

제8장

보존법칙

이번 장에서는 맥스웰 방정식이
보존 법칙을 잘 설명하는지를 살펴봅시다.

여기에서 보존되어야 하는 양이란,
전하, 에너지, 운동량 및 각운동량을 의미합니다.

물리학에서의 보존 법칙은 두 가지 방법으로 표현됩니다.

하나는 **대역적**global으로 보존된다는 것이고,
다른 하나는 **국소적**local으로 시공간의 각 지점에서
보존된다는 것입니다.

물론 국소적 보존 법칙이
좀 더 강력한 기술방식이 됩니다.

먼저 전하에 대한 보존 법칙을 살펴봅시다.

$$\frac{dQ}{dt} = - \oint_{\mathcal{A}} \vec{J} \cdot d\vec{A}$$

전하가 시간에 따라 변한다면,
그것은 외부로 빠져나갔기 때문입니다.
따라서 전류가 흐르게 됩니다.
이것은 전류 밀도를 적분함으로써 계산할 수 있습니다.

$$\frac{dQ}{dt} = - \oint_{\mathcal{A}} \vec{J} \cdot d\vec{A}$$

$$= \frac{d}{dt} \int_V \rho dV = - \int_V \nabla \cdot \vec{J} dV$$

좌변은 전하 밀도에 대한 부피 적분으로 기술됩니다.
 우변은 가우스 정리에 의해 역시 부피 적분으로
 바꾸어 볼 수 있습니다.

$$\begin{aligned}\frac{dQ}{dt} &= - \oint_{\mathcal{A}} \vec{J} \cdot d\vec{A} \\ &= \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int_V \nabla \cdot \vec{J} dV\end{aligned}$$

양 변을 비교해 보면, 전체 적분은 대역적 보존을 보여주고,
적분되는 항들은 국소적 보존을 보여준다는 것을 알 수 있습니다.

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

따라서 위의 연속 방정식은
전하에 대한 국소적 보존 법칙을 보여줍니다.

그 다음, 에너지에 대한 보존 법칙을 살펴봅시다.
이것은 포인팅Poynting 정리라고 알려져 있습니다.

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

전자기력이 전하에 하는 일을 계산해 봅시다.

$$\begin{aligned} dW &= \vec{F} \cdot d\vec{s} \\ &= q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}dW &= \vec{F} \cdot d\vec{s} \\&= q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} dt \\&= q\vec{E} \cdot \vec{v} dt\end{aligned}$$

$$\vec{v} \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) = 0$$

$$\begin{aligned}
dW &= \vec{F} \cdot d\vec{s} \\
&= q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} dt \\
&= q\vec{E} \cdot \vec{v} dt \\
&\stackrel{\vec{v} \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) = 0}{=} \int_V \vec{E} \cdot \vec{j} dV dt \\
&\stackrel{\rho\vec{v} = \vec{j}}{=}
\end{aligned}$$

$$\frac{dW}{dt} = \int_V \vec{E} \cdot \vec{J} dV$$

따라서 일을 시간으로 미분하면 위와 같습니다.

$$\frac{dW}{dt} = \int_V \vec{E} \cdot \vec{J} dV$$

$$= \int_V \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{B}) - \epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) dV$$

$$\nabla \times \vec{B}$$

$$= \mu_0 \vec{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\frac{dW}{dt} = \int_{\mathcal{V}} \vec{E} \cdot \vec{J} dV$$

$$= \int_{\mathcal{V}} \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{B}) - \epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) dV$$

$$= \int_{\mathcal{V}} \left(\frac{1}{\mu_0} \left(\vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) \right) - \epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) dV$$

$$\frac{dW}{dt} = \int_{\mathcal{V}} \vec{E} \cdot \vec{J} dV$$

$$= \int_{\mathcal{V}} \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{B}) - \epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) dV$$

$$= \int_{\mathcal{V}} \left(\frac{1}{\mu_0} \left(\vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) \right) - \epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) dV$$

$$= \int_{\mathcal{V}} \left(\frac{1}{\mu_0} \left(-\vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) \right) - \epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) dV$$

$$\begin{aligned}
\frac{dW}{dt} &= \int_{\mathcal{V}} \vec{E} \cdot \vec{J} \, dV \\
&= \int_{\mathcal{V}} \left(\frac{1}{\mu_0} \left(-\vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) \right) - \epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) dV \\
&= -\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \right) dV \\
&\quad - \frac{1}{\mu_0} \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) dV
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dW}{dt} &= \int_V \vec{E} \cdot \vec{J} dV \\
&= \int_V \left(\frac{1}{\mu_0} \left(-\vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) \right) - \epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) dV \\
&= -\frac{d}{dt} \int_V \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \right) dV \\
&\quad - \frac{1}{\mu_0} \oint_{\partial V} (\vec{E} \times \vec{B}) \cdot d\vec{A}
\end{aligned}$$

가우스 정리

$$\begin{aligned}
\frac{dW}{dt} &= \int_V \vec{E} \cdot \vec{J} dV \\
&= \int_V \left(\frac{1}{\mu_0} \left(-\vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) \right) - \epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) dV \\
&= -\frac{d}{dt} \int_V \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \right) dV \\
&\quad - \frac{1}{\mu_0} \oint_{\partial V} (\vec{E} \times \vec{B}) \cdot d\vec{A}
\end{aligned}$$

부피 영역의 에너지 밀도

경계로 빠져나가는 성분

$$\vec{S} \equiv \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$$

전달되는 에너지를 정의하기 위해
다음과 같은 포인팅 벡터 Poynting vector를 정의합시다.
이것은 에너지 흐름의 밀도를 나타냅니다.

$$u \equiv \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

한 편, 전기장과 자기장이 부피 영역에 만들어내는
에너지 밀도는 위와 같이 정의됩니다.

