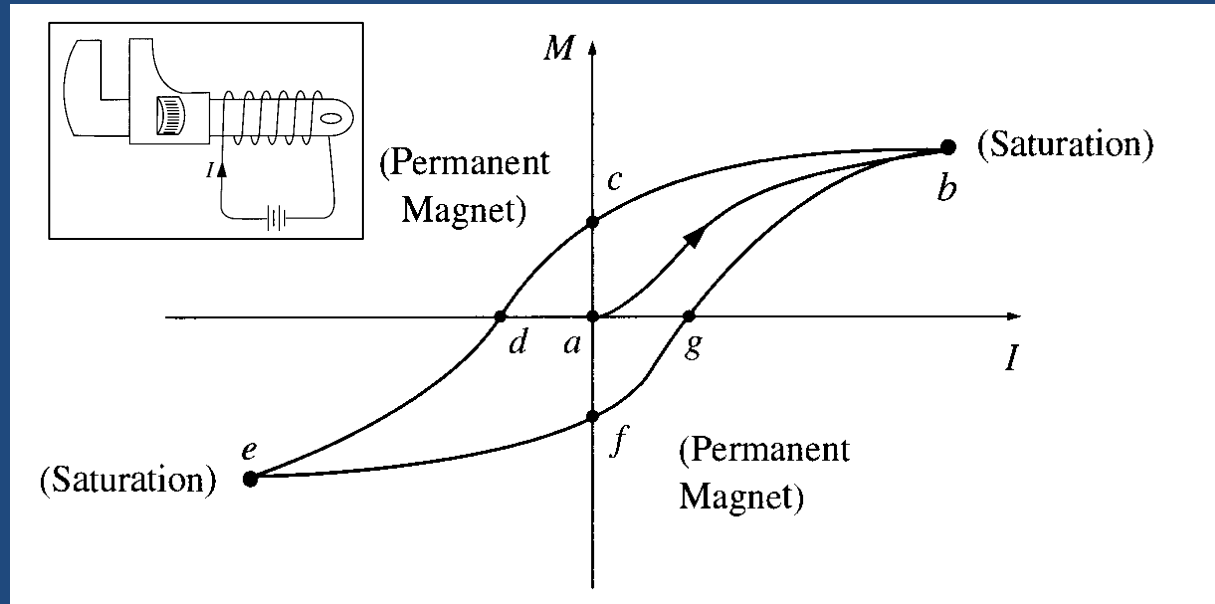
외부 자기장이 없는 경우에도
스핀들이 정렬상태를 유지하기 위해서는
스핀들 사이의 상호작용을 필요로 합니다.

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j$$

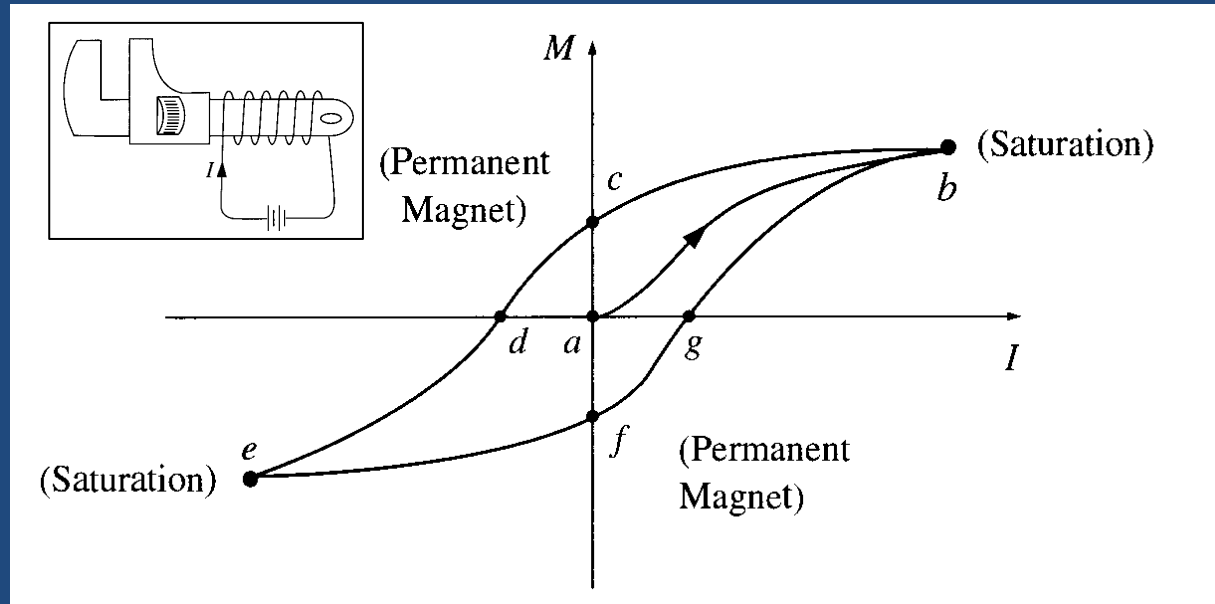
이러한 상호작용을 보여주는 간단한 예로
이징 모형 Ising model이 알려져 있습니다.



