

제7장 전기역학

이제 우리는 전기장과 자기장의 동적 현상에 대해서
자세히 살펴봅시다.

전기장과 자기장의 동적 현상 중 가장 자연스러운 예는
바로 전류가 흐른다는 것입니다.

전류가 흐르는 이유는
전하가 힘을 받기 때문입니다.

전기장과 자기장의 동적 현상 중 가장 자연스러운 예는
바로 전류가 흐른다는 것입니다.

전류가 흐르는 이유는
전하가 힘을 받기 때문입니다.

그 힘은 무슨 힘일까요?

$$\vec{J} \propto \vec{f}$$

다름 아니라 그것은 로렌츠 힘입니다.
전류 밀도는 단위 전하가 받는 힘에 비례합니다.

$$\vec{J} = \sigma \vec{f}$$

이것을 다음과 같은 식으로 나타내 봅시다.
비례 상수는 전도도conductivity라고 부릅니다.
전도도의 역수는 비저항resistivity이라고도 합니다.

$$\begin{aligned}\vec{J} &= \sigma \vec{f} \\ &= \sigma (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})\end{aligned}$$

이제 여기에 로렌츠 힘 법칙을 적용해 봅시다.

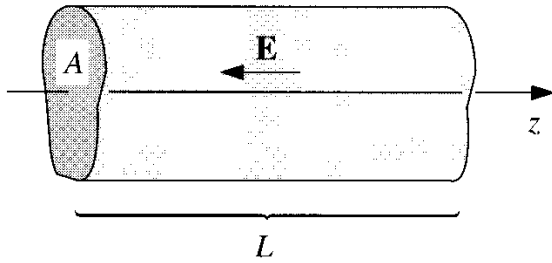
$$\begin{aligned}
 \vec{J} &= \sigma \vec{f} \\
 &= \sigma (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \\
 &\simeq \sigma \vec{E}
 \end{aligned}$$

전하의 속력이 작으면 위의 근사가 가능합니다.
 이것을 **옴Ohm의 법칙**이라고 합니다.

Material	Resistivity	Material	Resistivity
<i>Conductors:</i>		<i>Semiconductors:</i>	
Silver	1.59×10^{-8}	Salt water (saturated)	4.4×10^{-2}
Copper	1.68×10^{-8}	Germanium	4.6×10^{-1}
Gold	2.21×10^{-8}	Diamond	2.7
Aluminum	2.65×10^{-8}	Silicon	2.5×10^3
Iron	9.61×10^{-8}	<i>Insulators:</i>	
Mercury	9.58×10^{-7}	Water (pure)	2.5×10^5
Nichrome	1.00×10^{-6}	Wood	$10^8 - 10^{11}$
Manganese	1.44×10^{-6}	Glass	$10^{10} - 10^{14}$
Graphite	1.4×10^{-5}	Quartz (fused)	$\sim 10^{16}$

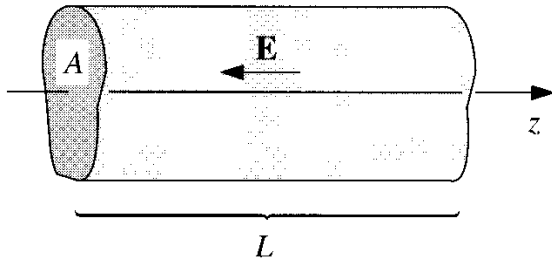
물질에 따른 비저항은 위와 같습니다.

예1: 저항 구하기



주어진 전기장에 대해 이 도선에 흐르는 전류를 계산해 봅시다.

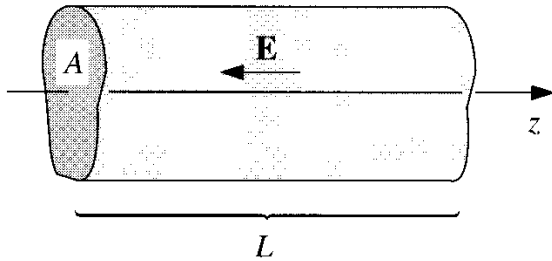
예1: 저항 구하기



주어진 전기장에 대해 이 도선에 흐르는 전류를 계산해 봅시다.

$$I = JA$$

예1: 저항 구하기

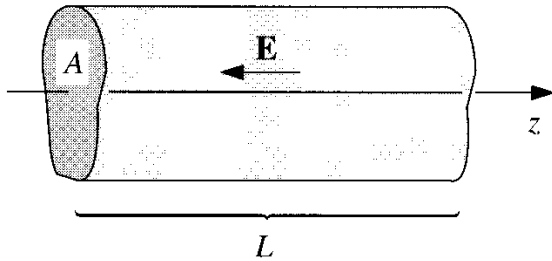


주어진 전기장에 대해 이 도선에 흐르는 전류를 계산해 봅시다.

$$I = \mathbf{J}A$$

$$\text{옴의 법칙} = \sigma \mathbf{E}A$$

예1: 저항 구하기

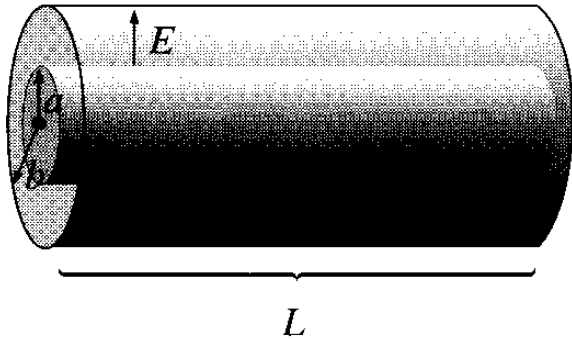


주어진 전기장에 대해 이 도선에 흐르는 전류를 계산해 봅시다.

$$I = \mathbf{J}A$$

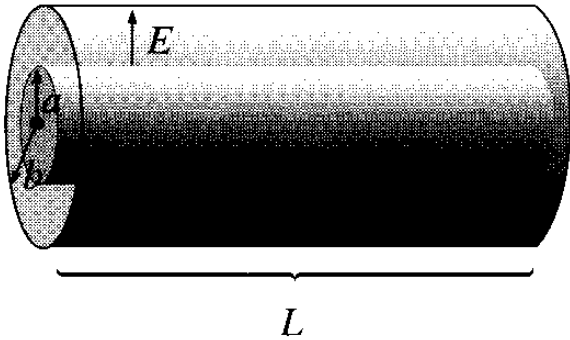
$$\begin{aligned} \text{옴의 법칙} &= \sigma E A \\ &= \sigma A \frac{V}{L} \end{aligned}$$

예2: 저항 구하기



두 원통형 도선 사이에 수직 방향으로
전기장이 주어진 경우를 생각해 봅시다.

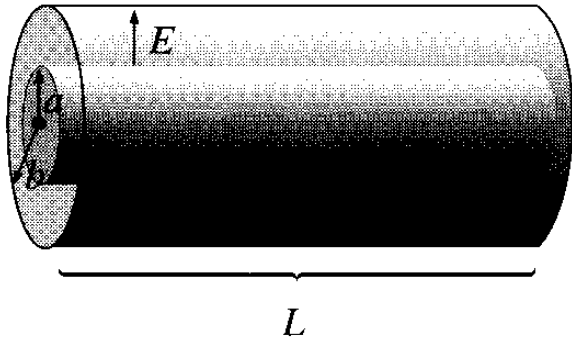
예2: 저항 구하기



두 원통형 도선 사이에 수직 방향으로
전기장이 주어진 경우를 생각해 봅시다.

$$I = \int \vec{J} \cdot d\vec{A}$$

예2: 저항 구하기

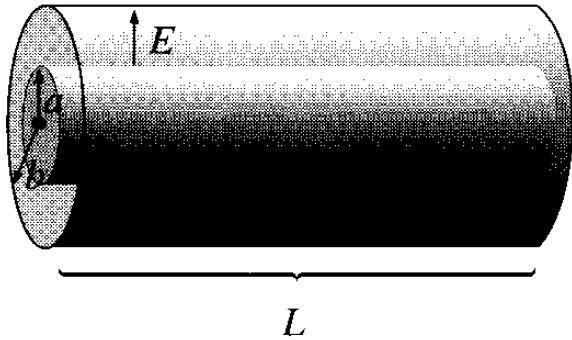


두 원통형 도선 사이에 수직 방향으로
전기장이 주어진 경우를 생각해 봅시다.

$$I = \int \vec{J} \cdot d\vec{A}$$
$$= \sigma \int \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

옴의 법칙

예2: 저항 구하기



두 원통형 도선 사이에 수직 방향으로
전기장이 주어진 경우를 생각해 봅시다.

$$I = \int \vec{J} \cdot d\vec{A}$$

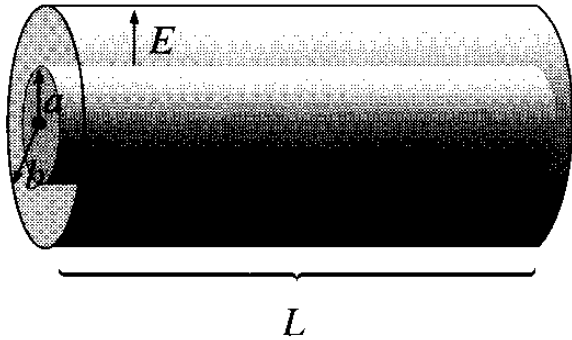
옴의 법칙

$$= \sigma \int \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

가우스 법칙

$$= \frac{\sigma}{\epsilon_0} \lambda L$$

예2: 저항 구하기



두 원통형 도선 사이에 수직 방향으로
전기장이 주어진 경우를 생각해 봅시다.

$$\begin{aligned} I &= \int \vec{J} \cdot d\vec{A} \\ &= \sigma \int \vec{E} \cdot d\vec{A} \\ &= \frac{\sigma}{\epsilon_0} \lambda L \end{aligned}$$

옴의 법칙

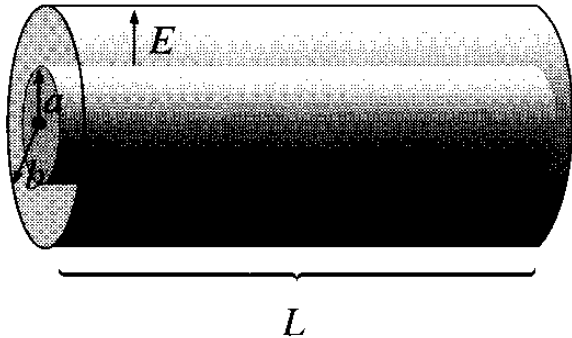
가우스 법칙

다른 한 편, 전기장과 전위는 다음과 같이 표현 됩니다.

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

$$V = - \int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}$$

예2: 저항 구하기



두 원통형 도선 사이에 수직 방향으로
전기장이 주어진 경우를 생각해 봅시다.

$$\begin{aligned}
 I &= \int \vec{J} \cdot d\vec{A} \\
 &= \sigma \int \vec{E} \cdot d\vec{A} \\
 &= \frac{\sigma}{\epsilon_0} \lambda L \\
 &= \frac{2\pi\sigma L}{\ln \frac{b}{a}} V
 \end{aligned}$$

옴의 법칙

가우스 법칙

다른 한 편, 전기장과 전위는 다음과 같이 표현 됩니다.

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

$$V = - \int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}$$

$$V = RI$$

전류와 전압이 비례하기 때문에, 그 비례 상수를 구할 수 있습니다.

이것을 저항resistance이라고 합니다.

이 식이 우리에게 좀 더 친숙한 형태의 ‘옴의 법칙’입니다.

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\sigma} \nabla \cdot \vec{J} = 0$$

옴의 법칙을 정상전류에 대해 적용하면 다음 결과를 얻습니다.

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\sigma} \nabla \cdot \vec{J} = 0$$

옴의 법칙을 정상전류에 대해 적용하면 다음 결과를 얻습니다.
따라서 이 경우 전기장과 전류는 라플라스 방정식을 따릅니다.

$$\vec{J} = nqf\langle\vec{v}\rangle$$

이러한 옴의 법칙은 비례 상수 σ 가 상수라고 하는
경험적 법칙입니다.
위와 같은 고전적 모델을 생각해 봅시다.

분자당 전하 수

$$\vec{J} = nqf\langle\vec{v}\rangle$$

분자 수 밀도 전하 평균 속도

이러한 옴의 법칙은 비례 상수 σ 가 상수라고 하는
경험적 법칙입니다.
위와 같은 고전적 모델을 생각해 봅시다.

분자당 전하 수

$$\vec{J} = nqf\langle\vec{v}\rangle$$

분자 수 밀도 전하 평균 속도

$$= \frac{1}{2}at$$

$$= \frac{a\lambda}{2v_{th}}$$

어떤 구간을 열 운동에
의해 통과하는 시간:

$$t = \frac{\lambda}{v_{th}}$$

이러한 옴의 법칙은 비례 상수 σ 가 상수라고 하는
경험적 법칙입니다.

위와 같은 고전적 모델을 생각해 봅시다.

$$\begin{aligned}
 \vec{J} &= \underbrace{n}_{\text{분자 수 밀도}} \underbrace{q}_{\text{전하}} \underbrace{f}_{\text{분자당 전하 수}} \underbrace{\langle \vec{v} \rangle}_{\text{평균 속도}} = \frac{n q f \lambda}{2 v_{th}} \frac{\vec{F}}{m} \\
 &= \frac{1}{2} a t \\
 &= \frac{a \lambda}{2 v_{th}} \quad \begin{array}{l} \text{어떤 구간을 열 운동에} \\ \text{의해 통과하는 시간:} \\ t = \frac{\lambda}{v_{th}} \end{array}
 \end{aligned}$$

이러한 옴의 법칙은 비례 상수 σ 가 상수라고 하는
경험적 법칙입니다.
위와 같은 고전적 모델을 생각해 봅시다.

$$\vec{J} = \underset{\text{분자 수 밀도}}{n} \underset{\text{전하}}{q} \underset{\text{평균 속도}}{f \langle \vec{v} \rangle} \overset{\text{분자당 전하 수}}{=} \frac{nqf\lambda}{2v_{th}} \frac{\vec{F}}{m}$$

$$\vec{J} = \left(\frac{nq^2f\lambda}{2mv_{th}} \right) \vec{E}$$

이러한 옴의 법칙은 비례 상수 σ 가 상수라고 하는
경험적 법칙입니다.
위와 같은 고전적 모델을 생각해 봅시다.

$$\vec{J} = \overset{\text{분자당 전하 수}}{nqf} \overset{\text{평균 속도}}{\langle \vec{v} \rangle} = \frac{nqf\lambda}{2v_{th}} \frac{\vec{F}}{m}$$

분자 수 밀도 전하

$$\vec{F} = q\vec{E} \quad \underbrace{\left(\frac{nq^2f\lambda}{2mv_{th}} \right)}_{\simeq \sigma} \vec{E}$$

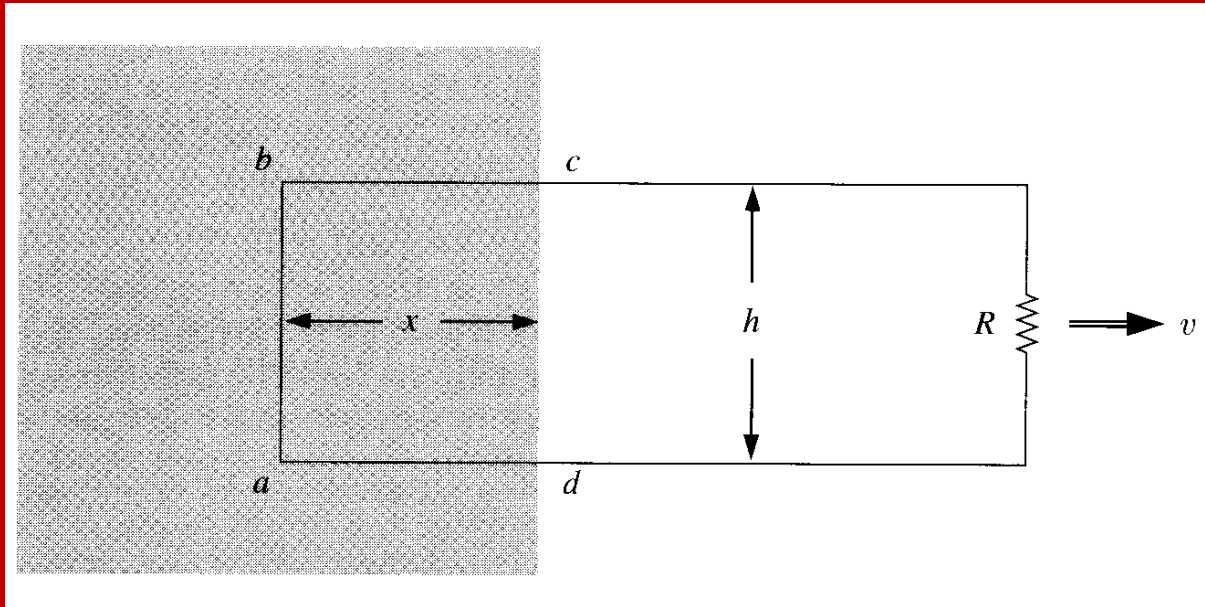
따라서 실제 전기전도도는
밀도에 비례하고
온도가 높아질 수록 낮아진다는 것을 알 수 있습니다.

$$P = VI = I^2 R = \frac{V^2}{R}$$

전류와 전압으로부터, 또는 옴의 법칙과 저항을 사용해서
일률을 구할 수 있습니다.
이것을 줄Joule 가열 법칙이라고 합니다.

$$\mathcal{E} \equiv \oint \overset{\text{단위전하당 힘}}{\vec{f}} \cdot d\vec{s}$$

단위 전하당 작용하는 힘은 퍼텐셜, 또는
기전력electromotive force으로 설명할 수 있습니다.