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_V u dV - \oint_{\partial V} \vec{S} \cdot d\vec{A}$$

따라서 우리가 앞에서 유도한 식은 위와 같이 정리할 수 있습니다.
이것을 **포인팅 정리**라고 부릅니다.

$$0 = -\frac{d}{dt} \int_V u dV - \oint_{\partial V} \vec{S} \cdot d\vec{A}$$

진공의 경우에는 전하가 없으므로,
위의 식의 좌변을 0이라고 놓을 수 있습니다.

$$0 = -\frac{d}{dt} \int_V u dV - \int_V \nabla \cdot \vec{S} dV$$

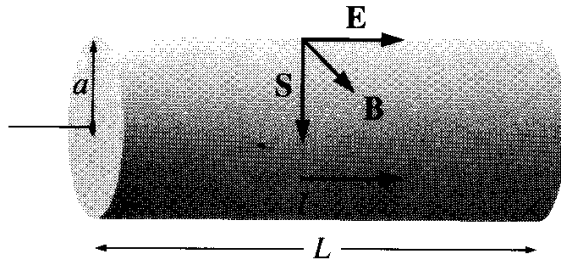
가우스 정리를 사용해서 두 번째 항을
부피 적분으로 만들어 봅시다.

$$0 = \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{S}$$

앞의 식을 정리해서 에너지 보존에 대한 국소적 방정식,
즉 에너지에 대한 연속 방정식을 얻게 됩니다.

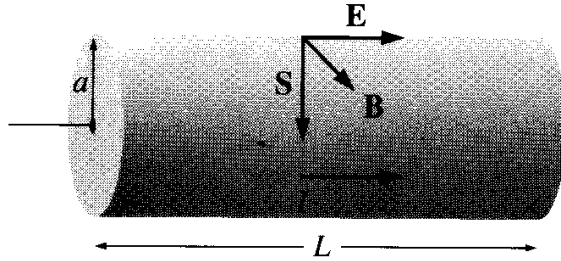
전하의 보존에 대한 연속 방정식과
형태적으로 유사하다는 것을 알 수 있습니다.

예: 전류가 흐를 때 도선이 가열되는 효과



그림과 같이 왼쪽에서 오른쪽으로
전기장이 걸린 경우를 생각해 봅시다.

예: 전류가 흐를 때 도선이 가열되는 효과

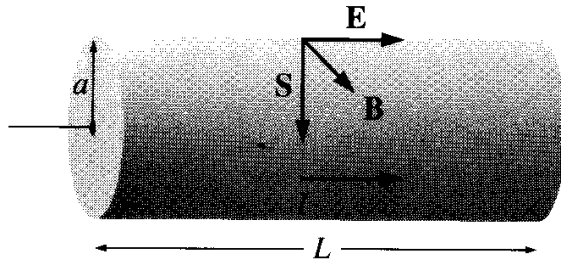


그림과 같이 왼쪽에서 오른쪽으로
전기장이 걸린 경우를 생각해 봅시다.

도선의 표면에서 **전기장**과 **자기장**의 크기는
다음과 같습니다.

$$E = \frac{V}{L} \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

예: 전류가 흐를 때 도선이 가열되는 효과



그림과 같이 왼쪽에서 오른쪽으로
전기장이 걸린 경우를 생각해 봅시다.

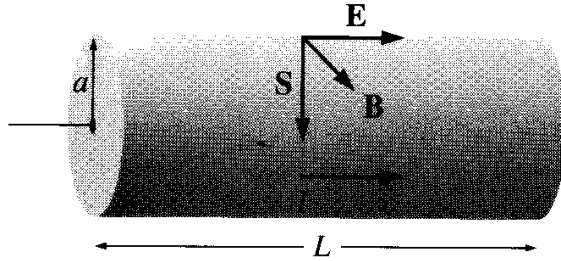
도선의 표면에서 **전기장**과 **자기장**의 크기는
다음과 같습니다.

$$E = \frac{V}{L} \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

따라서 포인팅 벡터의 크기는 다음과 같고, 방향은 도선 안쪽을 향합니다.

$$S = \frac{1}{\mu_0} EB = \frac{VI}{2\pi aL}$$

예: 전류가 흐를 때 도선이 가열되는 효과



따라서 포인팅 벡터를 적분해서
도선 표면에서 내부로 전달되는 **일률**을
구할 수 있습니다.

$$\int \vec{S} \cdot d\vec{A} = S \cdot 2\pi aL = VI$$

이 결과는 줄 가열 법칙에서 알려진 것과 같은 것입니다.

좀 더 나아가서 운동량 및 각운동량의 보존에 대해 살펴봅시다.

이것을 위해서는 먼저 장이 국소적으로 만들어내는
힘에 대해서 살펴보아야 합니다.

이것은 맥스웰 변형력 텐서 stress tensor 로 기술됩니다.

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \int_V (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \rho dV \\ &= \int_V (\rho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}) dV\end{aligned}$$

전하가 받는 힘은 위와 같이 기술됩니다.

$$\vec{F} = \int_V (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \rho dV$$

$$= \int_V (\rho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}) dV$$

$$\frac{d\vec{F}}{dV} \equiv \vec{f} = \rho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}$$

따라서 단위 부피당 전하가 받는 힘은
위와 같습니다.

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{F}}{dV} &\equiv \vec{f} = \rho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B} \\ &= \epsilon_0 (\nabla \cdot \vec{E}) \vec{E} + \left(\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \times \vec{B}\end{aligned}$$

맥스웰 방정식을 사용해서 이 식을 다시 나타내 봅시다.

$$\frac{d\vec{F}}{dV} \equiv \vec{f} = \rho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}$$

$$= \epsilon_0 (\nabla \cdot \vec{E}) \vec{E} + \left(\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \times \vec{B}$$

$$= \epsilon_0 (\nabla \cdot \vec{E}) \vec{E} + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B}$$

$$= \frac{\partial (\vec{E} \times \vec{B})}{\partial t} - \vec{E} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$= \frac{\partial (\vec{E} \times \vec{B})}{\partial t} - \vec{E} \times (-\nabla \times \vec{E})$$

$$\frac{d\vec{F}}{dV} \equiv \vec{f} = \rho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}$$

$$= \epsilon_0 (\nabla \cdot \vec{E}) \vec{E} + \left(\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \times \vec{B}$$

$$= \epsilon_0 (\nabla \cdot \vec{E}) \vec{E} + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B}$$

$$= \epsilon_0 (\nabla \cdot \vec{E}) \vec{E} + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B})$$

$$- \epsilon_0 \vec{E} \times (\nabla \times \vec{E}) + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \cdot \vec{B}) \vec{B}$$