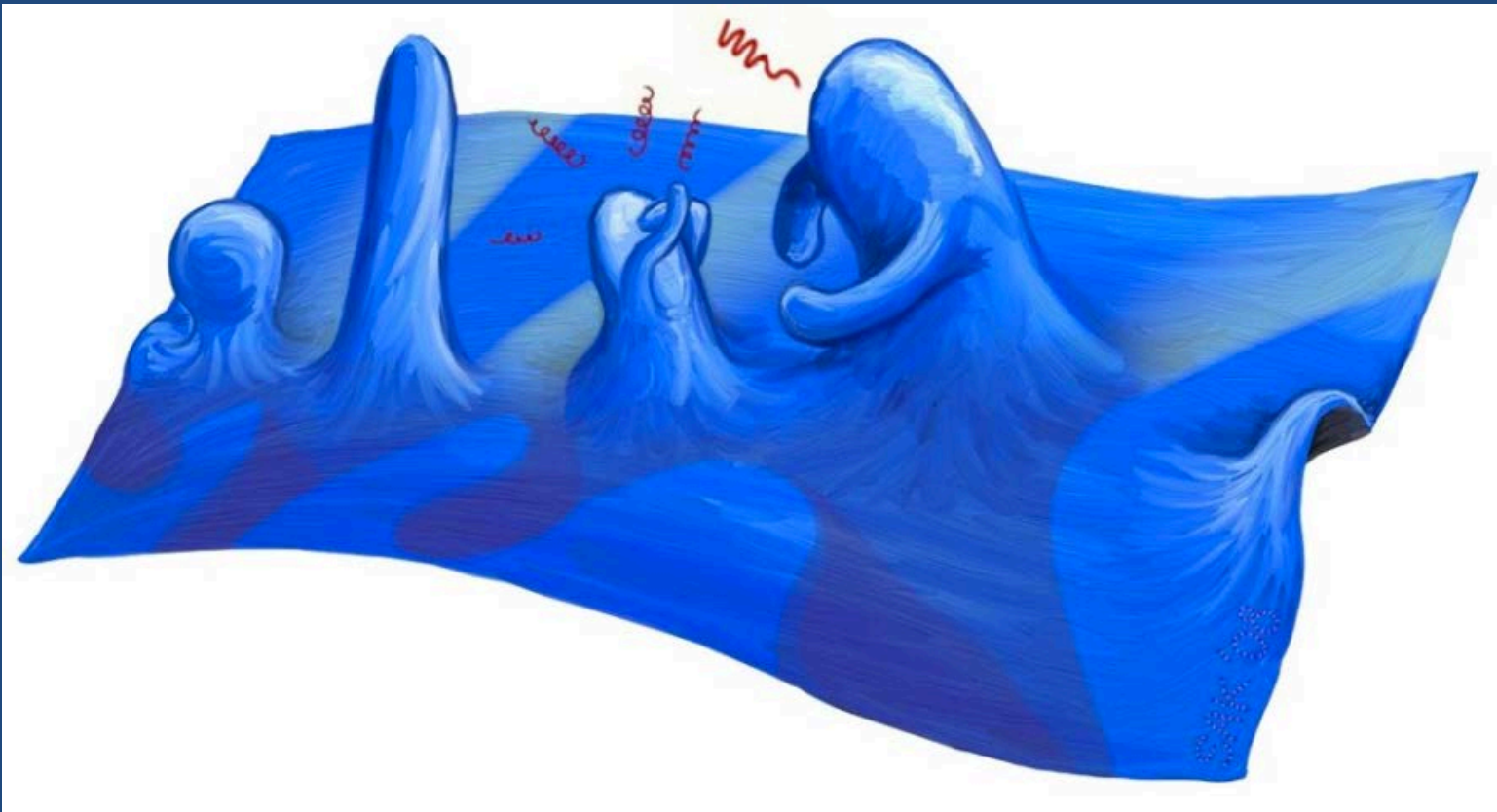
2차원 이상의 경우 이징 모형은 임계 온도 이하에서
상전이phase transition가 일어나는 것을 보여줍니다.