그림과 같이 자기장 영역에서 도선을 잡아당기면,
전하가 속력을 가지게 되기 때문에 자기력을 받게 되고,
이에 따른 기전력이 생기게 됩니다.

$$\mathcal{E} \equiv \oint \vec{f}_B \cdot d\vec{s} = vBh$$

그림과 같이 자기장 영역에서 도선을 잡아당기면,
전하가 속력을 가지게 되기 때문에 자기력을 받게 되고,
이에 따른 기전력이 생기게 됩니다.

$$\mathcal{E} \equiv \oint \vec{f}_B \cdot d\vec{s} = vBh$$

$$\Phi_B = Bhx$$

자기 선속magnetic flux을 $\Phi_B \equiv \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$ 와 같이 정의하면,
기전력을 위와 같이 적을 수 있습니다.

$$\mathcal{E} \equiv \oint \vec{f}_B \cdot d\vec{s} = vBh$$

$$\Phi_B = Bhx$$

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = Bh \frac{dx}{dt} = -vBh = -\mathcal{E}$$

자기 선속 magnetic flux을 $\Phi_B \equiv \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$ 와 같이 정의하면,
기전력을 위와 같이 적을 수 있습니다.

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

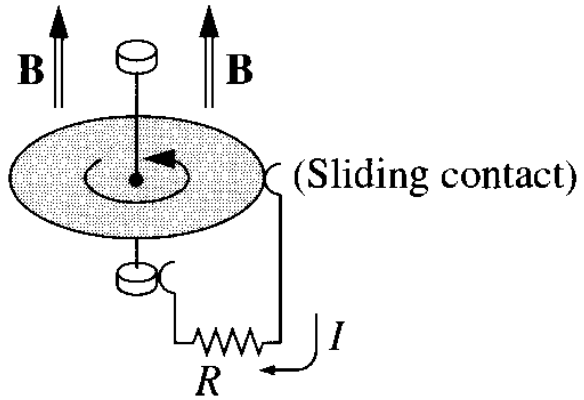
이것이 바로 **선속 규칙** flux rule입니다.

이 규칙은 자기장이 불균일하거나
좀 더 일반적인 도선의 모양에 대해서도 일반화될 수 있습니다.

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

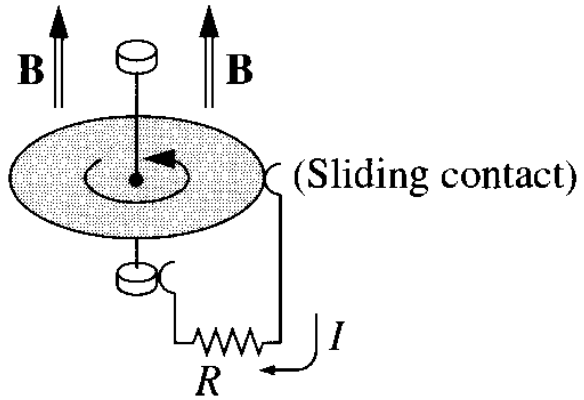
중요한 사실은, 바로 이 **선속 규칙**은
로렌츠 힘 법칙에서 곧바로 도출된 것이라는 점입니다.

예1: 패러데이 발전기



그림과 같이 회전하는 원판의 기전력을 계산해 봅시다.

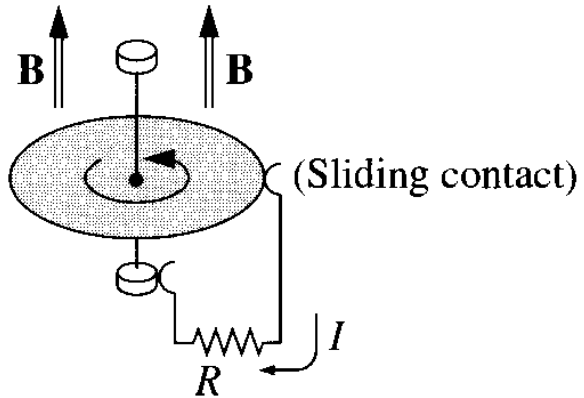
예1: 패러데이 발전기



그림과 같이 회전하는 원판의 기전력을 계산해 봅시다.

$$\mathcal{E} = \int_0^a f_B ds$$

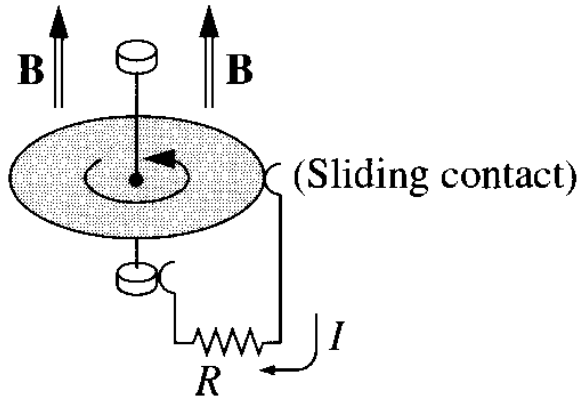
예1: 패러데이 발전기



그림과 같이 회전하는 원판의 기전력을 계산해 봅시다.

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \int_0^a f_B ds \\ &= \omega B \int_0^a s ds\end{aligned}$$

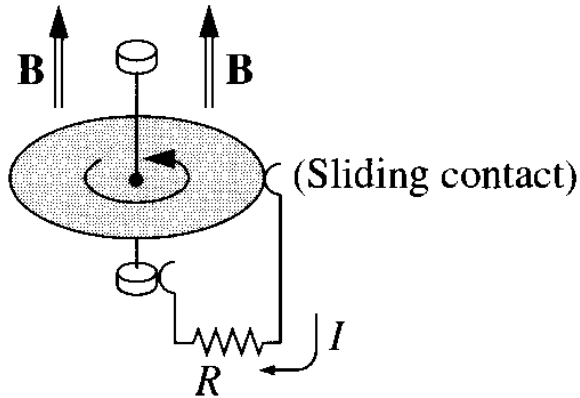
예1: 패러데이 발전기



그림과 같이 회전하는 원판의 기전력을 계산해 봅시다.

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \int_0^a f_B ds \\ &= \omega B \int_0^a s ds \\ &= \frac{\omega B}{2} a^2\end{aligned}$$

예1: 패러데이 발전기



그림과 같이 회전하는 원판의 기전력을 계산해 봅시다.

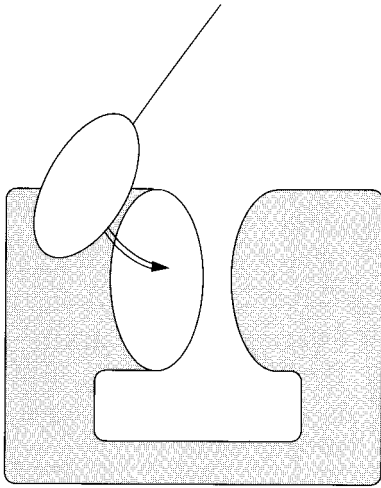
$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \int_0^a f_B ds \\ &= \omega B \int_0^a s ds \\ &= \frac{\omega B}{2} a^2\end{aligned}$$

따라서 전류는 다음과 같습니다.

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{\omega B}{2R} a^2$$

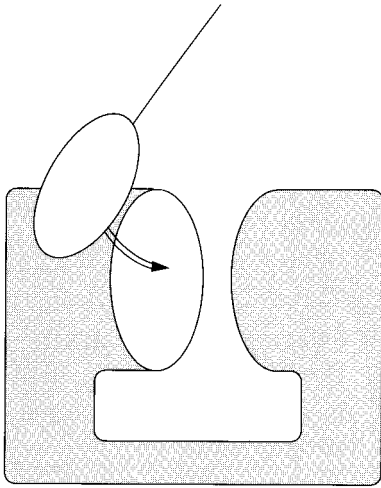
즉, 주어진 자기장 속에서 회전하는 원판은 전기 에너지를 만들어 냅니다.
이것이 가장 간단한 형태의 **발전기**가 됩니다.

예2: 맴돌이 전류



그림과 같이 자기장 영역에 금속을 통과시켜 봅시다.

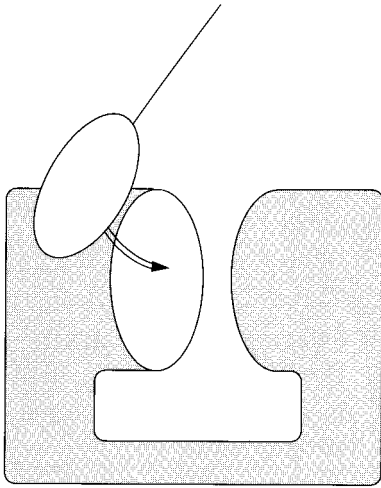
예2: 맴돌이 전류



그림과 같이 자기장 영역에 금속을 통과시켜 봅시다.

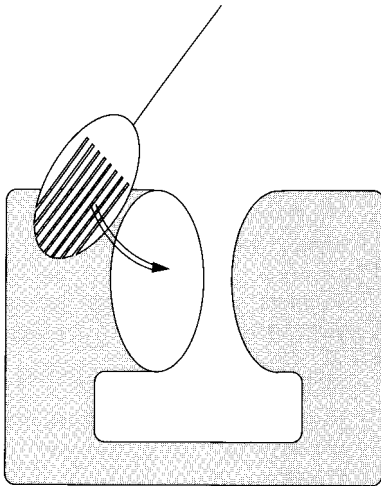
금속판은 자기장 영역에서 저항을 느끼는데,
이것은 금속판에 유도되는 맴돌이 전류eddy current가
저항력을 만들어 내기 때문입니다.

예2: 맴돌이 전류



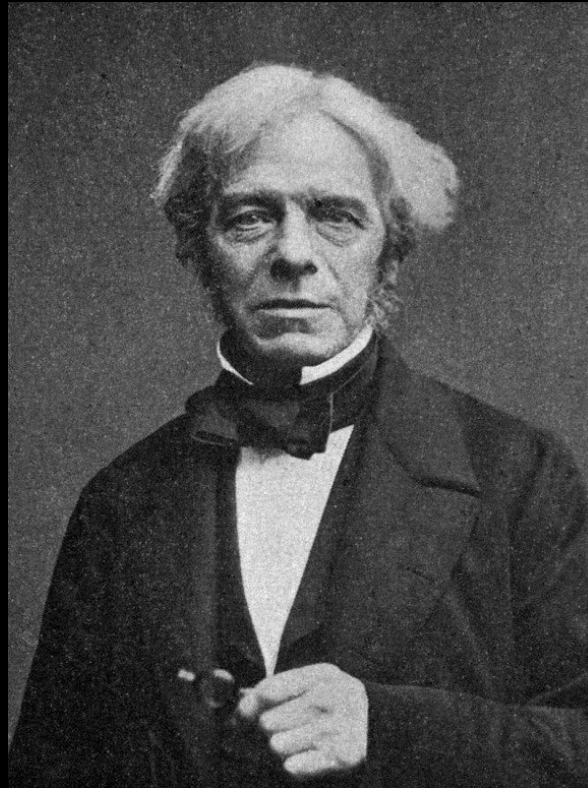
그림과 같이 자기장 영역에 금속을 통과시켜 봅시다.

금속판은 자기장 영역에서 저항을 느끼는데,
이것은 금속판에 유도되는 맴돌이 전류eddy current가
저항력을 만들어 내기 때문입니다.



만일 왼쪽 그림처럼 맴돌이 전류가 흐르지 못하도록
금속에 틈을 내 놓게 되면,
저항력이 사라지는 것을 볼 수 있습니다.

방금 살펴본 선속 규칙은 우리가 언젠가 공부한 적이 있던
패러데이의 법칙과 비슷하다는 것을 눈치챘을 것입니다.
패러데이는 어떤 발견을 했을까요?



패러데이는 실험을 통해 다음과 같은 관계를 정립하게 됩니다.

$$\mathcal{E} = \oint \vec{f}_B \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

먼저 **선속 규칙**에서 출발합시다.
첫째 줄의 의미는, 자기장에 의한 힘이
기전력을 만들어낸다는 것입니다.

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \oint \vec{f}_B \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \\ &= -\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{A}} \vec{B} \cdot d\vec{A}\end{aligned}$$

우변을 적분 형태로 다시 적어 봅시다.

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \oint \vec{f}_B \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \\ &= \oint_{\partial\mathcal{A}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{A}} \vec{B} \cdot d\vec{A}\end{aligned}$$

그런데 기전력은 기본적으로 전기장에 의한 것이므로
다른 관점에서 **전기장에 대한 적분**이 되기도 합니다.

$$\int_{\mathcal{A}} (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{A} = -\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{A}} \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

스토크스 정리를 사용해서 양 변을 다시 적어 봅시다.

$$\int_{\mathcal{A}} (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{A} = -\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{A}} \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

따라서 다음과 같은 미분 방정식을 얻습니다.
이것을 패러데이의 법칙이라고 합니다.