$= 0$

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{F}}{dV} &\equiv \vec{f} = \rho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B} \\
&= \epsilon_0 (\nabla \cdot \vec{E}) \vec{E} + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B}) \\
&\quad - \epsilon_0 \vec{E} \times (\nabla \times \vec{E}) + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \cdot \vec{B}) \vec{B} \\
&\quad \nabla(\vec{E} \cdot \vec{E}) = 2(\vec{E} \cdot \nabla) \vec{E} + 2\vec{E} \times (\nabla \times \vec{E}) \quad \mu_0 \\
&= \epsilon_0 \left((\nabla \cdot \vec{E}) \vec{E} - \frac{1}{2} \nabla E^2 + (\vec{E} \cdot \nabla) \vec{E} \right) \\
&\quad + \frac{1}{\mu_0} \left((\nabla \cdot \vec{B}) \vec{B} - \frac{1}{2} \nabla B^2 + (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B} \right) \\
&\quad - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B}) \\
&\quad \quad \quad = \mu_0 \vec{S}
\end{aligned}$$

$$f_j = \nabla^i T_{ij} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial S_j}{\partial t}$$

앞의 식을 간단하게 나타내기 위해
다음과 같은 텐서를 도입합니다.
이것을 **맥스웰 변형력 텐서**라고 합니다.

$$f_j = \nabla^i T_{ij} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial S_j}{\partial t}$$

뎃셈 규약
summation convention

앞의 식을 간단하게 나타내기 위해
다음과 같은 텐서를 도입합니다.
이것을 **맥스웰 변형력 텐서**라고 합니다.

$$f_j = \nabla^i T_{ij} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial S_j}{\partial t}$$

$$T_{ij} \equiv \epsilon_0 \left(E_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} E^2 \right) + \frac{1}{\mu_0} \left(B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} B^2 \right)$$

앞의 식을 간단하게 나타내기 위해
다음과 같은 텐서를 도입합니다.
이것을 **맥스웰 변형력 텐서**라고 합니다.

$$\begin{aligned} F_j &= \int_{\mathcal{V}} f_j dV \\ &= \int_{\mathcal{V}} \nabla^i T_{ij} dV - \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} S_j dV \end{aligned}$$

맥스웰 변형력 텐서를 적분하면
힘의 성분을 얻을 수 있습니다.

$$\begin{aligned}
F_j &= \int_{\mathcal{V}} f_j dV \\
&= \int_{\mathcal{V}} \nabla^i T_{ij} dV - \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} S_j dV \\
&= \oint_{\partial \mathcal{V}} T_{ij} dA^i - \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} S_j dV
\end{aligned}$$

맥스웰 변형력 텐서를 적분하면
힘의 성분을 얻을 수 있습니다.

$$\vec{F} = \oint_{\partial V} \vec{T} \cdot d\vec{A} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int_V \vec{S} dV$$

또는 같은 식을 위와 같이 표현하기도 합니다.

$$\vec{F} = \oint_{\partial V} \vec{T} \cdot d\vec{A}$$

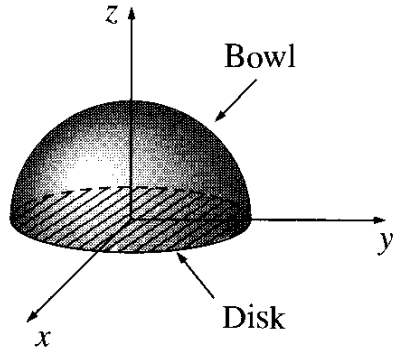
정적인 경우, 물체가 받는 힘은
위와 같은 변형력 텐서의 면적분으로 표현됩니다.
즉, 변형력 텐서는 단위 면적당 받는 힘을 의미합니다.

$$\vec{F} = \oint_{\partial V} \vec{T} \cdot d\vec{A}$$

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}$$

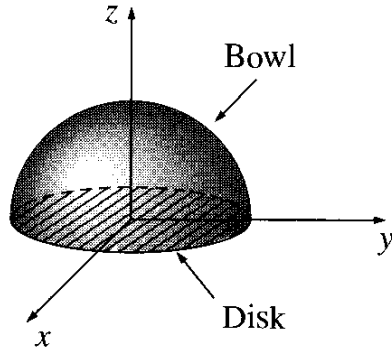
변형력 텐서의 대각 성분은 압력을 의미하고,
비대각 성분은 층밀리기 힘 shear stress을 의미합니다.

예: 알짜 힘 구하기



전하 Q 가 구 안에 고르게 퍼져 있을 때,
북반구에 미치는 알짜 힘을 구해 봅시다.
이것은 맥스웰 변형력 텐서에 대한 면적분으로
쉽게 구할 수 있습니다.

예: 알짜 힘 구하기



전하 Q 가 구 안에 고르게 퍼져 있을 때,
북반구에 미치는 알짜 힘을 구해 봅시다.
이것은 맥스웰 변형력 텐서에 대한 면적분으로
쉽게 구할 수 있습니다.

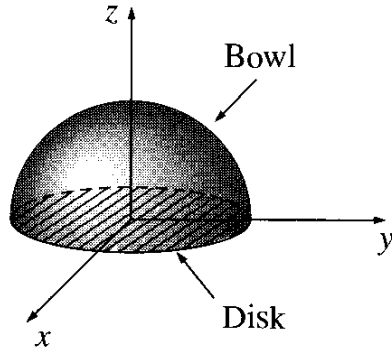
먼저 구각에서 계산합시다.

$$d\vec{A} = R^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{r}$$

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{r}$$

$$\hat{r} = \sin \theta \cos \phi \hat{x} + \sin \theta \sin \phi \hat{y} + \cos \theta \hat{z}$$

예: 알짜 힘 구하기



전하 Q 가 구 안에 고르게 퍼져 있을 때,
북반구에 미치는 알짜 힘을 구해 봅시다.
이것은 맥스웰 변형력 텐서에 대한 면적분으로
쉽게 구할 수 있습니다.

먼저 구각에서 계산합시다.

$$d\vec{A} = R^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{r}$$

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{r}$$

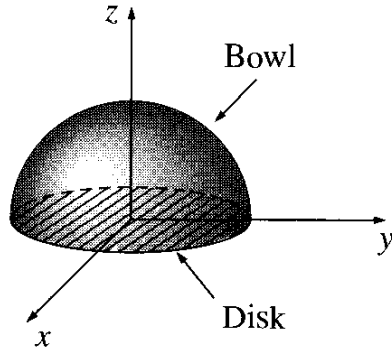
$$\hat{r} = \sin \theta \cos \phi \hat{x} + \sin \theta \sin \phi \hat{y} + \cos \theta \hat{z}$$

$$T_{zx} = \epsilon_0 \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \right)^2 \sin \theta \cos \theta \cos \phi$$

$$T_{zy} = \epsilon_0 \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \right)^2 \sin \theta \cos \theta \sin \phi$$

$$T_{zz} = \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \right)^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