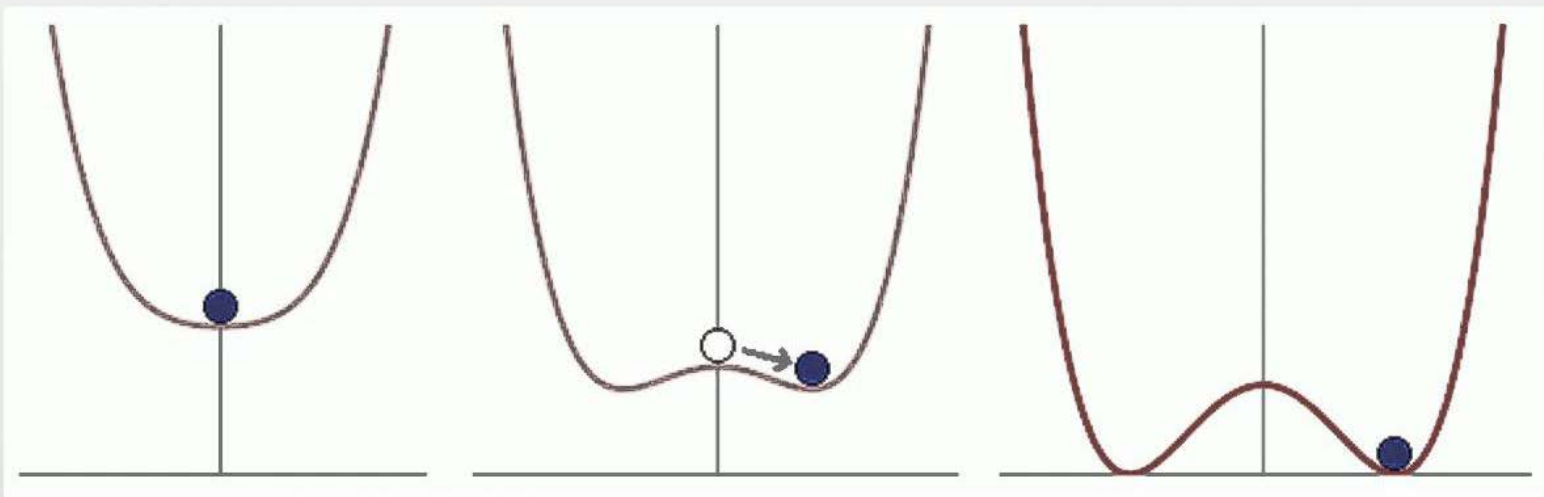
즉, 임계 온도 이하에서는 특정 스핀의 배열을 서로 유지하도록 만들어준다는 이야기가 됩니다.



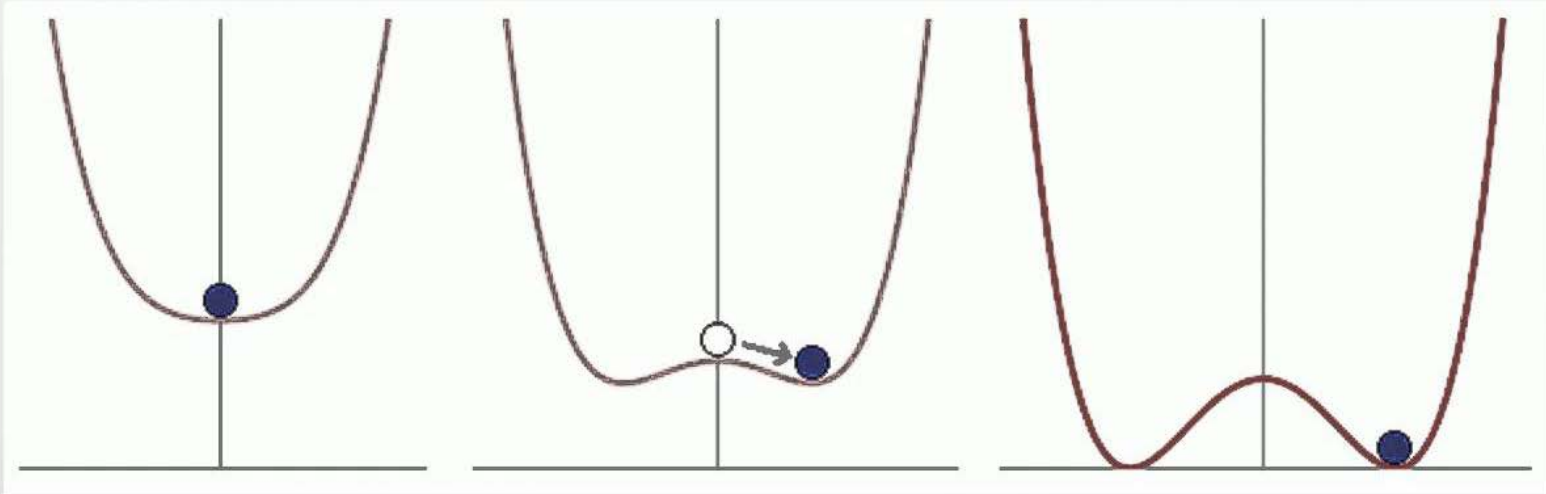
이러한 이력현상(hysteresis)이 가능한 것은 낮은 온도에서 대칭성이 깨져 있기 때문입니다.