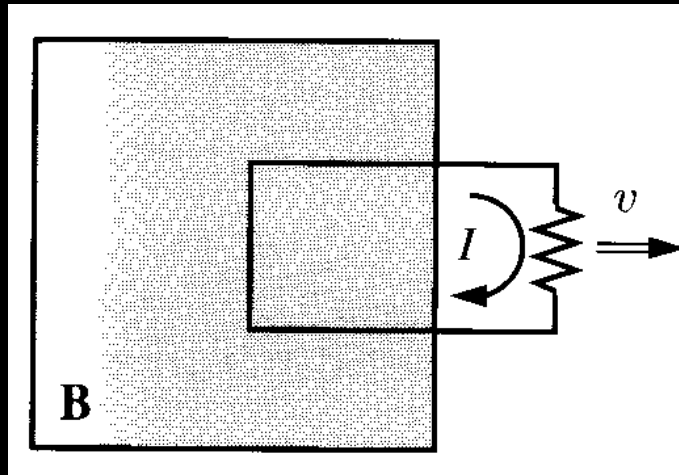
$$\int_{\mathcal{A}} (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{A} = -\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{A}} \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

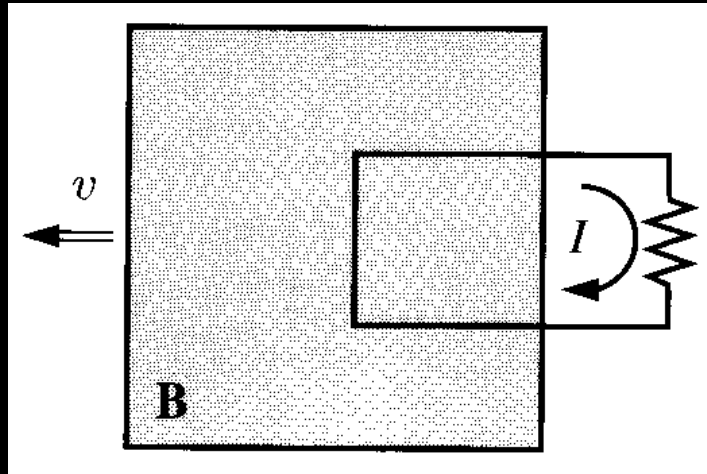
변화하는 자기장은 전기장을 만들어냅니다.
그리고 그 방향은 선속을 줄이는 방향이 됩니다.
이것을 렌츠Lenz의 법칙이라고도 합니다.

그러면 선속 규칙과 패러데이 법칙의 차이점은 무엇인가요?

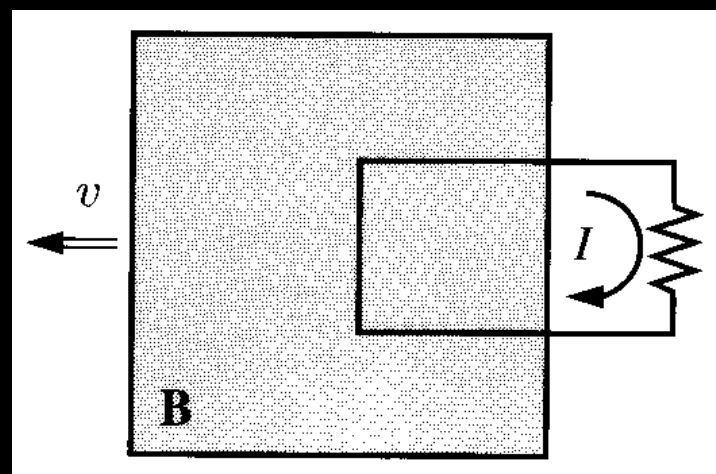
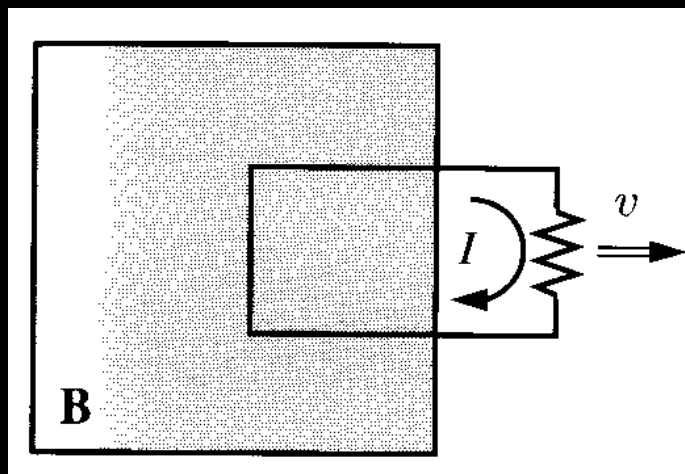
사실 맥락에 따라 이 둘을 구분하지 않는 경우도 있습니다.
그러나 한 번 미묘한 차이를 다시 생각해 봅시다.



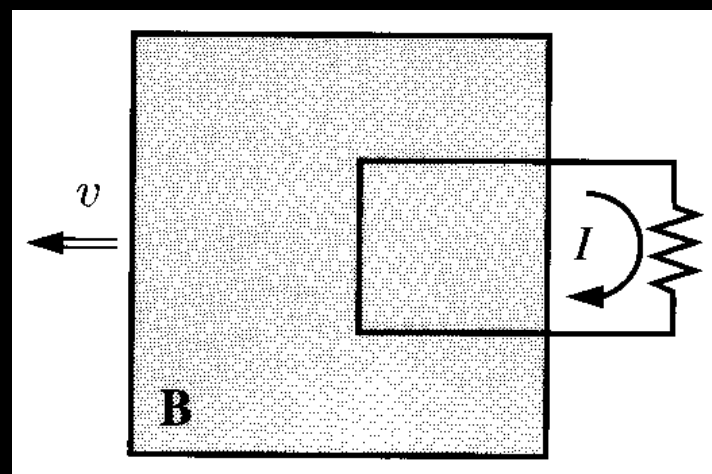
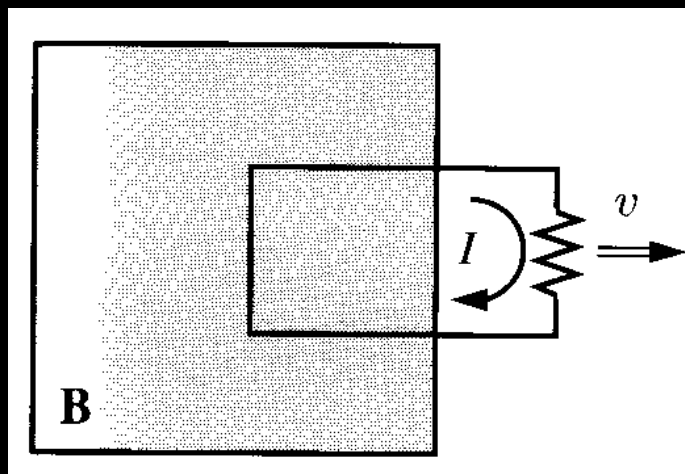
먼저 그림과 같이 자기장 영역에 있는 **도선**을
잡아당기는 경우를 생각해 봅시다.
이 때는 **로렌츠 힘**에 의해 기전력이 생깁니다.
이것이 바로 **선속 규칙**에 의해 설명되는 기전력입니다.



이번에는 그림과 같이 자기장 영역을
움기는 경우를 생각해 봅시다.
이 때는 유도 전기장에 의해 기전력이 발생합니다.
이것이 바로 패러데이 법칙이 설명하는 것입니다.

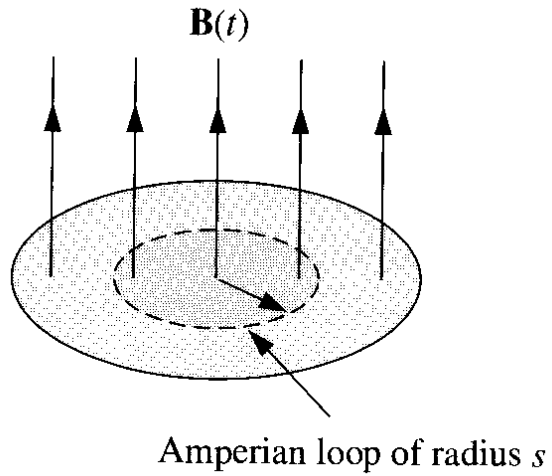


즉, 패러데이 법칙은 위의 두 상황이
서로 **대칭적**이라는 것을 보여줍니다.
이것은 당연해 보이지만, 정말 당연한 것일까요?



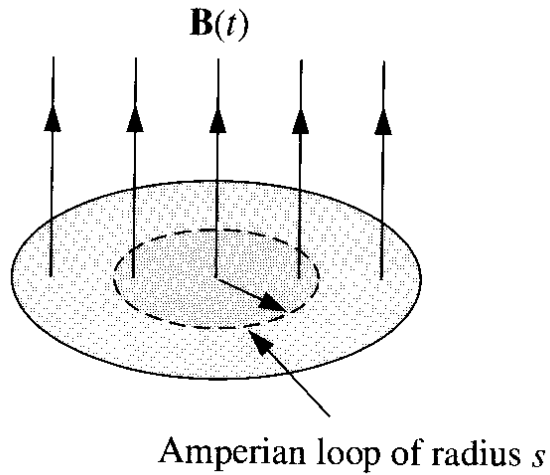
동일한 상대속도를 가지는 계에 대해서 이 둘을 구분할 수 없다,
 바로 이것이 특수 상대론에 의해서 설명되는 것이며,
 바로 이 전자기 현상이
 특수 상대론의 강력한 동기가 되었던 것이기도 합니다.

예1: 자기장이 변하는 경우



그림과 같이 시간에 따라 자기장이 변하는 경우를 생각해 봅시다.

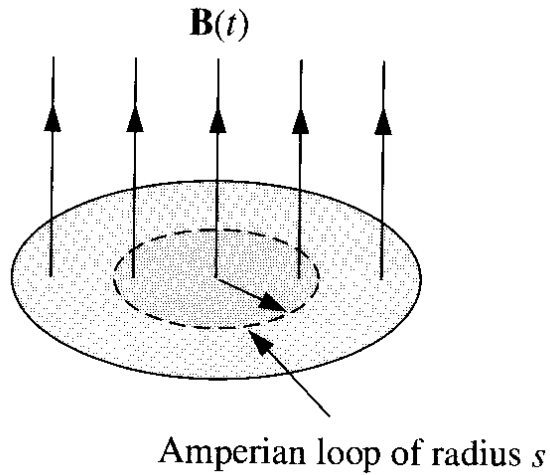
예1: 자기장이 변하는 경우



그림과 같이 시간에 따라 자기장이 변하는 경우를 생각해 봅시다.

$$\begin{aligned}\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} &= E \cdot 2\pi s \\ &= -\frac{d\Phi}{dt} \\ &= -\frac{d}{dt}(\pi s^2 B) \\ &= -\pi s^2 \frac{dB}{dt}\end{aligned}$$

예1: 자기장이 변하는 경우



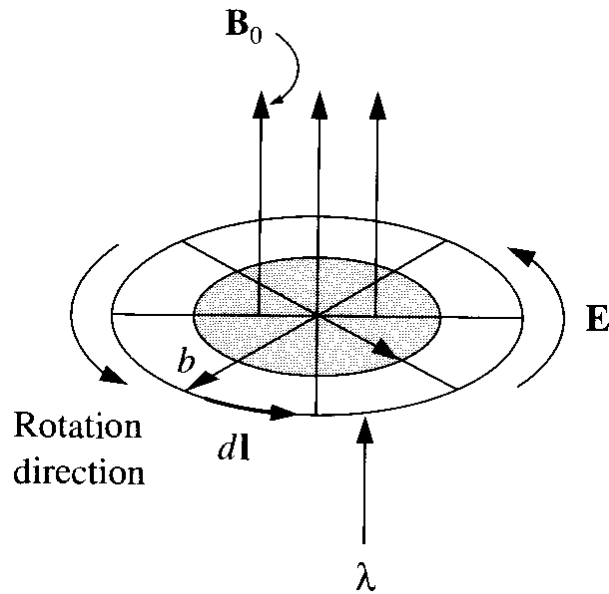
그림과 같이 시간에 따라 자기장이 변하는 경우를 생각해 봅시다.

$$\begin{aligned}\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} &= E \cdot 2\pi s \\ &= -\frac{d\Phi}{dt} \\ &= -\frac{d}{dt}(\pi s^2 B) \\ &= -\pi s^2 \frac{dB}{dt}\end{aligned}$$

따라서 전기장은 다음과 같습니다.

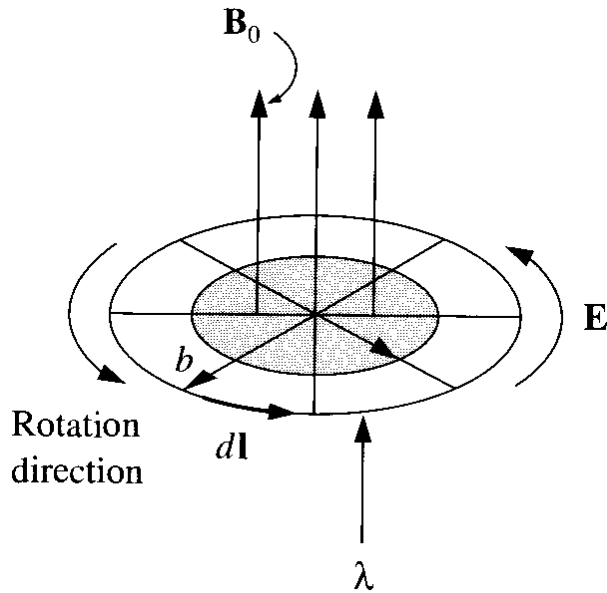
$$\vec{E} = -\frac{s}{2} \frac{dB}{dt} \hat{\phi}$$

예2: 자기장이 갑자기 꺼지는 경우



그림과 같이 자기장 영역 밖에 대전된 도선이 놓여 있는 경우를 생각해 봅시다. 이 때, **자기장이 갑자기 꺼져버린다면** 어떤 일이 발생할까요?

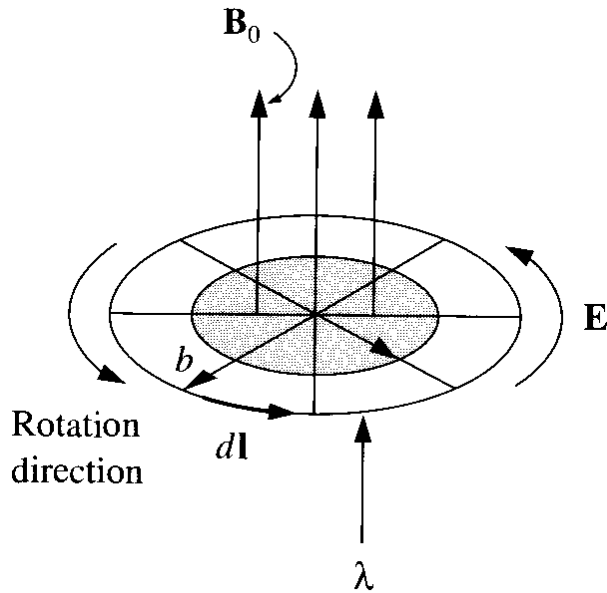
예2: 자기장이 갑자기 꺼지는 경우



그림과 같이 자기장 영역 밖에 대전된 도선이 놓여 있는 경우를 생각해 봅시다. 이 때, **자기장이 갑자기 꺼져버린다면** 어떤 일이 발생할까요?