예: 알짜 힘 구하기



대칭성에 의해 z축 성분만 구하면 됩니다.

$$\begin{aligned}(\vec{T} \cdot d\vec{A})_z &= T_{zx}dA_x + T_{zy}dA_y + T_{zz}dA_z \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \right)^2 \sin\theta \cos\theta d\theta d\phi\end{aligned}$$

$$d\vec{A} = R^2 \sin\theta d\theta d\phi \hat{r}$$

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{r}$$

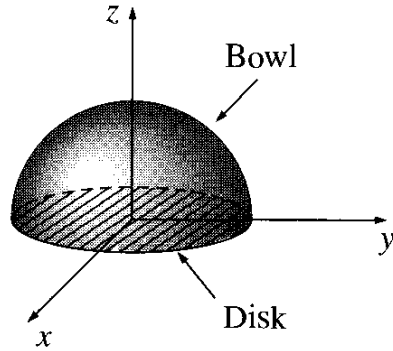
$$\hat{r} = \sin\theta \cos\phi \hat{x} + \sin\theta \sin\phi \hat{y} + \cos\theta \hat{z}$$

$$T_{zx} = \epsilon_0 \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \right)^2 \sin\theta \cos\theta \cos\phi$$

$$T_{zy} = \epsilon_0 \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \right)^2 \sin\theta \cos\theta \sin\phi$$

$$T_{zz} = \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \right)^2 (\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

예: 알짜 힘 구하기



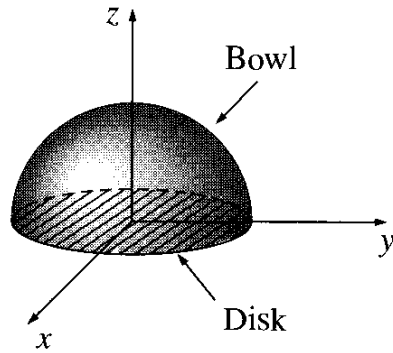
대칭성에 의해 z축 성분만 구하면 됩니다.

$$\begin{aligned}(\vec{T} \cdot d\vec{A})_z &= T_{zx}dA_x + T_{zy}dA_y + T_{zz}dA_z \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \right)^2 \sin\theta \cos\theta d\theta d\phi\end{aligned}$$

면적분을 하면 먼저 북반구의 성분을 얻습니다.

$$F_1 = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot 8R^2}$$

예: 알짜 힘 구하기



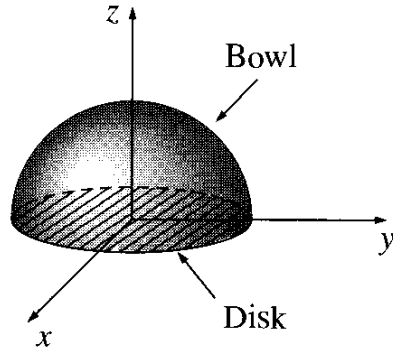
마찬가지로, 적도면에서 계산합시다.

$$d\vec{A} = -rdrd\phi \hat{z}$$

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{r} = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} (\cos\phi \hat{x} + \sin\phi \hat{y})$$

$$T_{zz} = -\frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \right)^2 r^2$$

예: 알짜 힘 구하기



면적분을 하면 다음과 같습니다.

$$(\vec{T} \cdot d\vec{A})_z = \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \right)^2 r^3 dr d\phi$$

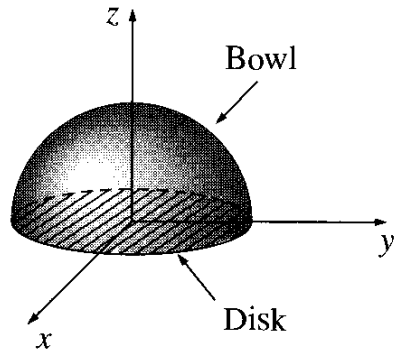
마찬가지로, 적도면에서 계산합니다.

$$d\vec{A} = -r dr d\phi \hat{z}$$

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{r} = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} (\cos \phi \hat{x} + \sin \phi \hat{y})$$

$$T_{zz} = -\frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \right)^2 r^2$$

예: 알짜 힘 구하기



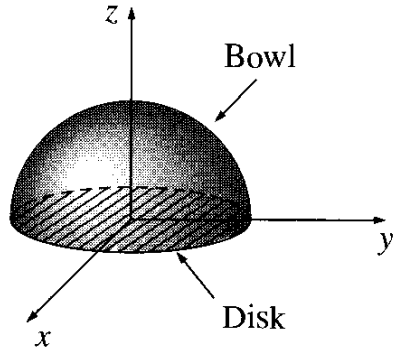
면적분을 하면 다음과 같습니다.

$$(\vec{T} \cdot d\vec{A})_z = \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \right)^2 r^3 dr d\phi$$

면적분을 하면 적도면의 성분을 얻습니다.

$$F_2 = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot 16R^2}$$

예: 알짜 힘 구하기



최종적으로 모든 힘을 더하면 다음과 같습니다.

$$F = F_1 + F_2 = \frac{3Q^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot 16R^2}$$

이제 이것을 사용해서
운동량과 각운동량의 보존에 대해 살펴볼 수 있습니다.

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = -\epsilon_0\mu_0 \frac{d}{dt} \int_V \vec{S} dV + \oint_{\partial V} \vec{T} \cdot d\vec{A}$$

$$\vec{p} = \epsilon_0\mu_0 \int_V \vec{S} dV$$

힘을 다시 위와 같이 적어 봅시다.
 그러면 첫 번째 항은 **전자기장에 저장된 운동량의**
 시간 미분으로 생각할 수 있습니다.

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = -\epsilon_0\mu_0 \frac{d}{dt} \int_V \vec{S} dV + \oint_{\partial V} \vec{T} \cdot d\vec{A}$$

$$\vec{p} = \epsilon_0\mu_0 \int_V \vec{S} dV$$

두 번째 항은 단위 시간당 폐곡면을 통과하는 운동량이라고 볼 수 있습니다.

