

제9장 전자기파

이제 이번 장에서는 맥스웰 방정식으로부터
전자기파가 어떻게 기술되는지를 살펴볼 것입니다.

전자기파electromagnetic wave를 다루기 전에,
먼저 일반적인 파동wave을 다루는 법에 대해서
살펴봅시다.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

일반적으로 z -축으로 진행하는 파동을 기술하는 방정식은
위와 같이 표현됩니다.

이것을 파동 방정식 wave equation 이라고 합니다.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

장력
선밀도

여기에서 v 는 파동의 속력을 나타냅니다.
파동의 속력은 매질의 특성에 의해 결정됩니다.

파동 방정식은 선형 미분방정식입니다.
 g 및 h 가 이 방정식의 해가 된다면
 $f = \alpha g + \beta h$ 도 해가 됩니다.

따라서 일반성을 잃지 않고,
임의의 파동 방정식의 해는
삼각 함수의 중첩으로 기술할 수 있습니다.

$$f(z, t) = A \cos(k(z - vt) + \delta)$$

다음과 같은 코사인 함수는
파동 방정식의 하나의 해가 됩니다.

$$f(z, t) = A \cos(k(z - vt) + \delta)$$

진폭
amplitude

다음과 같은 코사인 함수는
파동 방정식의 하나의 해가 됩니다.

$$f(z, t) = A \cos(k(z - vt) + \delta)$$

진폭
amplitude

파수
wave number

다음과 같은 코사인 함수는
파동 방정식의 하나의 해가 됩니다.

$$f(z, t) = A \cos(k(z - vt) + \delta)$$

진폭
amplitude

파수
wave number

위상 상수
phase constant

다음과 같은 코사인 함수는
파동 방정식의 하나의 해가 됩니다.

위상 phase

$$f(z, t) = A \cos(k(z - vt) + \delta)$$

진폭
amplitude

파수
wave number

위상 상수
phase constant

다음과 같은 코사인 함수는
파동 방정식의 하나의 해가 됩니다.

위상 phase

$$f(z, t) = A \cos(k(z - vt) + \delta)$$

진폭 amplitude 파수 wave number 위상 상수 phase constant

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \quad \text{파장 wave length}$$

다음과 같은 코사인 함수는
파동 방정식의 하나의 해가 됩니다.

위상 phase

$$f(z, t) = A \cos(k(z - vt) + \delta)$$

진폭
amplitude

파수
wave number

위상 상수
phase constant

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

파장 wave length

$$T = \frac{1}{\nu}$$

주기 period

다음과 같은 코사인 함수는
파동 방정식의 하나의 해가 됩니다.

위상 phase

$$f(z, t) = A \cos(k(z - vt) + \delta)$$

진폭
amplitude

파수
wave number

위상 상수
phase constant

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

파장 wave length

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{v}{\lambda}$$

진동수 frequency

$$T = \frac{1}{\nu}$$

주기 period

다음과 같은 코사인 함수는
파동 방정식의 하나의 해가 됩니다.

위상 phase

$$f(z, t) = A \cos(k(z - vt) + \delta)$$

진폭
amplitude

파수
wave number

위상 상수
phase constant

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

파장 wave length

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{v}{\lambda}$$

진동수 frequency

$$T = \frac{1}{\nu}$$

주기 period

$$\omega = 2\pi\nu = kv$$

각진동수
angular frequency

다음과 같은 코사인 함수는
파동 방정식의 하나의 해가 됩니다.

z 가 증가하는 방향으로 진행

$$f(z, t) = A \cos(kz - \omega t + \delta)$$

z 가 감소하는 방향으로 진행

$$f(z, t) = A \cos(kz + \omega t + \delta)$$

파동의 진행 방향은 k 와 ω 의
상대적인 부호에 의해 결정됩니다.

$$\cos \theta = \text{Re } e^{i\theta}$$

한 편, $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ 라는 관계가 있으므로,
복소수 지수 함수를 사용한 뒤에
실수부를 취하는 것이 수학적으로 편리합니다.

예:

다음 두 가지 파동을 합성하는 경우를 생각해 봅시다.

$$f_1 = A_1 \cos(kz - \omega t + \delta_1)$$

$$f_2 = A_2 \cos(kz - \omega t + \delta_2)$$

예:

다음 두 가지 파동을 합성하는 경우를 생각해 봅시다.

$$f_1 = A_1 \cos(kz - \omega t + \delta_1)$$

$$f_2 = A_2 \cos(kz - \omega t + \delta_2)$$

물론 결과는 다음과 같습니다.

$$f_3 = f_1 + f_2$$

예:

다음 두 가지 파동을 합성하는 경우를 생각해 봅시다.

$$f_1 = A_1 \cos(kz - \omega t + \delta_1)$$

$$f_2 = A_2 \cos(kz - \omega t + \delta_2)$$

물론 결과는 다음과 같습니다.

$$f_3 = f_1 + f_2$$

이것을 좀 더 전개해 봅시다.