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = E \cdot 2\pi b = -\frac{d\Phi}{dt} = -\pi a^2 \frac{dB}{dt}$$

예2: 자기장이 갑자기 꺼지는 경우

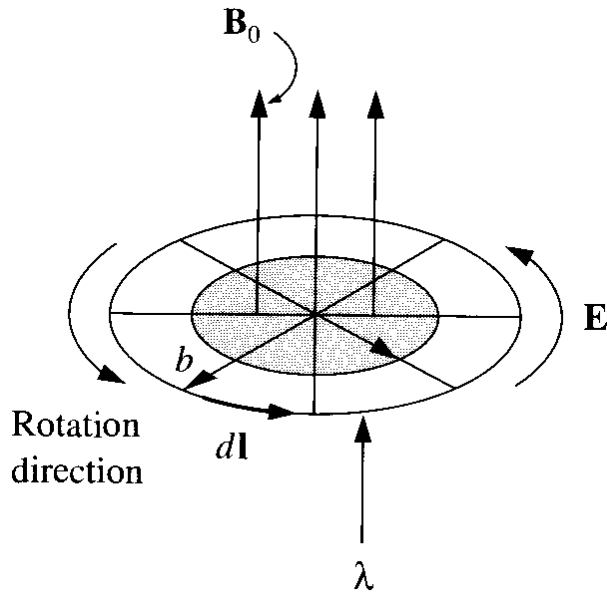


그림과 같이 자기장 영역 밖에 대전된 도선이 놓여 있는 경우를 생각해 봅시다. 이 때, **자기장이 갑자기 꺼져버린다면** 어떤 일이 발생할까요?

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = E \cdot 2\pi b = -\frac{d\Phi}{dt} = -\pi a^2 \frac{dB}{dt}$$

$$\vec{E} = -\frac{a^2}{2b} \frac{dB}{dt} \hat{\phi}$$

예2: 자기장이 갑자기 꺼지는 경우



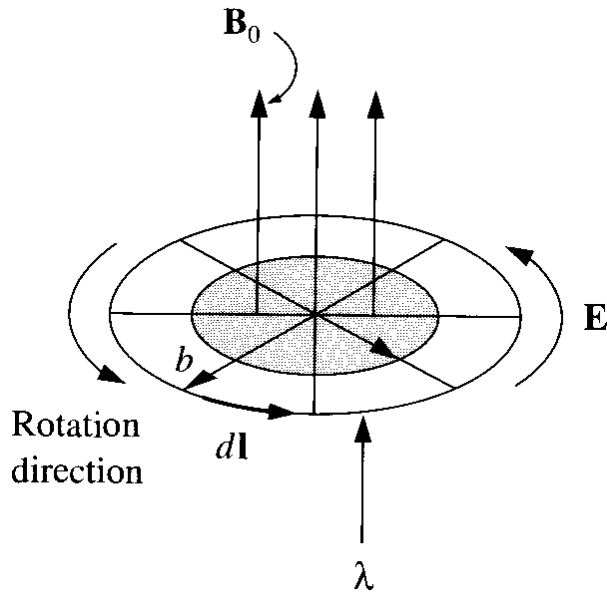
그림과 같이 자기장 영역 밖에 대전된 도선이 놓여 있는 경우를 생각해 봅시다. 이 때, **자기장이 갑자기 꺼져버린다면** 어떤 일이 발생할까요?

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = E \cdot 2\pi b = -\frac{d\Phi}{dt} = -\pi a^2 \frac{dB}{dt}$$

$$\vec{E} = -\frac{a^2}{2b} \frac{dB}{dt} \hat{\phi}$$

우리는 자기장이 정확히 어떻게 줄어드는지는 모르지만 **고리의 미소 영역이 받는 토크**는 계산할 수 있습니다. $d\tau = b\lambda E ds$

예2: 자기장이 갑자기 꺼지는 경우



그림과 같이 자기장 영역 밖에 대전된 도선이 놓여 있는 경우를 생각해 봅시다. 이 때, **자기장이 갑자기 꺼져버린다면** 어떤 일이 발생할까요?

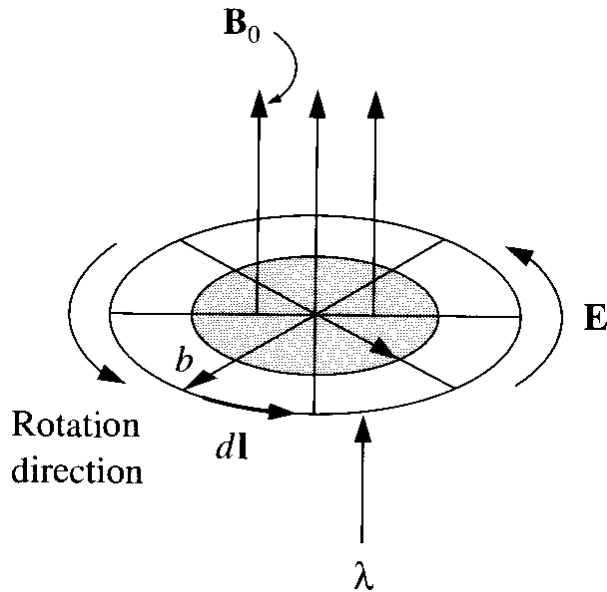
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = E \cdot 2\pi b = -\frac{d\Phi}{dt} = -\pi a^2 \frac{dB}{dt}$$

$$\vec{E} = -\frac{a^2}{2b} \frac{dB}{dt} \hat{\phi}$$

우리는 자기장이 정확히 어떻게 줄어드는지는 모르지만 **고리의 미소 영역이 받는 토크**는 계산할 수 있습니다. $d\tau = b\lambda E ds$

$$\tau = \frac{dL}{dt} = b\lambda \left(-\frac{a^2}{2b} \frac{dB}{dt} \right) \oint ds$$

예2: 자기장이 갑자기 꺼지는 경우



그림과 같이 자기장 영역 밖에 대전된 도선이 놓여 있는 경우를 생각해 봅시다. 이 때, **자기장이 갑자기 꺼져버린다면** 어떤 일이 발생할까요?

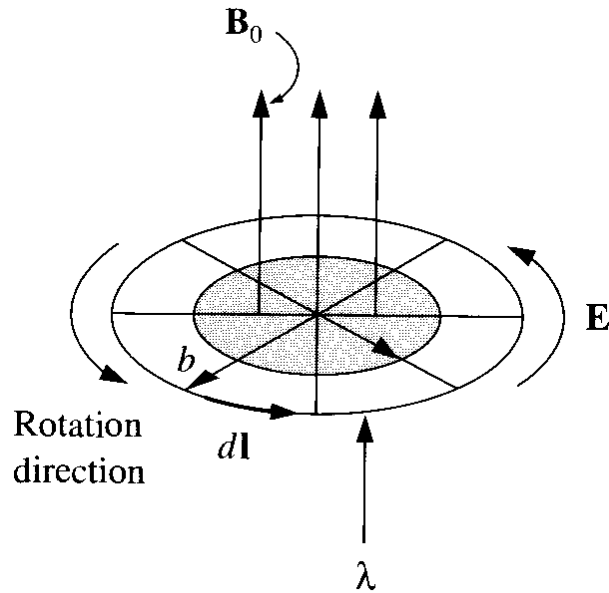
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = E \cdot 2\pi b = -\frac{d\Phi}{dt} = -\pi a^2 \frac{dB}{dt}$$

$$\vec{E} = -\frac{a^2}{2b} \frac{dB}{dt} \hat{\phi}$$

우리는 자기장이 정확히 어떻게 줄어드는지는 모르지만 **고리의 미소 영역이 받는 토크**는 계산할 수 있습니다. $d\tau = b\lambda E ds$

$$\begin{aligned} \tau = \frac{dL}{dt} &= b\lambda \left(-\frac{a^2}{2b} \frac{dB}{dt} \right) \oint ds = -b\lambda \pi a^2 \frac{dB}{dt} \\ &= 2\pi b \end{aligned}$$

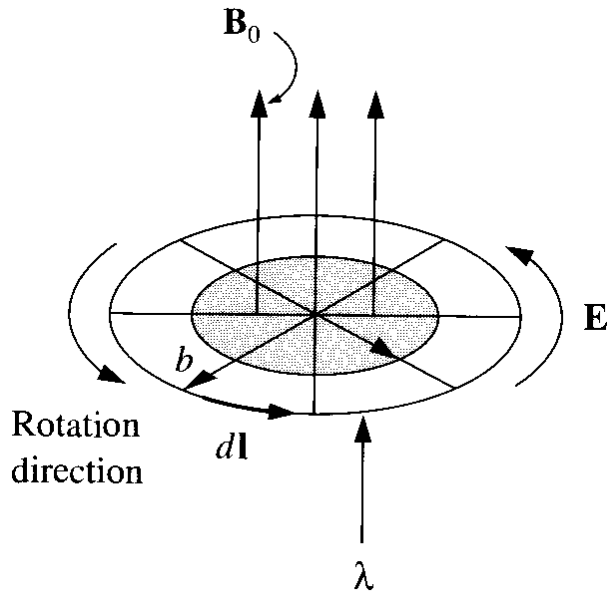
예2: 자기장이 갑자기 꺼지는 경우



따라서 **각운동량의 변화**는 다음과 같습니다.

$$\Delta L = \int \tau dt = -\lambda \pi a^2 b \int_{B_0}^0 dB = \lambda \pi a^2 b B_0$$

예2: 자기장이 갑자기 꺼지는 경우

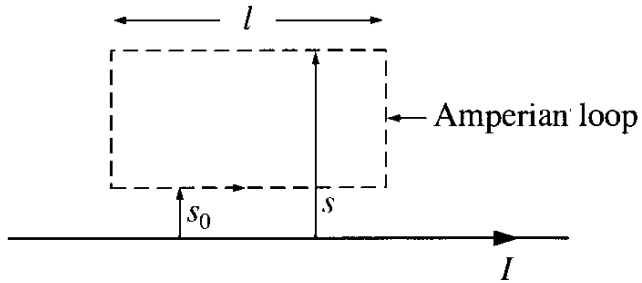


따라서 **각운동량의 변화**는 다음과 같습니다.

$$\Delta L = \int \tau dt = -\lambda \pi a^2 b \int_{B_0}^0 dB = \lambda \pi a^2 b B_0$$

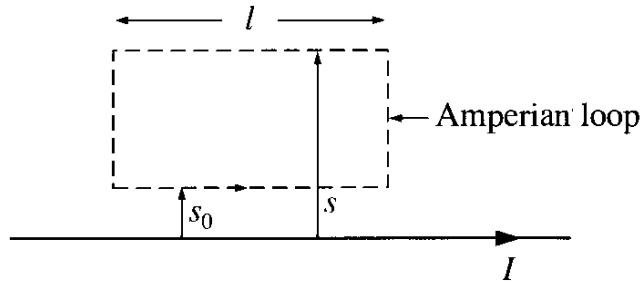
자기장이 어떤 방식으로 감소하든,
최종 회전 각속도는 동일해지게 됩니다.

예3: 전류가 변하는 경우



그림과 같이 도선에 흐르는 전류가 시간에 따라 변하는 경우를 생각해 봅시다.

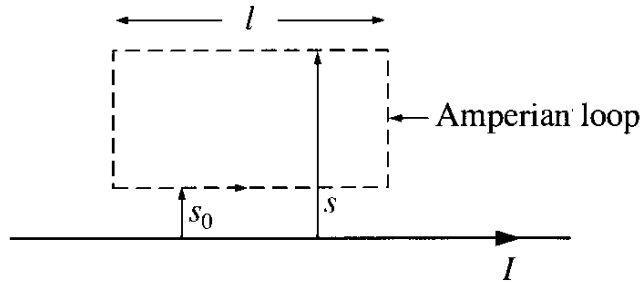
예3: 전류가 변하는 경우



그림과 같이 도선에 흐르는 전류가 시간에 따라 변하는 경우를 생각해 봅시다.

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = E(s_0)l - E(s)l$$

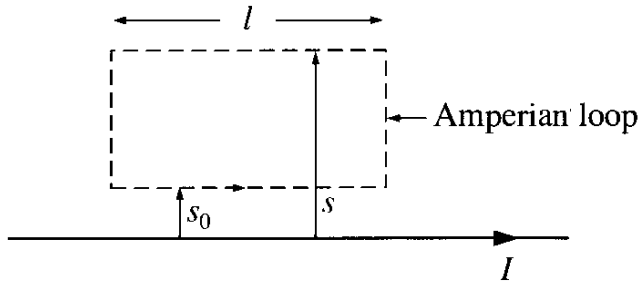
예3: 전류가 변하는 경우



그림과 같이 도선에 흐르는 전류가 시간에 따라 변하는 경우를 생각해 봅시다.

$$\begin{aligned}\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} &= E(s_0)l - E(s)l \\ &= -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A}\end{aligned}$$

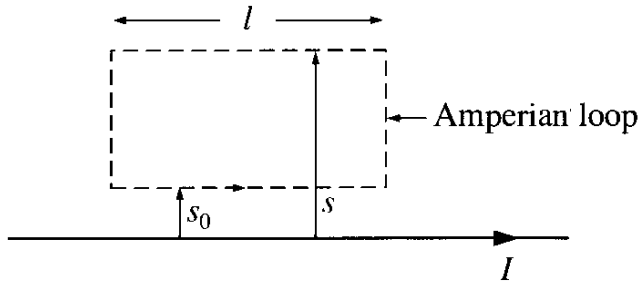
예3: 전류가 변하는 경우



그림과 같이 도선에 흐르는 전류가 시간에 따라 변하는 경우를 생각해 봅시다.

$$\begin{aligned}
 \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} &= E(s_0)l - E(s)l \\
 &= -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A} \\
 \vec{B} &= \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \quad \Rightarrow \quad = -\frac{\mu_0 l}{2\pi} \frac{dI}{dt} \int_{s_0}^s \frac{ds'}{s'}
 \end{aligned}$$

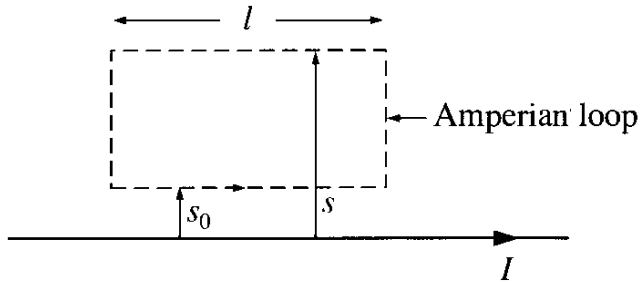
예3: 전류가 변하는 경우



그림과 같이 도선에 흐르는 전류가 시간에 따라 변하는 경우를 생각해 봅시다.

$$\begin{aligned}\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} &= E(s_0)l - E(s)l \\ &= -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A} \\ \vec{B} &= \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \\ &= -\frac{\mu_0 l}{2\pi} \frac{dI}{dt} \int_{s_0}^s \frac{ds'}{s'} \\ &= -\frac{\mu_0 l}{2\pi} \frac{dI}{dt} \ln \frac{s}{s_0}\end{aligned}$$

예3: 전류가 변하는 경우



그림과 같이 도선에 흐르는 전류가 시간에 따라 변하는 경우를 생각해 봅시다.