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = -\epsilon_0\mu_0 \frac{d}{dt} \int_V \vec{S} dV + \oint_{\partial V} \vec{T} \cdot d\vec{A}$$

$$\vec{p} = \epsilon_0\mu_0 \int_V \vec{S} dV$$

$$\vec{p} \equiv \mu_0\epsilon_0 \vec{S} = \epsilon_0 (\vec{E} \times \vec{B})$$

따라서 이러한 해석으로부터
전자기장에 저장된 운동량 밀도를 정의할 수 있습니다.

$$\frac{d}{dt} \int_V \vec{p} dV = \oint_{\partial V} \vec{T} \cdot d\vec{A} = \int_V (\nabla \cdot \vec{T}) dV$$

만일 알짜 힘이 존재하지 않아서 운동량이 보존된다면,
위와 같은 관계식을 적을 수 있습니다.

$$\frac{d}{dt} \int_V \vec{p} dV = \oint_{\partial V} \vec{T} \cdot d\vec{A} = \int_V (\nabla \cdot \vec{T}) dV$$

$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial t} = \nabla \cdot \vec{T}$$

따라서 운동량의 보존에 대한 국소적인 방정식,
 즉 운동량에 대한 연속 방정식을 얻게 됩니다.
 여기에서는 $-\vec{T}$ 가 운동량의 빠져나감을 의미합니다.

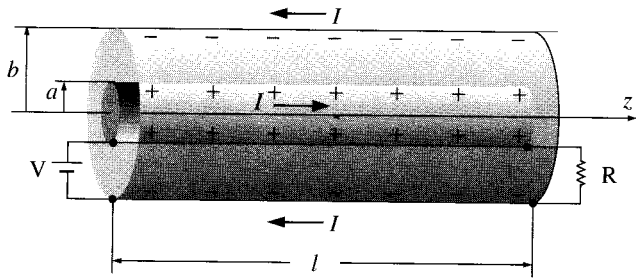
$$u = \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0} \right)$$

$$\vec{p} = \epsilon_0 (\vec{E} \times \vec{B})$$

$$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p} = \epsilon_0 \left(\vec{r} \times (\vec{E} \times \vec{B}) \right)$$

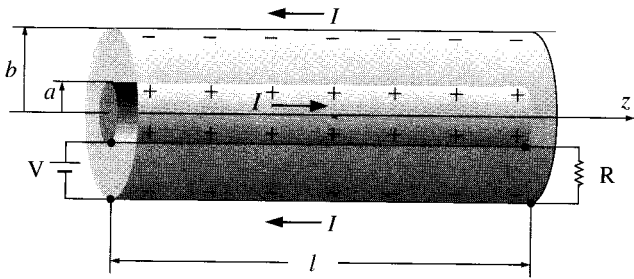
에너지 밀도, 운동량 밀도 및
각운동량 밀도는 위와 같이 정의됩니다.

예1: 동축 도선



그림과 같은 동축 도선에 반대 방향으로 전류를 흘려 보내는 경우를 생각합시다. 그리고 안쪽 도선과 바깥쪽 도선에 전하가 고르게 퍼져 있다고 합시다.

예1: 동축 도선



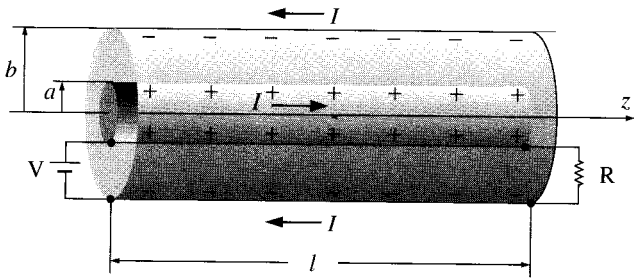
그림과 같은 동축 도선에 반대 방향으로 전류를 흘려 보내는 경우를 생각합시다. 그리고 안쪽 도선과 바깥쪽 도선에 전하가 고르게 퍼져 있다고 합시다.

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 S} \hat{s}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi S} \hat{\phi}$$

$$\vec{S} = \frac{\lambda I}{4\pi^2 \epsilon_0 S^2} \hat{z}$$

예1: 동축 도선



그림과 같은 동축 도선에 반대 방향으로 전류를 흘려 보내는 경우를 생각합시다. 그리고 안쪽 도선과 바깥쪽 도선에 전하가 고르게 퍼져 있다고 합시다.

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 S} \hat{s}$$

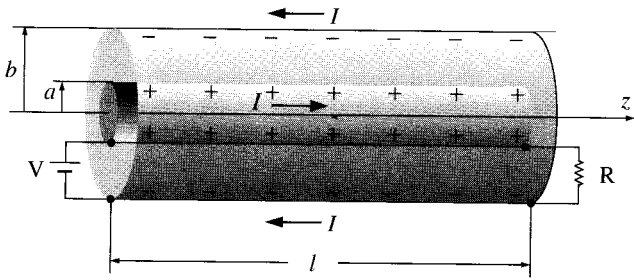
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi S} \hat{\phi}$$

$$\vec{S} = \frac{\lambda I}{4\pi^2 \epsilon_0 S^2} \hat{z}$$

일률을 먼저 구해봅시다.

$$P = \int \vec{S} \cdot d\vec{A}$$

예1: 동축 도선



그림과 같은 동축 도선에 반대 방향으로 전류를 흘려 보내는 경우를 생각합시다. 그리고 안쪽 도선과 바깥쪽 도선에 전하가 고르게 퍼져 있다고 합시다.

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 s} \hat{s}$$

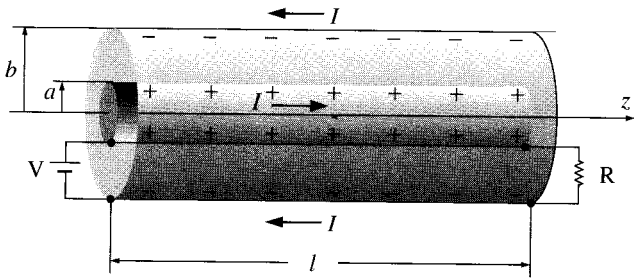
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \hat{\phi}$$

$$\vec{S} = \frac{\lambda I}{4\pi^2 \epsilon_0 s^2} \hat{z}$$

일률을 먼저 구해봅시다.

$$P = \int \vec{S} \cdot d\vec{A} = \frac{\lambda I}{4\pi^2 \epsilon_0} \int_a^b \frac{1}{s^2} \cdot 2\pi s ds$$

예1: 동축 도선



그림과 같은 동축 도선에 반대 방향으로 전류를 흘려 보내는 경우를 생각합시다. 그리고 안쪽 도선과 바깥쪽 도선에 전하가 고르게 퍼져 있다고 합시다.