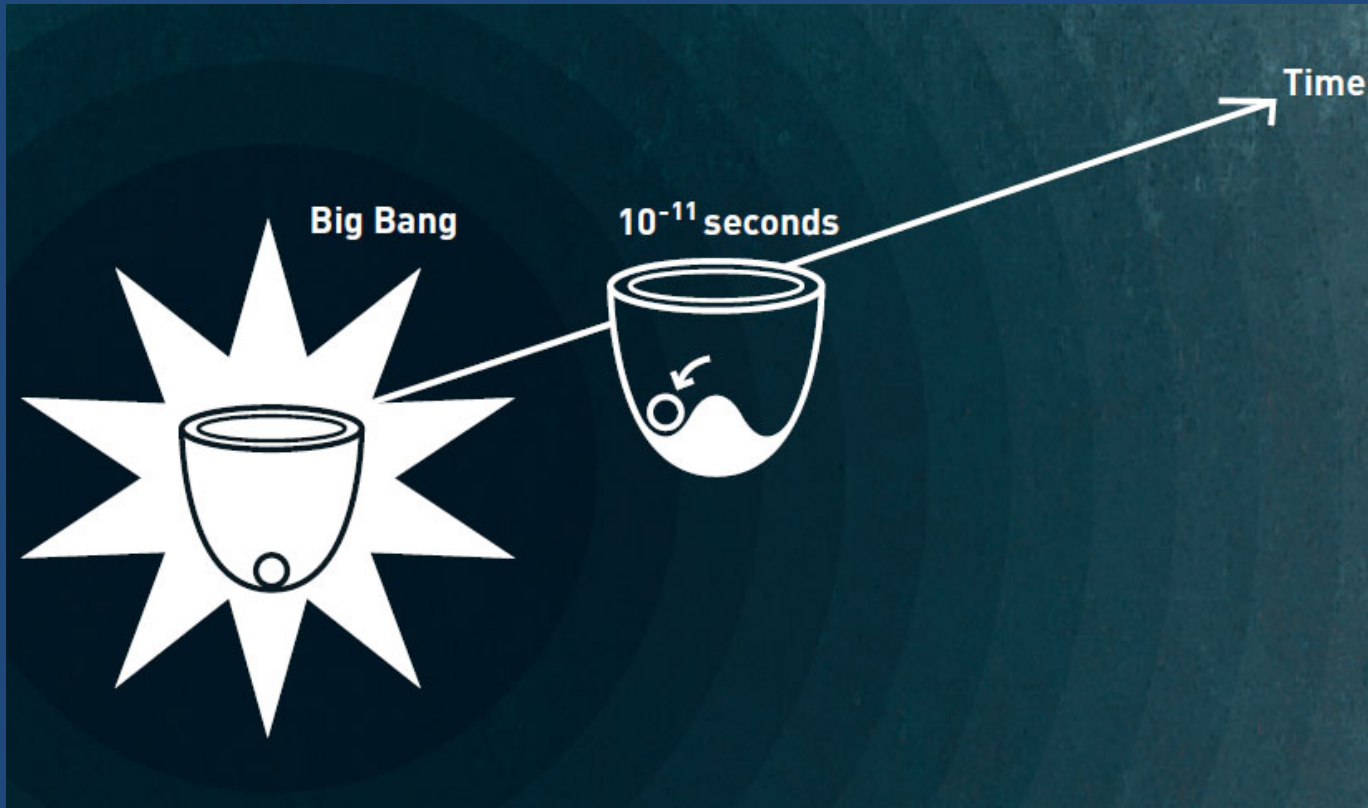
란다우Landau는 이징 모형을 연속체로 확장해서
장 이론field theory으로 스핀들을 연구하고자 했습니다.



이 때 장을 결정하는 퍼텐셜은 온도에 의존하며,
낮은 온도에서 퍼텐셜의 대칭성이 깨지게 되는 것을 보였습니다.



이것을 대칭성의 자발적 붕괴spontaneous symmetry breaking라고 합니다.



게이지 장 이론에서의 **힉스 메커니즘**Higgs mechanism도
대칭성의 자발적 붕괴의 한 가지 예가 됩니다.

감사합니다