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = E(s_0)l - E(s)l$$

$$= -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

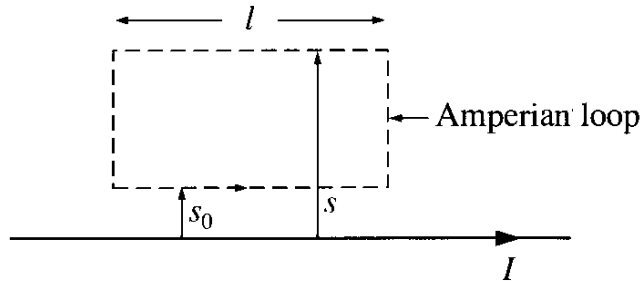
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \quad = -\frac{\mu_0 l}{2\pi} \frac{dI}{dt} \int_{s_0}^s \frac{ds'}{s'}$$

$$= -\frac{\mu_0 l}{2\pi} \frac{dI}{dt} \ln \frac{s}{s_0}$$

따라서 전기장은 다음과 같습니다.

$$\vec{E} = \left(\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{dI}{dt} \ln s + K \right) \hat{z}$$

예3: 전류가 변하는 경우

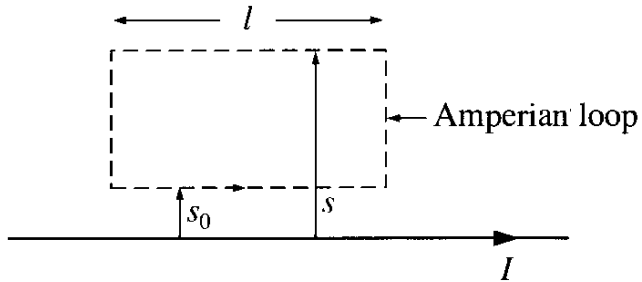


아래의 식을 따르면 $s \rightarrow \infty$ 가 될 때,
 $\vec{E} \rightarrow \infty$ 가 된다는 것을 보여줍니다.
이것은 어떻게 이해할 수 있을까요?

따라서 전기장은 다음과 같습니다.

$$\vec{E} = \left(\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{dI}{dt} \ln s + K \right) \hat{z}$$

예3: 전류가 변하는 경우



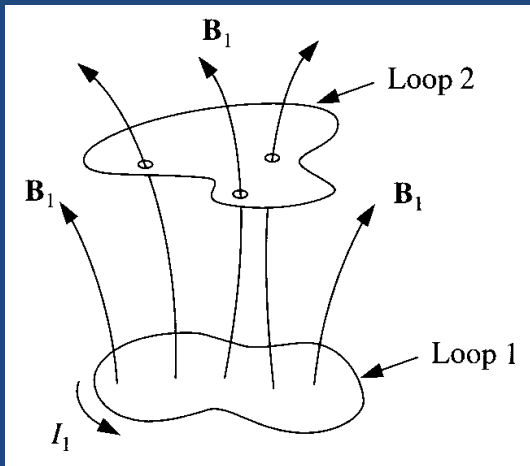
아래의 식을 따르면 $s \rightarrow \infty$ 가 될 때,
 $\vec{E} \rightarrow \infty$ 가 된다는 것을 보여줍니다.
이것은 어떻게 이해할 수 있을까요?

앙페르의 법칙이나 비오-사바르의 법칙은 어디까지나

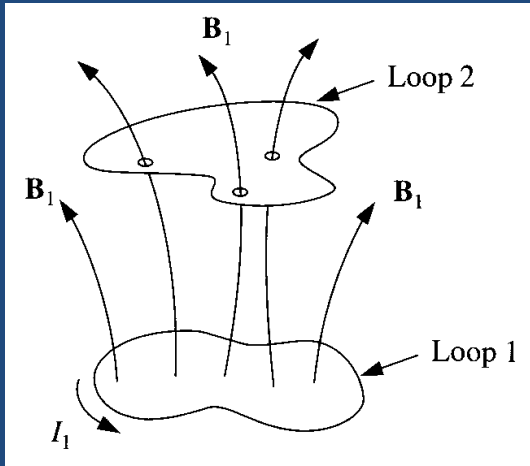
준정적quasistatic 근사의 범위에서 적용되는 원리들입니다.

$s \rightarrow \infty$ 가 되면 전류의 변화가 전달되는 데에

소모되는 시간을 무시할 수 없게 되어 준정적 근사의 범위를 벗어나게 됩니다.

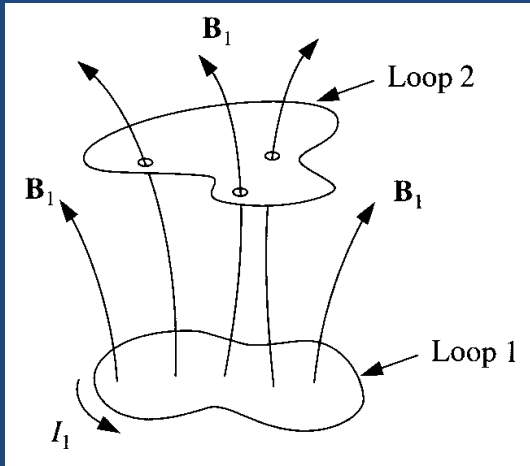


도선이 도선에 미치는 유도 기전력에 대해서 살펴봅시다.
논의를 단순화하기 위해, 먼저 각 도선에는
일정한 정상전류가 흐른다고 가정합시다.



$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \oint \frac{d\vec{s}_1 \times (\widehat{\vec{s}_2 - \vec{s}_1})}{|\vec{s}_2 - \vec{s}_1|^2} \propto I_1$$

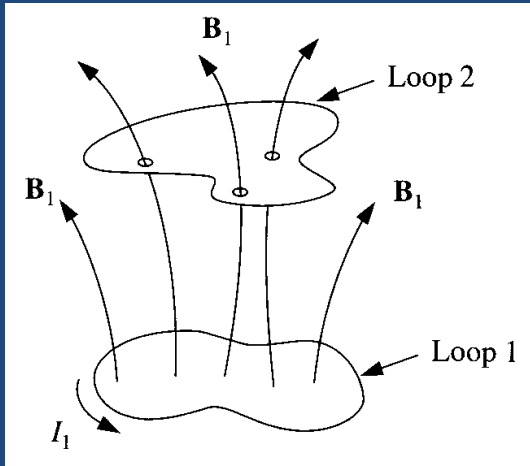
정상전류를 가정했기 때문에, 도선 2에 미치는 자기장의 크기는
도선 1에 흐르는 전류에 비례합니다.



$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \oint \frac{d\vec{s}_1 \times (\widehat{\vec{s}_2 - \vec{s}_1})}{|\vec{s}_2 - \vec{s}_1|^2} \propto I_1$$

$$\Phi_2 = \int \vec{B}_1 \cdot d\vec{\mathcal{A}}_2 \propto I_1$$

따라서 도선 2에 생기는 자기 선속도
도선 1에 흐르는 전류에 비례하게 됩니다.

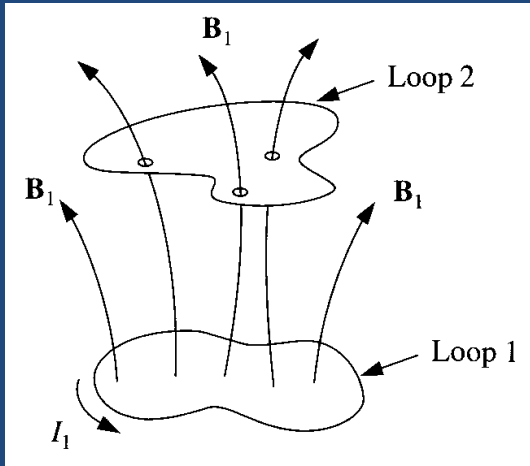


$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \oint \frac{d\vec{s}_1 \times (\widehat{\vec{s}_2 - \vec{s}_1})}{|\vec{s}_2 - \vec{s}_1|^2} \propto I_1$$

$$\Phi_2 = \int \vec{B}_1 \cdot d\vec{\mathcal{A}}_2 \propto I_1$$

$$= M_{21} I_1$$

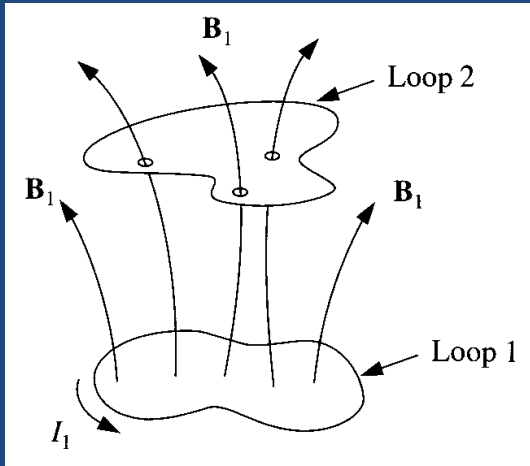
이 때, 선속과 전류 사이의 비례상수를
 도선 1이 도선 2에 미치는 유도 기전력의 **인덕턴스**,
 즉 **상호 인덕턴스** *mutual inductance*라고 부릅니다.



$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \oint \frac{d\vec{s}_1 \times (\widehat{\vec{s}_2 - \vec{s}_1})}{|\vec{s}_2 - \vec{s}_1|^2} \propto I_1$$

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= \int \vec{B}_1 \cdot d\vec{\mathcal{A}}_2 \\ &= \int (\nabla \times \vec{A}_1) \cdot d\vec{\mathcal{A}}_2 \end{aligned}$$

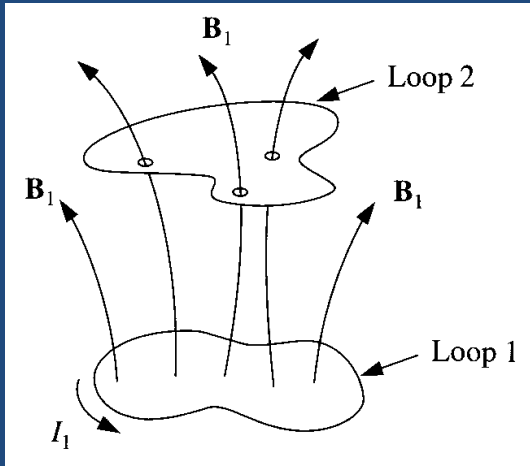
위의 식을 좀 더 계산해 봅시다.



$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \oint \frac{d\vec{s}_1 \times (\widehat{\vec{s}_2 - \vec{s}_1})}{|\vec{s}_2 - \vec{s}_1|^2} \propto I_1$$

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= \int \vec{B}_1 \cdot d\vec{\mathcal{A}}_2 \\ &= \int (\nabla \times \vec{A}_1) \cdot d\vec{\mathcal{A}}_2 \end{aligned}$$

$$\text{스토크스 정리} = \oint \vec{A}_1 \cdot d\vec{s}_2$$



$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \oint \frac{d\vec{s}_1 \times (\widehat{\vec{s}_2 - \vec{s}_1})}{|\vec{s}_2 - \vec{s}_1|^2} \propto I_1$$

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= \int \vec{B}_1 \cdot d\vec{\mathcal{A}}_2 \\ &= \int (\nabla \times \vec{A}_1) \cdot d\vec{\mathcal{A}}_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \oint \vec{A}_1 \cdot d\vec{s}_2 \\ \text{스토크스 정리} &= \oint \left(\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \oint \frac{d\vec{s}_1}{|\vec{s}_2 - \vec{s}_1|} \right) \cdot d\vec{s}_2 \end{aligned}$$

$$M_{21} \equiv \frac{\Phi_2}{I_1} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \oint \frac{d\vec{s}_1 \cdot d\vec{s}_2}{|\vec{s}_2 - \vec{s}_1|}$$

따라서 정리하면 위와 같은 노이만Neumann 공식을 얻습니다.

$$M_{21} \equiv \frac{\Phi_2}{I_1} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \oint \frac{d\vec{s}_1 \cdot d\vec{s}_2}{|\vec{s}_2 - \vec{s}_1|}$$

따라서 정리하면 위와 같은 **노이만** Neumann 공식을 얻습니다.
 상호 인덕턴스는 1과 2의 교환에 대해 **대칭적**입니다.
 즉, $M_{12} = M_{21} \equiv M$ 가 항상 성립합니다.

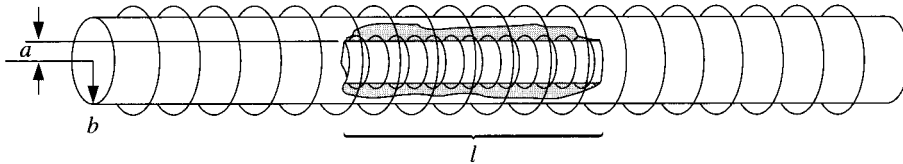
$$M_{21} \equiv \frac{\Phi_2}{I_1} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \oint \frac{d\vec{s}_1 \cdot d\vec{s}_2}{|\vec{s}_2 - \vec{s}_1|}$$

이 공식에 따르면 상호 인덕턴스의 적분은
고리의 기하학적 모양에 의해 결정된다는 것을 알 수 있습니다.

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -M \frac{dI_1}{dt}$$

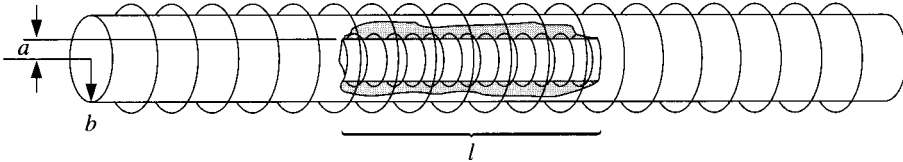
우리는 이러한 성질이 정상전류 뿐 아니라
준정적 근사의 경우로 확장될 수 있다고 생각할 수 있습니다.
그러면 유도에 의한 기전력은 다음과 같이 적을 수 있습니다.

예: 솔레노이드



그림과 같은 두 개의 솔레노이드의 안쪽에 전류 I 가 흐를 때, 상호 인덕턴스를 계산해 봅시다.

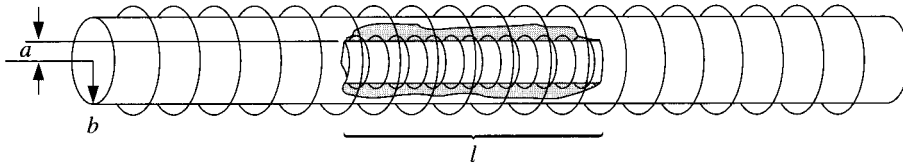
예: 솔레노이드



그림과 같은 두 개의 솔레노이드의 안쪽에 전류 I 가 흐를 때, 상호 인덕턴스를 계산해 봅시다.

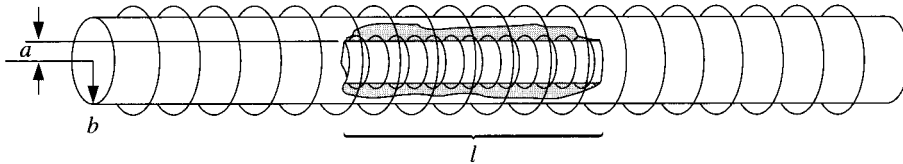
이 계산을 직접 하는 것은 어려우므로, 그 **반대의 상황**,
즉 긴 코일에 전류 I 가 흐르는 경우를 생각하도록 합시다.