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 s} \hat{s}$$

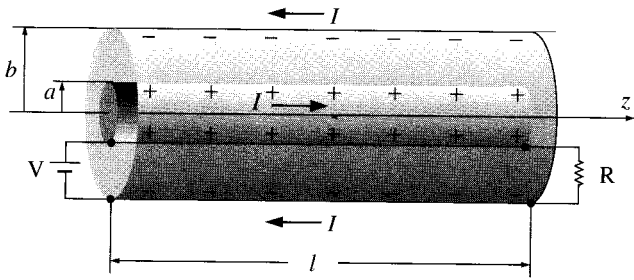
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \hat{\phi}$$

$$\vec{S} = \frac{\lambda I}{4\pi^2 \epsilon_0 s^2} \hat{z}$$

일률을 먼저 구해봅시다.

$$P = \int \vec{S} \cdot d\vec{A} = \frac{\lambda I}{4\pi^2 \epsilon_0} \int_a^b \frac{1}{s^2} \cdot 2\pi s ds = \frac{\lambda I}{2\pi \epsilon_0} \ln \frac{b}{a}$$

예1: 동축 도선



그림과 같은 동축 도선에 반대 방향으로 전류를 흘려 보내는 경우를 생각합시다. 그리고 안쪽 도선과 바깥쪽 도선에 전하가 고르게 퍼져 있다고 합시다.

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 s} \hat{s}$$

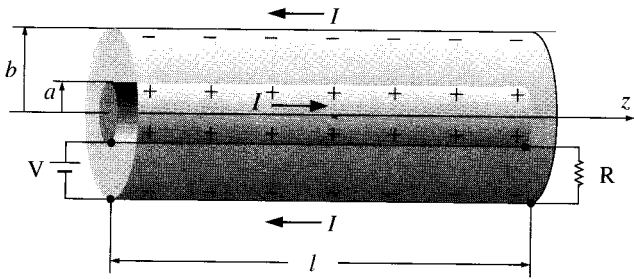
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \hat{\phi}$$

$$\vec{S} = \frac{\lambda I}{4\pi^2 \epsilon_0 s^2} \hat{z}$$

일률을 먼저 구해봅시다.

$$P = \int \vec{S} \cdot d\vec{A} = \frac{\lambda I}{4\pi^2 \epsilon_0} \int_a^b \frac{1}{s^2} \cdot 2\pi s ds = \frac{\lambda I}{2\pi \epsilon_0} \ln \frac{b}{a} = IV$$

예1: 동축 도선



그림과 같은 동축 도선에 반대 방향으로 전류를 흘려 보내는 경우를 생각합시다. 그리고 안쪽 도선과 바깥쪽 도선에 전하가 고르게 퍼져 있다고 합시다.

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 S} \hat{s}$$

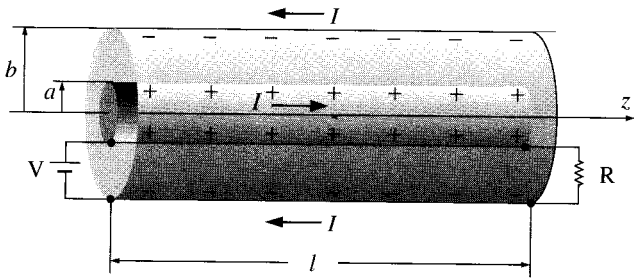
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi S} \hat{\phi}$$

$$\vec{S} = \frac{\lambda I}{4\pi^2 \epsilon_0 S^2} \hat{z}$$

운동량은 다음과 같습니다.

$$\vec{p} = \mu_0 \epsilon_0 \int \vec{S} dV$$

예1: 동축 도선



그림과 같은 동축 도선에 반대 방향으로 전류를 흘려 보내는 경우를 생각합시다. 그리고 안쪽 도선과 바깥쪽 도선에 전하가 고르게 퍼져 있다고 합시다.

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 s} \hat{s}$$

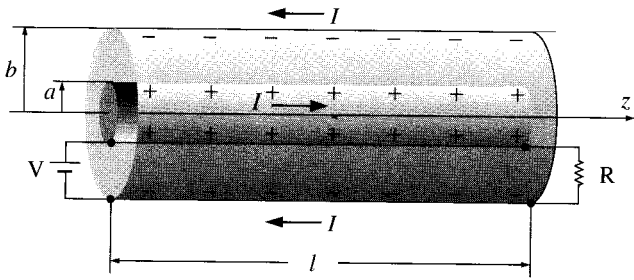
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \hat{\phi}$$

$$\vec{S} = \frac{\lambda I}{4\pi^2 \epsilon_0 s^2} \hat{z}$$

운동량은 다음과 같습니다.

$$\vec{p} = \mu_0 \epsilon_0 \int \vec{S} dV = \frac{\mu_0 \lambda I}{4\pi^2} \hat{z} \int_a^b \frac{1}{s^2} \cdot \ell \cdot 2\pi s ds$$

예1: 동축 도선



그림과 같은 동축 도선에 반대 방향으로 전류를 흘려 보내는 경우를 생각합시다. 그리고 안쪽 도선과 바깥쪽 도선에 전하가 고르게 퍼져 있다고 합시다.

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 s} \hat{s}$$

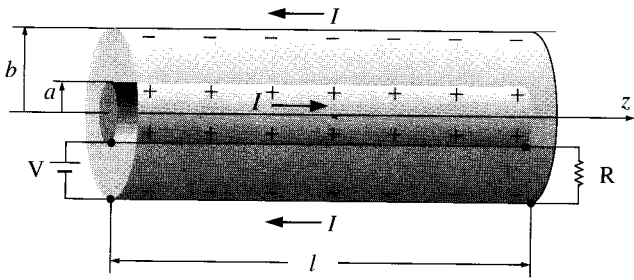
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \hat{\phi}$$

$$\vec{S} = \frac{\lambda I}{4\pi^2 \epsilon_0 s^2} \hat{z}$$

운동량은 다음과 같습니다.

$$\vec{p} = \mu_0 \epsilon_0 \int \vec{S} dV = \frac{\mu_0 \lambda I}{4\pi^2} \hat{z} \int_a^b \frac{1}{s^2} \cdot \ell \cdot 2\pi s ds = \frac{\mu_0 \lambda I \ell}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \hat{z}$$

예1: 동축 도선



그림과 같은 동축 도선에 반대 방향으로 전류를 흘려 보내는 경우를 생각합시다. 그리고 안쪽 도선과 바깥쪽 도선에 전하가 고르게 퍼져 있다고 합시다.

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 s} \hat{s}$$

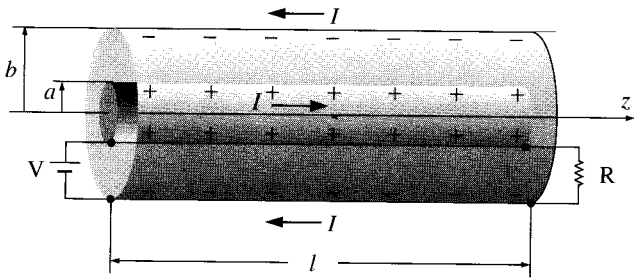
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \hat{\phi}$$

$$\vec{S} = \frac{\lambda I}{4\pi^2 \epsilon_0 s^2} \hat{z}$$

운동량은 다음과 같습니다.

$$\vec{p} = \mu_0 \epsilon_0 \int \vec{S} dV = \frac{\mu_0 \lambda I}{4\pi^2} \hat{z} \int_a^b \frac{1}{s^2} \cdot \ell \cdot 2\pi s ds = \frac{\mu_0 \lambda I \ell}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \hat{z} = \frac{IV}{c^2} \ell \hat{z}$$

예1: 동축 도선



그림과 같은 동축 도선에 반대 방향으로 전류를 흘려 보내는 경우를 생각합시다. 그리고 안쪽 도선과 바깥쪽 도선에 전하가 고르게 퍼져 있다고 합시다.

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 s} \hat{s}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \hat{\phi}$$

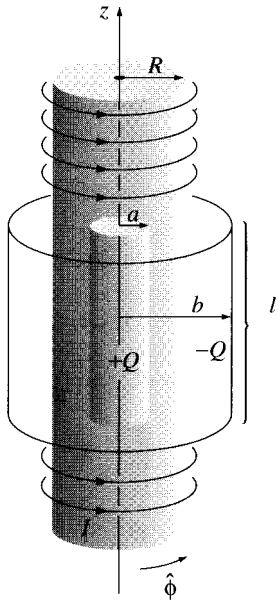
$$\vec{S} = \frac{\lambda I}{4\pi^2 \epsilon_0 s^2} \hat{z}$$

운동량은 다음과 같습니다.

$$\vec{p} = \mu_0 \epsilon_0 \int \vec{S} dV = \frac{\mu_0 \lambda I}{4\pi^2} \hat{z} \int_a^b \frac{1}{s^2} \cdot \ell \cdot 2\pi s ds = \frac{\mu_0 \lambda I \ell}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \hat{z} = \frac{IV}{c^2} \ell \hat{z}$$

따라서 전기장과 자기장이 모두 상수이지만, 운동량이 존재함을 알 수 있습니다.

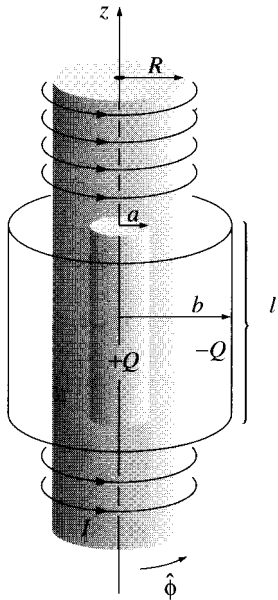
예2: 솔레노이드와 각운동량



왼쪽 그림과 같은 솔레노이드가 있고, 그 안에 대전된 원통 껍질이 들어있다고 합시다.

코일에 흐르는 전류를 줄이면, 원통은 각운동량을 얻게 됩니다.

예2: 솔레노이드와 각운동량



왼쪽 그림과 같은 솔레노이드가 있고, 그 안에 대전된 원통 껍질이 들어있다고 합시다.

코일에 흐르는 전류를 줄이면, 원통은 각운동량을 얻게 됩니다.

$$\vec{E} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0\ell s}\hat{s}$$

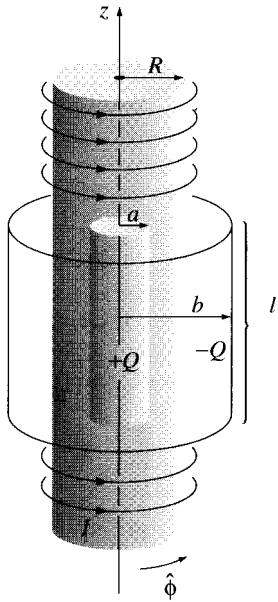
$$(a < s < b)$$

$$\vec{B} = \mu_0 n I \hat{z}$$

$$(s < R)$$

$$\vec{p} = -\frac{\mu_0 n I Q}{2\pi\ell s}\hat{\phi}$$

예2: 솔레노이드와 각운동량



왼쪽 그림과 같은 솔레노이드가 있고, 그 안에 대전된 원통 껍질이 들어있다고 합시다.

코일에 흐르는 전류를 줄이면, 원통은 각운동을 얻게 됩니다.

$$\vec{E} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0\ell s}\hat{s}$$

$$(a < s < b)$$

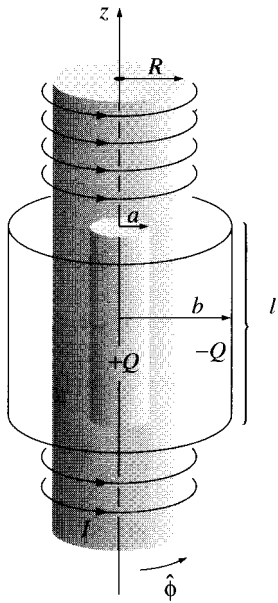
$$\vec{B} = \mu_0 n I \hat{z}$$

$$(s < R)$$

$$\vec{p} = -\frac{\mu_0 n I Q}{2\pi\ell s} \hat{\phi}$$

따라서 회전하는 방향으로의 운동을 얻게 됩니다.