예: 솔레노이드



긴 코일 속의 자기장 $B = \mu_0 n_2 I$

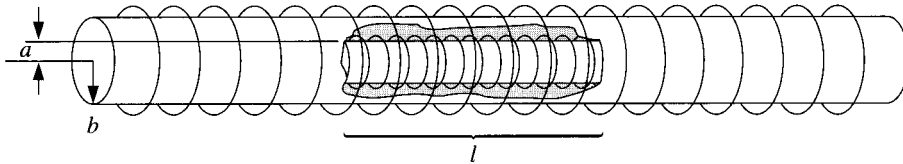
예: 솔레노이드



긴 코일 속의 자기장 $B = \mu_0 n_2 I$

짧은 코일 단면의 선속 $B \cdot \pi a^2 = \mu_0 n_2 I \pi a^2$

예: 솔레노이드

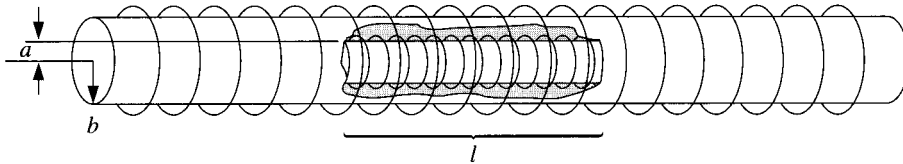


긴 코일 속의 자기장 $B = \mu_0 n_2 I$

짧은 코일 단면의 선속 $B \cdot \pi a^2 = \mu_0 n_2 I \pi a^2$

짧은 코일 전체의 선속 $\Phi = n_1 l \cdot B \cdot \pi a^2 = \mu_0 n_1 n_2 I \pi a^2 l$

예: 솔레노이드



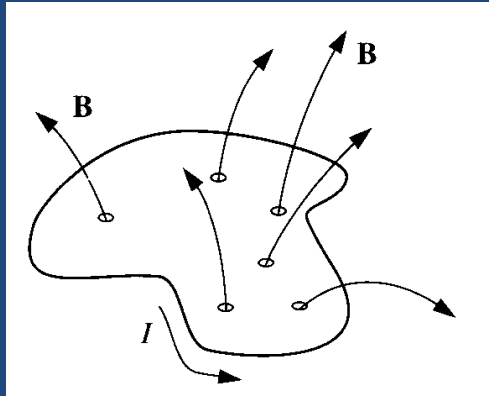
긴 코일 속의 자기장 $B = \mu_0 n_2 I$

짧은 코일 단면의 선속 $B \cdot \pi a^2 = \mu_0 n_2 I \pi a^2$

짧은 코일 전체의 선속 $\Phi = n_1 l \cdot B \cdot \pi a^2 = \mu_0 n_1 n_2 I \pi a^2 l$

상호 인덕턴스 $M = \mu_0 n_1 n_2 \pi a^2 l$

상호 인덕턴스의 대칭성에 의해, 짧은 코일에 전류가 흐르는 경우도 결과가 같으리라는 것을 알 수 있습니다.

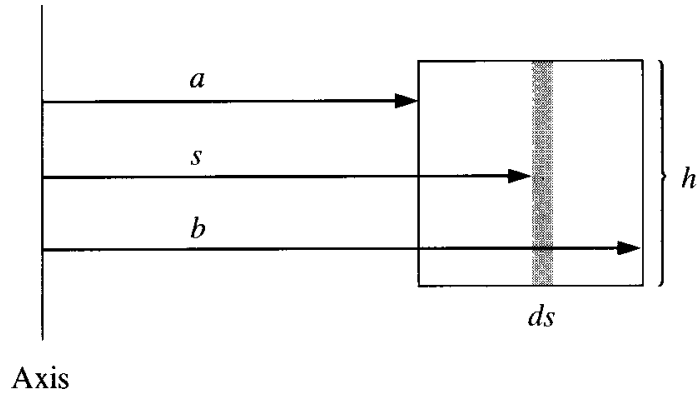


$$\Phi = LI$$

$$\mathcal{E} = -L \frac{dI}{dt}$$

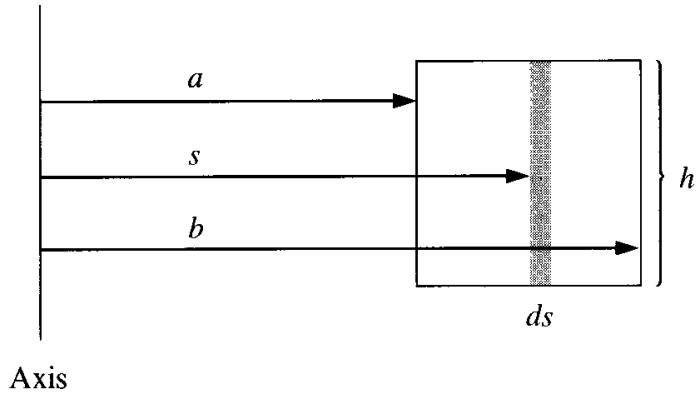
더 나아가서 도선은 자신이 만드는 자기장에 영향을 받기도 합니다.
이것을 자체 인덕턴스self-inductance라고 합니다.
인덕턴스의 단위는 H (헨리)라고 하며, $V \cdot s \cdot A^{-1}$ 와 같습니다.

예1: 토로이드



그림과 같은 토로이드의 단면이 직사각형이라고
합시다. 이 때의 자체 인덕턴스를 살펴봅시다.

예1: 토로이드



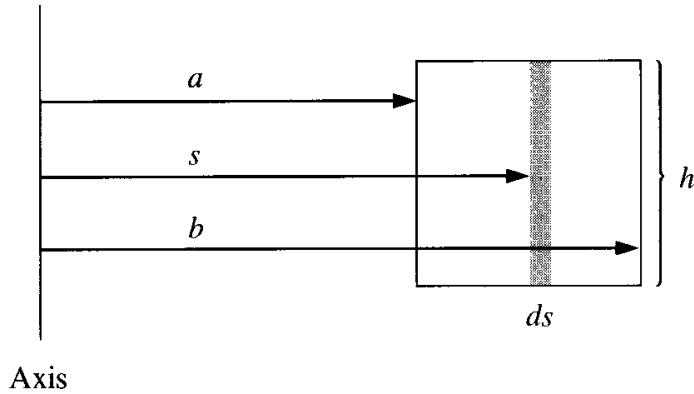
그림과 같은 토로이드의 단면이 직사각형이라고 합시다. 이 때의 자체 인덕턴스를 살펴봅시다.

고리 한 개의 선속

$$\int \vec{B} \cdot d\vec{A} = \frac{\mu_0 NI}{2\pi} h \int_a^b \frac{ds}{s}$$

$$= \frac{\mu_0 NI}{2\pi s}$$

예1: 토로이드

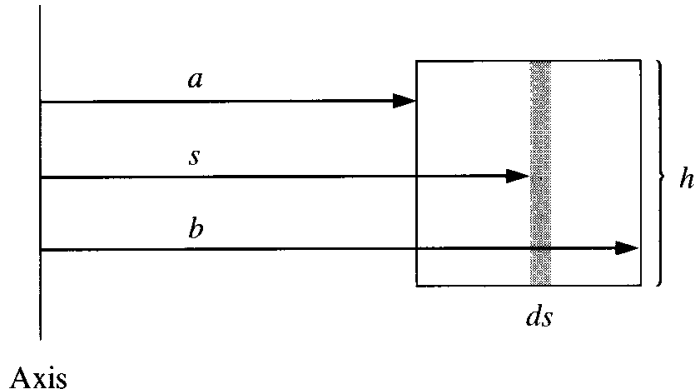


그림과 같은 토로이드의 단면이 직사각형이라고 합시다. 이 때의 자체 인덕턴스를 살펴봅시다.

고리 한 개의 선속

$$\begin{aligned} \int \vec{B} \cdot d\vec{A} &= \frac{\mu_0 NI}{2\pi} h \int_a^b \frac{ds}{s} \\ &= \frac{\mu_0 NI}{2\pi s} = \frac{\mu_0 NI}{2\pi} h \ln \frac{b}{a} \end{aligned}$$

예1: 토로이드



그림과 같은 토로이드의 단면이 직사각형이라고 합시다. 이 때의 자체 인덕턴스를 살펴봅시다.

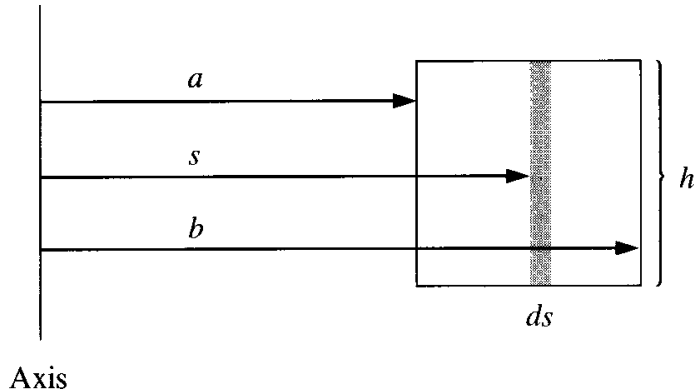
고리 한 개의 선속

$$\begin{aligned} \int \vec{B} \cdot d\vec{A} &= \frac{\mu_0 NI}{2\pi} h \int_a^b \frac{ds}{s} \\ &= \frac{\mu_0 NI}{2\pi s} = \frac{\mu_0 NI}{2\pi} h \ln \frac{b}{a} \end{aligned}$$

토로이드 전체의 선속

$$\Phi = N \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = \frac{\mu_0 N^2 I}{2\pi} h \ln \frac{b}{a}$$

예1: 토로이드



그림과 같은 토로이드의 단면이 직사각형이라고 합시다. 이 때의 자체 인덕턴스를 살펴봅시다.

고리 한 개의 선속

$$\begin{aligned} \int \vec{B} \cdot d\vec{A} &= \frac{\mu_0 NI}{2\pi} h \int_a^b \frac{ds}{s} \\ &= \frac{\mu_0 NI}{2\pi s} = \frac{\mu_0 NI}{2\pi} h \ln \frac{b}{a} \end{aligned}$$

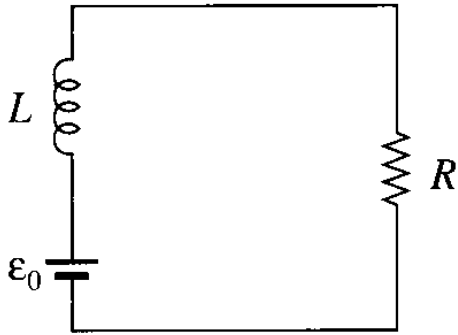
토로이드 전체의 선속

$$\Phi = N \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = \frac{\mu_0 N^2 I}{2\pi} h \ln \frac{b}{a}$$

자체 인덕턴스

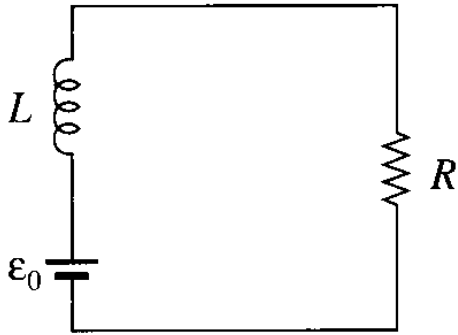
$$L = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

예2: RL 회로



그림과 같은 RL 회로에 전원을 끊었다가
연결시키는 상황을 생각해 봅시다.

예2: RL 회로

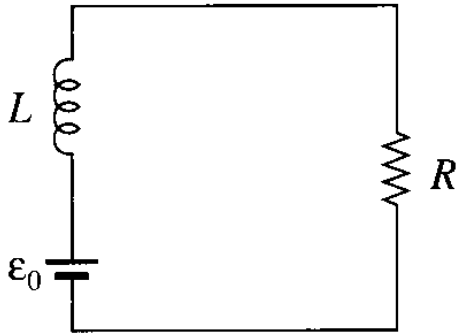


그림과 같은 RL 회로에 전원을 끊었다가
연결시키는 상황을 생각해 봅시다.

회로는 다음과 같은 방정식을 만족시켜야 합니다.

$$\varepsilon_0 = IR + L \frac{dI}{dt}$$

예2: RL 회로



그림과 같은 RL 회로에 전원을 끊었다가
연결시키는 상황을 생각해 봅시다.

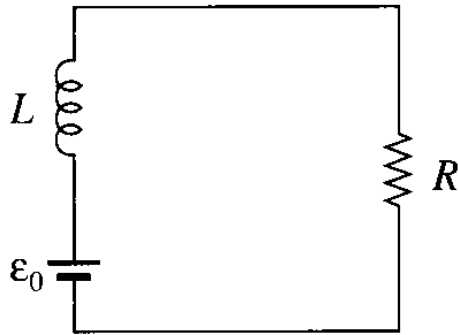
회로는 다음과 같은 방정식을 만족시켜야 합니다.

$$\varepsilon_0 = IR + L \frac{dI}{dt}$$

일반 해에 초기조건 $I(t = 0) = 0$ 을 대입하면 다음을 얻습니다.

$$I(t) = \frac{\varepsilon_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right)$$

예2: RL 회로



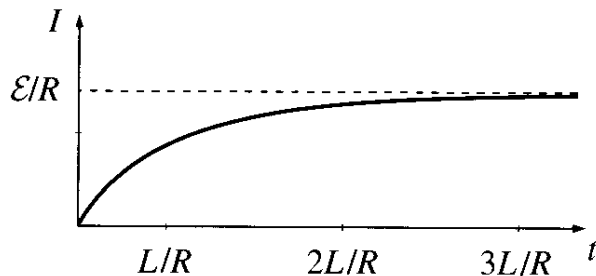
그림과 같은 RL 회로에 전원을 끊었다가
연결시키는 상황을 생각해 봅시다.

회로는 다음과 같은 방정식을 만족시켜야 합니다.

$$\varepsilon_0 = IR + L \frac{dI}{dt}$$

일반 해에 초기조건 $I(t = 0) = 0$ 을 대입하면 다음을 얻습니다.

$$I(t) = \frac{\varepsilon_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right)$$



시간이 **시간상수 L/R** 정도로 충분히 지나면
도선에 전류가 자유롭게 흐르게 됩니다.

$$\frac{dW}{dt} = -\mathcal{E}I = LI \frac{dI}{dt}$$

자기장은 에너지를 저장하기도 합니다.
일률은 위와 같이 적을 수 있는데,
여기에서 음의 부호는 전류를 흘려 보낼 때,
유도기전력에 하는 일을 의미하는 것입니다.

$$W = \frac{1}{2}LI^2$$

양 변을 시간으로 적분하면 다음 관계식을 얻습니다.

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{\mathcal{A}} = \int (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{\mathcal{A}}$$

한 편, 같은 현상을 위와 같이 표현해 봅시다.

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{\mathcal{A}} = \int (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{\mathcal{A}}$$

$$= LI$$

인덕턴스의 정의

$$= \oint \vec{A} \cdot d\vec{s}$$

스토크스 정리

한 편, 같은 현상을 위와 같이 표현해 봅시다.