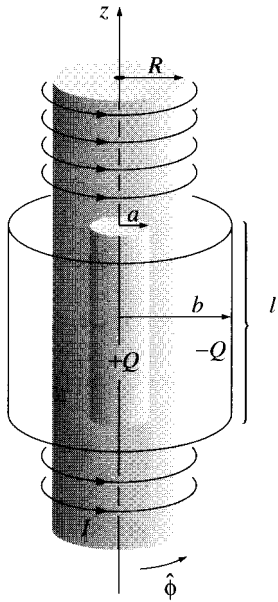
예2: 솔레노이드와 각운동량



이제 **각운동량 밀도**를 계산해 봅시다.

$$\ell_z = (\vec{r} \times \vec{p})_z$$

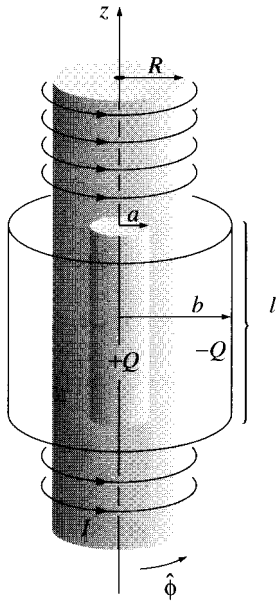
예2: 솔레노이드와 각운동량



이제 **각운동량 밀도**를 계산해 봅시다.

$$\ell_z = (\vec{r} \times \vec{p})_z = -\frac{\mu_0 n I Q}{2\pi \ell}$$

예2: 솔레노이드와 각운동량



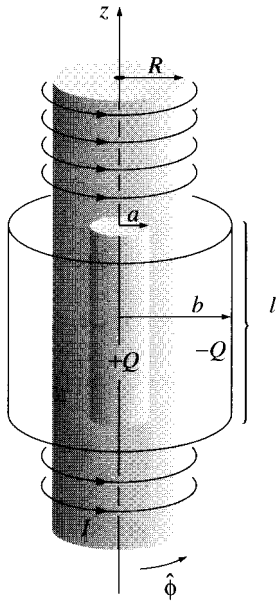
이제 **각운동량 밀도**를 계산해 봅시다.

$$\ell_z = (\vec{r} \times \vec{p})_z = -\frac{\mu_0 n I Q}{2\pi \ell}$$

따라서 **각운동량**은 다음과 같습니다.

$$\vec{L} = \int \vec{\ell} dV$$

예2: 솔레노이드와 각운동량



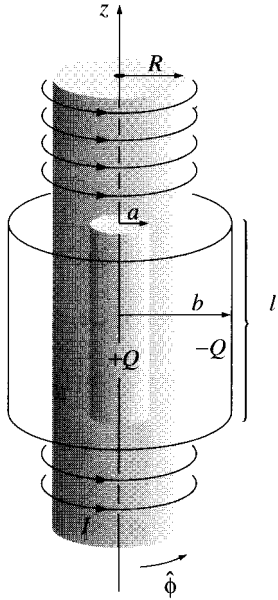
이제 **각운동량 밀도**를 계산해 봅시다.

$$\ell_z = (\vec{r} \times \vec{p})_z = -\frac{\mu_0 n I Q}{2\pi\ell}$$

따라서 **각운동량**은 다음과 같습니다.

$$\vec{L} = \int \vec{\ell} dV = \vec{\ell} \cdot \pi\ell(R^2 - a^2)$$

예2: 솔레노이드와 각운동량



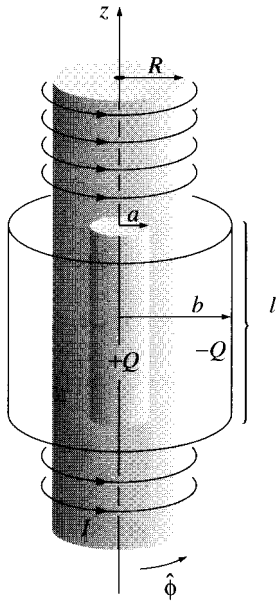
이제 **각운동량 밀도**를 계산해 봅시다.

$$\ell_z = (\vec{r} \times \vec{p})_z = -\frac{\mu_0 n I Q}{2\pi\ell}$$

따라서 **각운동량**은 다음과 같습니다.

$$\vec{L} = \int \vec{\ell} dV = \vec{\ell} \cdot \pi\ell(R^2 - a^2) = -\frac{1}{2}\mu_0 n I Q (R^2 - a^2) \hat{z}$$

예2: 솔레노이드와 각운동량



이제 **각운동량 밀도**를 계산해 봅시다.

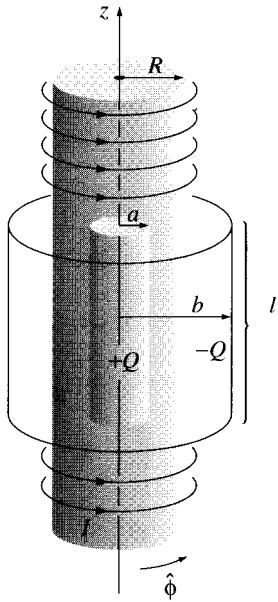
$$\ell_z = (\vec{r} \times \vec{p})_z = -\frac{\mu_0 n I Q}{2\pi\ell}$$

따라서 **각운동량**은 다음과 같습니다.

$$\vec{L} = \int \vec{\ell} dV = \vec{\ell} \cdot \pi\ell(R^2 - a^2) = -\frac{1}{2}\mu_0 n I Q (R^2 - a^2) \hat{z}$$

이것은 장 자체가 가지고 있는 각운동량입니다. 솔레노이드나 원통 껍질이 모두 회전하지 않더라도, 각운동량이 존재한다는 말이 됩니다.

예2: 솔레노이드와 각운동량



이제 **각운동량 밀도**를 계산해 봅시다.

$$\ell_z = (\vec{r} \times \vec{p})_z = -\frac{\mu_0 n I Q}{2\pi\ell}$$

따라서 **각운동량**은 다음과 같습니다.

$$\vec{L} = \int \vec{\ell} dV = \vec{\ell} \cdot \pi\ell(R^2 - a^2) = -\frac{1}{2}\mu_0 n I Q (R^2 - a^2) \hat{z}$$

전류를 끄면, 패러데이의 법칙에 의해 유도 전기장이 생겨납니다.

이 전기장에 의해 토크가 발생하게 되며, 이 토크는 안쪽에 있는 원통에 각운동량을 전달해주게 됩니다. **전류가 꺼지면, 장에 의한 각운동량은 없어지지만 이 각운동량이 안쪽의 원통 껍질을 회전시켜서, 각운동량이 보존되게 됩니다.**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0$$

전하 보존

다음과 같이 국소적 보존 법칙들을 정리해 봅시다.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0$$

전하 보존

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{S} = 0$$

에너지 보존

다음과 같이 국소적 보존 법칙들을 정리해 봅시다.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0$$

전하 보존

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{S} = 0$$

에너지 보존

$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial t} - \nabla \cdot \vec{T} = 0$$

(힘이 없는 경우)
운동량 보존

다음과 같이 국소적 보존 법칙들을 정리해 봅시다.

감사합니다