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{\mathcal{A}} = \int (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{\mathcal{A}}$$

$$= LI \qquad \qquad \qquad = \oint \vec{A} \cdot d\vec{s}$$

인덕턴스의 정의

스토크스 정리

$$W = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}I\Phi = \frac{1}{2}I \oint \vec{A} \cdot d\vec{s}$$

따라서 일을 위와 같이 다시 적을 수 있습니다.

$$W = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}I\Phi = \frac{1}{2}I \oint \vec{A} \cdot d\vec{s}$$

$$= \frac{1}{2} \oint (\vec{A} \cdot \vec{I}) ds$$

$\vec{I} = I\hat{s}$

$$W = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}I\Phi = \frac{1}{2}I \oint \vec{A} \cdot d\vec{s}$$

$$\stackrel{\vec{I}=I\hat{s}}{=} \frac{1}{2} \oint (\vec{A} \cdot \vec{I}) ds$$

$$\stackrel{\text{일반화}}{=} \frac{1}{2} \int_V (\vec{A} \cdot \vec{J}) dV$$

$$W = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}I\Phi = \frac{1}{2}I \oint \vec{A} \cdot d\vec{s}$$

$$= \frac{1}{2} \oint (\vec{A} \cdot \vec{I}) ds$$

$\vec{I} = I\hat{s}$

$$= \frac{1}{2} \int_V (\vec{A} \cdot \vec{J}) dV$$

일반화

$$= \frac{1}{2\mu_0} \int_V \left(\vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B}) \right) dV$$

$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$

$$\begin{aligned}
 W &= \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} I \Phi = \frac{1}{2} I \oint \vec{A} \cdot d\vec{s} \\
 &= \frac{1}{2\mu_0} \int_V \left(\vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B}) \right) dV \\
 &= \frac{1}{2\mu_0} \int_V \left(\vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) \right) dV
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W &= \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} I \Phi = \frac{1}{2} I \oint \vec{A} \cdot d\vec{s} \\
&= \frac{1}{2\mu_0} \int_V \left(\vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B}) \right) dV \\
&= \frac{1}{2\mu_0} \int_V \left(\vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) \right) dV \\
&= \frac{1}{2\mu_0} \int_V B^2 dV - \frac{1}{2\mu_0} \oint_{\partial V} (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\mathcal{A}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W &= \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}I\Phi = \frac{1}{2}I \oint \vec{A} \cdot d\vec{s} \\
 &= \frac{1}{2\mu_0} \int_V \left(\vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B}) \right) dV \\
 &= \frac{1}{2\mu_0} \int_V \left(\vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) \right) dV \\
 &= \frac{1}{2\mu_0} \int_V B^2 dV - \frac{1}{2\mu_0} \oint_{\partial V} (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\mathcal{A}}
 \end{aligned}$$

이 부분은 적분 영역 $\mathcal{V}$ 를 전 공간으로 할 때,
사라지게 됩니다.

$$W = \frac{1}{2}LI^2 = \int_V u_B dV$$

$$u_B \equiv \frac{B^2}{2\mu_0}$$

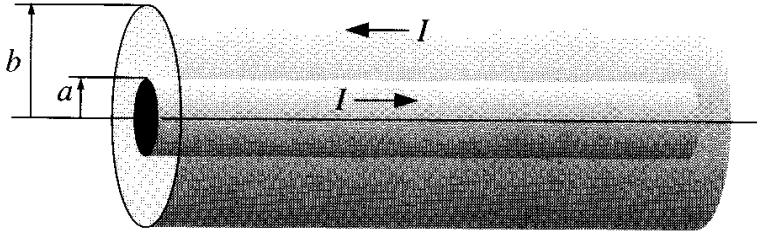
따라서 다음 결과를 얻습니다.
여기에서 u_B 를 자기장의 에너지 밀도라고 할 수 있습니다.

$$W_E = \frac{1}{2} \int V \rho d^3r = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 dV$$

$$W_B = \frac{1}{2} \int \vec{A} \cdot \vec{J} d^3r = \frac{1}{2\mu_0} \int B^2 dV$$

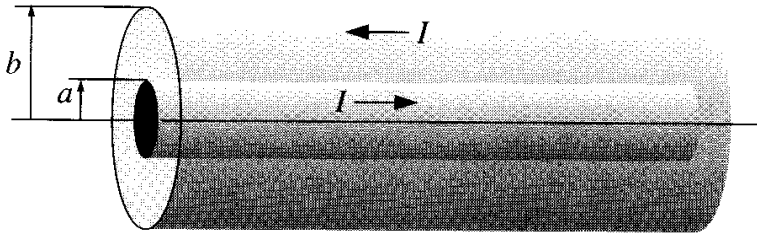
전기장의 에너지 밀도와 자기장의 에너지 밀도는
위와 같이 흥미로운 대응 관계를 가지게 됩니다.

예: 동축선에 저장된 에너지



그림과 같은 동축선 사이에 저장된 자기 에너지를
계산해 봅시다.

예: 동축선에 저장된 에너지

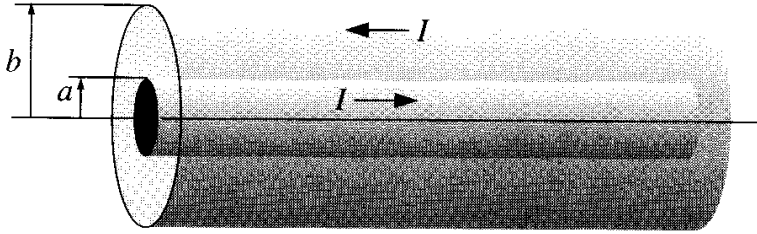


그림과 같은 동축선 사이에 저장된 자기 에너지를
계산해 봅시다.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \hat{\phi}$$

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 s^2}$$

예: 동축선에 저장된 에너지



그림과 같은 동축선 사이에 저장된 자기 에너지를 계산해 봅시다.

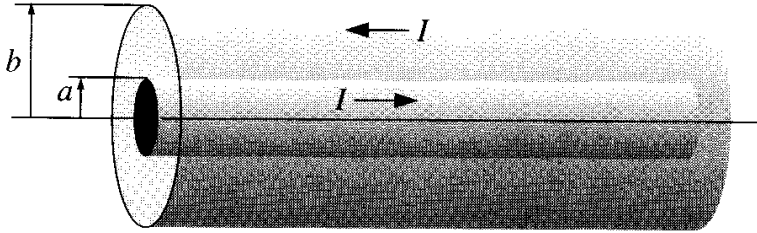
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \hat{\phi}$$

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 s^2}$$

동축선의 길이를 l 이라 할 때, 부피 적분을 해서 총 에너지를 구할 수 있습니다.

$$u_B dV = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 s^2} \cdot 2\pi l s \cdot ds = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \frac{ds}{s}$$

예: 동축선에 저장된 에너지



그림과 같은 동축선 사이에 저장된 자기 에너지를 계산해 봅시다.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \hat{\phi}$$

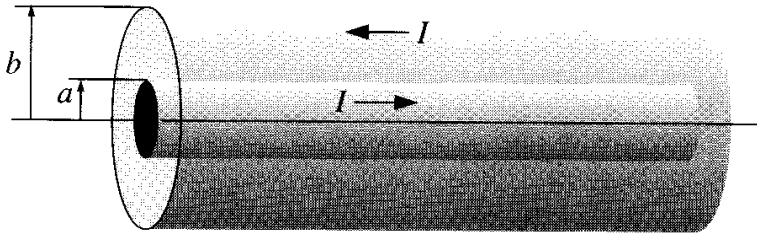
$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 s^2}$$

동축선의 길이를 l 이라 할 때, 부피 적분을 해서 총 에너지를 구할 수 있습니다.

$$u_B dV = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 s^2} \cdot 2\pi l s \cdot ds = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \frac{ds}{s}$$

$$W = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \ln \frac{b}{a} = \frac{1}{2} L I^2$$

예: 동축선에 저장된 에너지



그림과 같은 동축선 사이에 저장된 자기 에너지를 계산해 봅시다.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \hat{\phi}$$

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 s^2}$$

동축선의 길이를 l 이라 할 때, 부피 적분을 해서 총 에너지를 구할 수 있습니다.

$$u_B dV = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 s^2} \cdot 2\pi l s \cdot ds = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \frac{ds}{s}$$

$$W = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \ln \frac{b}{a} = \frac{1}{2} L I^2$$

단위 길이당 인덕턴스를 간접적으로 계산할 수 있습니다.

$$\frac{L}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

이제 전자기 유도 현상을 포함해서
전기장과 자기장의 방정식을
적어보도록 합시다.

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

지금까지 유도한 것들을 적어보면
위와 같은 네 개의 방정식으로 정리됩니다.

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) = 0 = \nabla \cdot (\mu_0 \vec{J}) = \mu_0 \nabla \cdot \vec{J} \quad ?$$

그러나 이 식들은 정합적이지 않습니다.
정상전류가 아닌 경우에는 옳지 않아 보입니다.

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

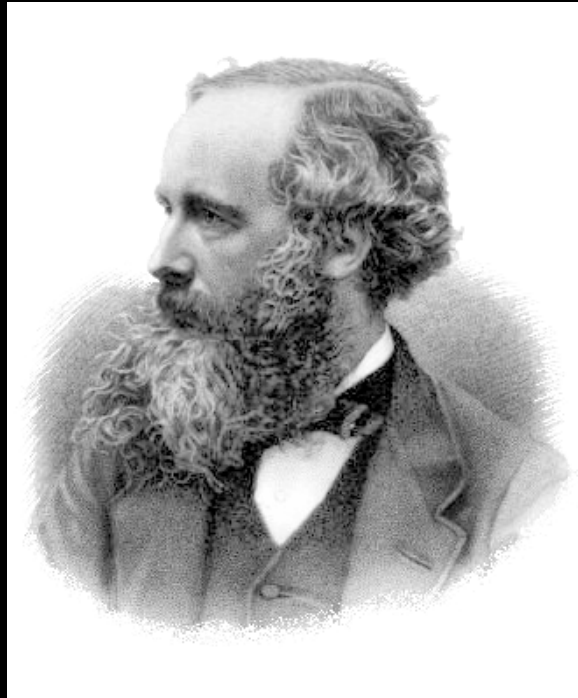
$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) = 0 = \nabla \cdot (\mu_0 \vec{J}) = \mu_0 \nabla \cdot \vec{J} \quad ?$$

또한 이 식들은 대칭적이지 않습니다.
 자기장의 변화는 전기장을 만들어 내지만
 전기장의 변화는 왜 자기장을 만들지 않을까요?



맥스웰은 이 방정식들을
정합적으로 완성하게 됩니다.

$$\nabla \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

맥스웰이 한 일을 (역사적이지는 않은 방법으로) 되짚어보도록 합시다.
먼저, 정상전류의 범위를 넘어서는 경우
우리는 전하의 보존에 의해 연속 방정식을 요청하게 됩니다.

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{J} &= -\frac{\partial \rho}{\partial t} \\ &= -\epsilon_0 \frac{\partial (\nabla \cdot \vec{E})}{\partial t} = -\nabla \cdot \left(\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)\end{aligned}$$

앞에서 열거한 방정식 중 **가우스의 법칙**이 여전히 유효하다면
위와 같이 다시 적을 수 있을 것입니다.

$$\vec{J} \rightarrow \vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

따라서 연속 방정식을 만족시키기 위해서는
전류를 위와 같이 바꾸어 주면 됩니다.

$$\vec{J} \rightarrow \vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

그러면 앞의 네 가지 방정식 중에서 바꾸어 주어야 할 것은
오직 네 번째 방정식이 됩니다.

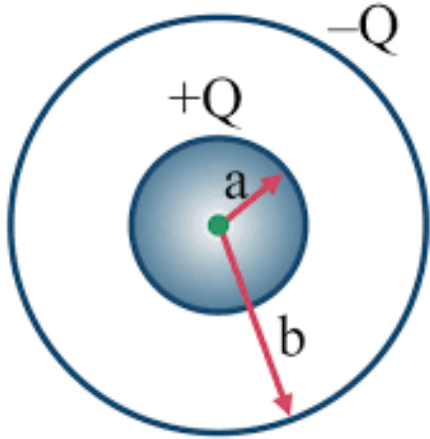
이것이 바로 맥스웰이 방정식을 수정한 방법입니다.

$$\vec{J} \rightarrow \vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \equiv \vec{J}_D$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

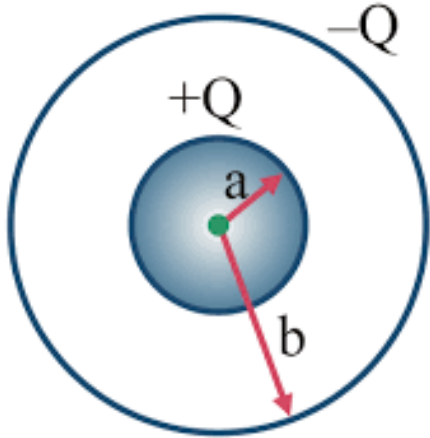
여기에서 추가된 항은 전기장이 유도하는 전류의 의미를 가집니다.
 이것을 변위 전류displacement current라고 부릅니다.

예: 변위 전류



그림과 같은 구의 내부와 외부에 시간에 따라 변하는 전하 $+Q(t)$ 와 $-Q(t)$ 가 각각 대전되어 있다고 합시다. 두 영역 사이의 전도도는 σ 라고 합시다.

예: 변위 전류

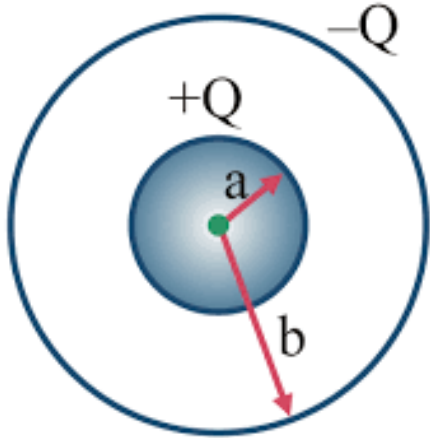


그림과 같은 구의 내부와 외부에 시간에 따라 변하는 전하 $+Q(t)$ 와 $-Q(t)$ 가 각각 대전되어 있다고 합시다. 두 영역 사이의 전도도는 σ 라고 합시다.

전하가 변하기 때문에, 전류가 흐르는 것으로 생각할 수 있습니다. 이 때 옴의 법칙에 의하면 다음과 같습니다.

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} = \sigma \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

예: 변위 전류



그림과 같은 구의 내부와 외부에 시간에 따라 변하는 전하 $+Q(t)$ 와 $-Q(t)$ 가 각각 대전되어 있다고 합시다. 두 영역 사이의 전도도는 σ 라고 합시다.

전하가 변하기 때문에, 전류가 흐르는 것으로 생각할 수 있습니다. 이 때 옴의 법칙에 의하면 다음과 같습니다.

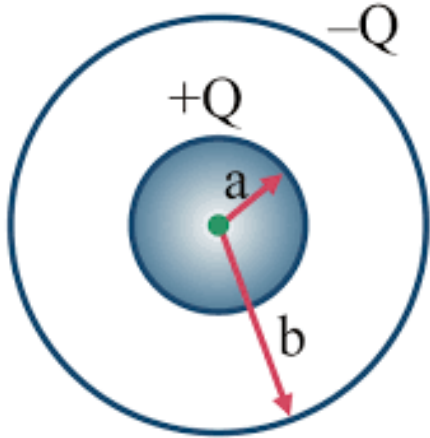
$$\vec{J} = \sigma \vec{E} = \sigma \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

한 편, 전하의 시간 변화의 관점에서는 다음과 같습니다.

$$I = -\dot{Q} = \int \vec{J} \cdot d\vec{A} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} Q$$

이 때 자기장은 어떻게 될까요?

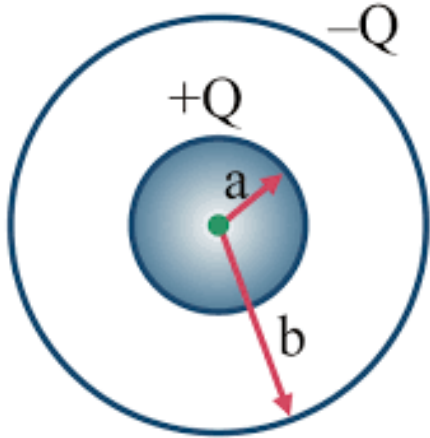
예: 변위 전류



전류는 흐르지만 자기장은 없을 것 같은 상황이지만
변위 전류를 고려하면 모순점을 피할 수 있습니다.

$$\begin{aligned}\vec{J}_D &= \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\dot{Q}}{4\pi r^2} \hat{r} \\ &= -\frac{\sigma Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \hat{r}\end{aligned}$$

예: 변위 전류



전류는 흐르지만 자기장은 없을 것 같은 상황이지만
변위 전류를 고려하면 모순점을 피할 수 있습니다.

$$\begin{aligned}\vec{J}_D &= \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\dot{Q}}{4\pi r^2} \hat{r} \\ &= -\frac{\sigma Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}\end{aligned}$$

이 값은 정확히 전도 전류의 크기와 같으며 방향만 반대입니다.

즉, 변위 전류가 전도 전류를 지워서 최종적으로 자기장이 사라질 수 있는 것입니다.

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

이제 이것이 바로 완성된 맥스웰 방정식입니다.

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

먼저 전기장과 자기장은 원천이 만들어 냅니다.

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

또한 이 방정식은 전기장과 자기장 사이의 상호작용을 설명합니다.

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

여기에 로렌츠 힘 법칙을 더하면
고전 전자기학의 근본적인 모든 방정식을 얻게 됩니다.

이 맥스웰 방정식은 다음 두 가지 사항에 대해
고려할 필요가 있습니다.

첫째는, 물질 내부에서 달라지는 부분입니다.
둘째는, 경계조건을 적용하는 부분입니다.

$$\rho_b = -\nabla \cdot \vec{P}$$

$$\vec{J}_b = \nabla \times \vec{M}$$

먼저 물질 내부를 고려하도록 합시다.
정전기학과 정자기학에서 우리는
위와 같은 **속박전하밀도**와 **속박전류밀도**를 정의하였습니다.

$$\rho_b = -\nabla \cdot \vec{P}$$

$$\vec{J}_b = \nabla \times \vec{M}$$

이 두 효과는 자유 전하 또는 자유 전류에 의한 것이 아니라
전기장 및 자기장에 대한 물질의 반응에 의해 나타나는
현상이 됩니다.

$$\rho_b = -\nabla \cdot \vec{P}$$

$$\vec{J}_b = \nabla \times \vec{M}$$

$$\vec{J}_p = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

만일 전류가 시간에 따라 변하게 되면
우리는 위와 같은 **편극 전류밀도**를 추가로 도입할 필요가 생깁니다.
그 이유에 대해서 한 번 살펴봅시다.

$$\nabla \cdot \vec{J}_p = \frac{\partial (\nabla \cdot \vec{P})}{\partial t} = - \frac{\partial \rho_b}{\partial t}$$

속박전하도 전하이기 때문에 보존되어야 하며,
따라서 연속 방정식을 만족해야 합니다.
따라서 편극 전류는 속박전하의 보존을 위해 요청됩니다.

$$\rho = \rho_f + \rho_b$$

$$\vec{J} = \vec{J}_f + \vec{J}_b + \vec{J}_p$$

이제 총 전하와 총 전류밀도를 위와 같이 적어 봅시다.

$$\begin{aligned}\rho &= \rho_f + \rho_b \\ &= \rho_f - \nabla \cdot \vec{P}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{J} &= \vec{J}_f + \vec{J}_b + \vec{J}_p \\ &= \vec{J}_f + \nabla \times \vec{M} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}\end{aligned}$$

이제 총 전하와 총 전류밀도를 위와 같이 적어 봅시다.

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho_f - \nabla \cdot \vec{P})$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J}_f + \nabla \times \vec{M} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \right) + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

이것을 사용해서 맥스웰 방정식을 다시 써 봅시다.

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho_f - \nabla \cdot \vec{P})$$

$$\xrightarrow{\quad} \nabla \cdot \vec{D} = \rho_f$$

$$\vec{D} \equiv \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J}_f + \nabla \times \vec{M} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \right) + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho_f - \nabla \cdot \vec{P})$$

$$\xrightarrow{\quad} \nabla \cdot \vec{D} = \rho_f$$

$$\vec{D} \equiv \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J}_f + \nabla \times \vec{M} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \right) + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\xrightarrow{\quad} \nabla \times \vec{H} = \vec{J}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\vec{H} \equiv \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}$$

$$\vec{D} \equiv \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\vec{H} \equiv \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}$$

$$\vec{D} \equiv \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

따라서 물질이 있는 경우 맥스웰 방정식은
위와 같이 적을 수 있습니다.

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \equiv \vec{J}_D$$

$$\vec{H} \equiv \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}$$

$$\vec{D} \equiv \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

맥스웰이 도입한 변위 전류displacement current는
전기 변위electric displacement와 관련됩니다.

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_E \vec{E} \quad \vec{M} = \chi_B \vec{H}$$

더 나아가 선형 매질을 가정하면,
좀 더 간단한 관계를 얻게 됩니다.

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_E \vec{E}$$

$$\vec{M} = \chi_B \vec{H}$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 (1 + \chi_E) \vec{E}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0 (1 + \chi_B)} \vec{B}$$

$$= \epsilon_0 \kappa_E \vec{E}$$

$$= \frac{1}{\mu_0 \kappa_B} \vec{B}$$

$$= \epsilon \vec{E}$$

$$= \frac{1}{\mu} \vec{B}$$

$$\oint_{\mathcal{A}} \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q_f$$

$$\oint_{\mathcal{A}} \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

$$\oint_{\partial\mathcal{A}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{A}} \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

$$\oint_{\partial\mathcal{A}} \vec{H} \cdot d\vec{s} = I_f + \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{A}} \vec{D} \cdot d\vec{A}$$

마지막으로 경계조건을 고려해 봅시다.
이것을 위해 맥스웰 방정식을 적분 형태로 적어봅시다.

$$\oint_{\mathcal{A}} \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q_f$$

$$\oint_{\mathcal{A}} \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

$$\oint_{\partial\mathcal{A}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{A}} \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

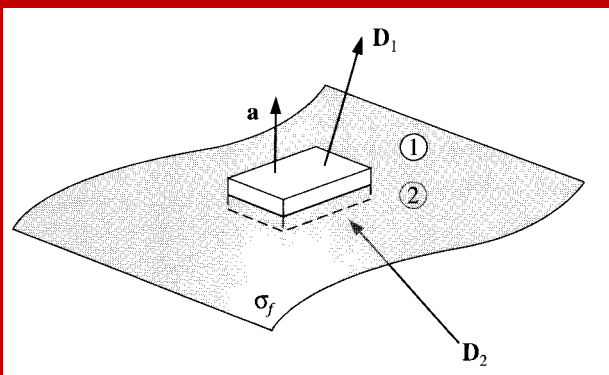
$$\oint_{\partial\mathcal{A}} \vec{H} \cdot d\vec{s} = I_f + \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{A}} \vec{D} \cdot d\vec{A}$$

이 중에서 둘은 폐곡면 적분을 나타내고
나머지 둘은 폐곡선 적분을 나타냅니다.

이제 이 적분의 경로를 미소 폐곡면 또는 미소 폐곡선의
극한으로 생각할 때, 경계에서 어떤 일이 일어나는지를 살펴봅시다.

$$\oint_{\mathcal{A}} \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q_f$$

$$\oint_{\mathcal{A}} \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$



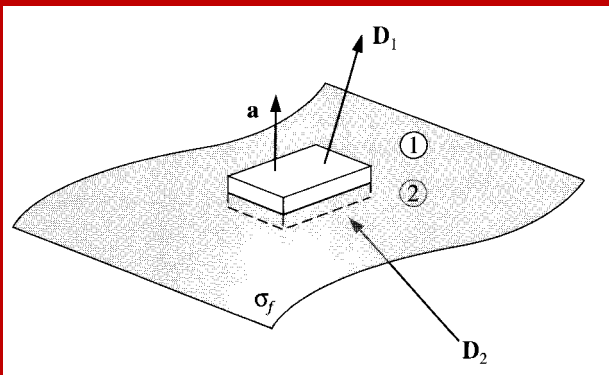
먼저 면적분에 대해서 생각해 봅시다.
 왼쪽 그림과 같이 미소 폐곡면을 잡으면
 적분은 간단하게 정리됩니다.

$$\oint_{\mathcal{A}} \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q_f$$

$$\vec{D}_1 \cdot \vec{a} - \vec{D}_2 \cdot \vec{a} = \sigma_f a$$

$$\oint_{\mathcal{A}} \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

$$\vec{B}_1 \cdot \vec{a} - \vec{B}_2 \cdot \vec{a} = 0$$



먼저 면적분에 대해서 생각해 봅시다.
 왼쪽 그림과 같이 미소 폐곡면을 잡으면
 적분은 간단하게 정리됩니다.

$$\oint_{\mathcal{A}} \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q_f$$

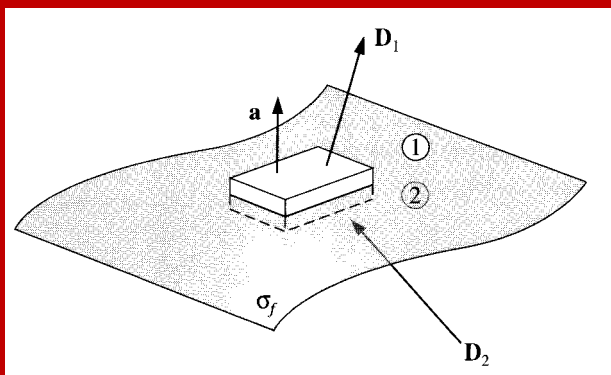
$$\vec{D}_1 \cdot \vec{a} - \vec{D}_2 \cdot \vec{a} = \sigma_f a$$

$$D_1^\perp - D_2^\perp = \sigma_f$$

$$\oint_{\mathcal{A}} \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

$$\vec{B}_1 \cdot \vec{a} - \vec{B}_2 \cdot \vec{a} = 0$$

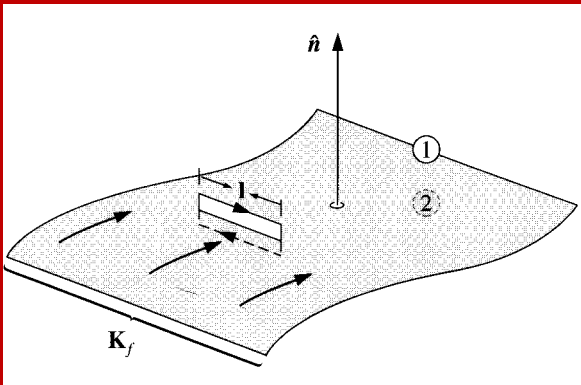
$$B_1^\perp - B_2^\perp = 0$$



먼저 면적분에 대해서 생각해 봅시다.
왼쪽 그림과 같이 미소 폐곡면을 잡으면
적분은 간단하게 정리됩니다.

$$\oint_{\partial \mathcal{A}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{A}} \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

$$\oint_{\partial \mathcal{A}} \vec{H} \cdot d\vec{s} = I_f + \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{A}} \vec{D} \cdot d\vec{A}$$



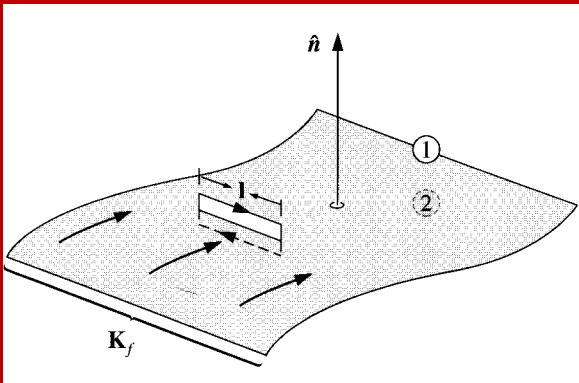
선적분에 대해서도 생각해 봅시다.
 왼쪽 그림과 같이 미소 폐곡선을 잡으면
 시간 미분 부분은 0으로 잡을 수 있어서
 적분은 간단하게 정리됩니다.

$$\oint_{\partial \mathcal{A}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{A}} \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

$$\vec{E}_1 \cdot \vec{s} - \vec{E}_2 \cdot \vec{s} = 0$$

$$\oint_{\partial \mathcal{A}} \vec{H} \cdot d\vec{s} = I_f + \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{A}} \vec{D} \cdot d\vec{A}$$

$$\vec{H}_1 \cdot \vec{s} - \vec{H}_2 \cdot \vec{s} = I_f = \vec{K}_f \cdot (\hat{n} \times \vec{s}) = (\vec{K}_f \times \hat{n}) \cdot \vec{s}$$



선적분에 대해서도 생각해 봅시다.
 왼쪽 그림과 같이 미소 폐곡선을 잡으면
 시간 미분 부분은 0으로 잡을 수 있어서
 적분은 간단하게 정리됩니다.

$$\oint_{\partial \mathcal{A}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{A}} \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

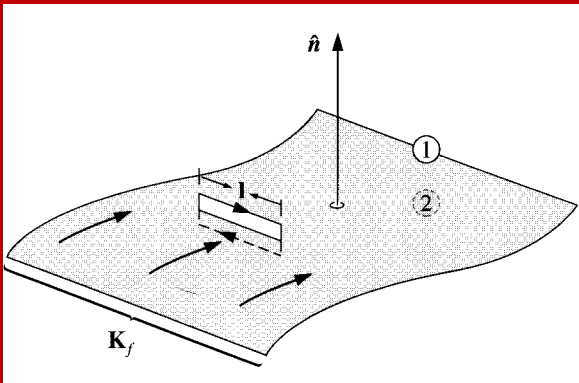
$$\vec{E}_1 \cdot \vec{s} - \vec{E}_2 \cdot \vec{s} = 0$$

$$E_1^{\parallel} - E_2^{\parallel} = 0$$

$$\oint_{\partial \mathcal{A}} \vec{H} \cdot d\vec{s} = I_f + \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{A}} \vec{D} \cdot d\vec{A}$$

$$H_1^{\parallel} - H_2^{\parallel} = \vec{K}_f \times \hat{n}$$

$$\vec{H}_1 \cdot \vec{s} - \vec{H}_2 \cdot \vec{s} = I_f = \vec{K}_f \cdot (\hat{n} \times \vec{s}) = (\vec{K}_f \times \hat{n}) \cdot \vec{s}$$



선적분에 대해서도 생각해 봅시다.
 왼쪽 그림과 같이 미소 폐곡선을 잡으면
 시간 미분 부분은 0으로 잡을 수 있어서
 적분은 간단하게 정리됩니다.

$$D_1^\perp - D_2^\perp = \sigma_f \quad B_1^\perp - B_2^\perp = 0$$

$$E_1^\parallel - E_2^\parallel = 0 \quad H_1^\parallel - H_2^\parallel = \vec{K}_f \times \hat{n}$$

이 모든 조건을 정리하면 다음 경계조건을 얻습니다.

$$\epsilon_1 E_1^\perp - \epsilon_2 E_2^\perp = \sigma_f \quad B_1^\perp - B_2^\perp = 0$$

$$E_1^\parallel - E_2^\parallel = 0 \quad \frac{1}{\mu_1} B_1^\parallel - \frac{1}{\mu_2} B_2^\parallel = \vec{K}_f \times \hat{n}$$

선형 매질의 경우에는 좀 더 자세히 표현할 수 있습니다.

$$\epsilon_1 E_1^\perp - \epsilon_2 E_2^\perp = 0 \quad B_1^\perp - B_2^\perp = 0$$

$$E_1^\parallel - E_2^\parallel = 0 \quad \frac{1}{\mu_1} B_1^\parallel - \frac{1}{\mu_2} B_2^\parallel = 0$$

더 나아가서, 만일 자유전하나 자유전류가 없는 경우에는
위와 같이 적을 수 있습니다.

이제 이것으로 동적인 경우를 포함해서
전기장과 자기장을 기술할 수 있는
고전 전자기학의 가장 근본적인 방정식들을 모두 살펴보았습니다.

이제 이 방정식들이 의미하는 것을
본격적으로 살펴보도록 하겠습니다.

감사합니다