$$f_3 = f_1 + f_2 = \text{Re } \tilde{f}_1 + \text{Re } \tilde{f}_2 = \text{Re } (\tilde{f}_1 + \tilde{f}_2)$$

예:

다음 두 가지 파동을 합성하는 경우를 생각해 봅시다.

$$f_1 = A_1 \cos(kz - \omega t + \delta_1)$$

$$f_2 = A_2 \cos(kz - \omega t + \delta_2)$$

물론 결과는 다음과 같습니다.

$$f_3 = f_1 + f_2$$

이것을 좀 더 전개해 봅시다.

$$\begin{aligned} f_3 = f_1 + f_2 &= \text{Re } \tilde{f}_1 + \text{Re } \tilde{f}_2 = \text{Re } (\tilde{f}_1 + \tilde{f}_2) \\ &= \text{Re } \tilde{f}_3 \end{aligned}$$

예:

따라서 다음과 같이 복소 함수를 계산하면 됩니다.

$$\tilde{f}_3 = \tilde{A}_3 e^{i(kz - \omega t)}$$

$$= \tilde{f}_1 + \tilde{f}_2 = \tilde{A}_1 e^{i(kz - \omega t)} + \tilde{A}_2 e^{i(kz - \omega t)}$$

예:

따라서 다음과 같이 복소 함수를 계산하면 됩니다.

$$\begin{aligned}\tilde{f}_3 &= \tilde{A}_3 e^{i(kz-\omega t)} \\ &\equiv A_3 e^{i\delta_3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = \tilde{f}_1 + \tilde{f}_2 &= \tilde{A}_1 e^{i(kz-\omega t)} + \tilde{A}_2 e^{i(kz-\omega t)} \\ &\quad \equiv A_1 e^{i\delta_1} \quad \quad \equiv A_2 e^{i\delta_2} \end{aligned}$$

예:

따라서 다음과 같이 복소 함수를 계산하면 됩니다.

$$\begin{aligned}\tilde{f}_3 &= \tilde{A}_3 e^{i(kz-\omega t)} \\ &\equiv A_3 e^{i\delta_3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \tilde{f}_1 + \tilde{f}_2 = \tilde{A}_1 e^{i(kz-\omega t)} + \tilde{A}_2 e^{i(kz-\omega t)} \\ &\qquad\qquad\qquad \equiv A_1 e^{i\delta_1} \qquad\qquad \equiv A_2 e^{i\delta_2}\end{aligned}$$

결과적으로 위상에 대한 다음 관계를 얻습니다.

$$A_3 e^{i\delta_3} = A_1 e^{i\delta_1} + A_2 e^{i\delta_2}$$

예:

따라서 다음과 같이 복소 함수를 계산하면 됩니다.

$$\begin{aligned}\tilde{f}_3 &= \tilde{A}_3 e^{i(kz-\omega t)} \\ &\equiv A_3 e^{i\delta_3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \tilde{f}_1 + \tilde{f}_2 = \tilde{A}_1 e^{i(kz-\omega t)} + \tilde{A}_2 e^{i(kz-\omega t)} \\ &\quad \equiv A_1 e^{i\delta_1} \quad \quad \quad \equiv A_2 e^{i\delta_2}\end{aligned}$$

결과적으로 위상에 대한 다음 관계를 얻습니다.

$$A_3 e^{i\delta_3} = A_1 e^{i\delta_1} + A_2 e^{i\delta_2}$$

이와 같이, 복소 함수를 사용하는 것이 때로는 더 쉬울 수 있습니다.

$$\tilde{f}(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{A}(k) e^{i(kz - \omega t)} dk$$

이것을 염두에 두면,
일반적으로 위와 같은 복소 함수의 선형 중첩을 생각할 수 있습니다.
물론 물리적으로 의미 있는 것은 오직 실수부 뿐입니다.

$$\tilde{f}(z, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{A}(k) e^{ikz} dk$$

특히 $t = 0$ 인 경우에는 위와 같이 적을 수 있습니다.

이 때, $\tilde{f}_{t=0}(z)$ 와 $\tilde{A}(k)$ 사이에는

푸리에 변환Fourier transformation의 관계가 있습니다.
(단, 이 때의 조건은 파동이 속박되지 않는 경우에 해당합니다.)

여기까지는 파동에 관한 일반론이었습니다.

이렇게 일반적인 파동은 특정 진동수를 가지는 파동의
선형 중첩에 의해서 기술됩니다.

따라서 특정한 파장을 가지는 파동의 성질에 대해 연구한 뒤
나중에 그 중첩을 고려하면
전자기파의 일반적인 성질을 알 수 있게 됩니다.

우리가 살펴볼 전자기파의 일반적 성질은 다음과 같습니다.

1. 편광 polarization
2. 전파 propagation

우리가 유전체를 고려한다면,
다음과 같은 성질을 좀 더 살펴볼 필요가 있습니다.

3. 반사 reflection

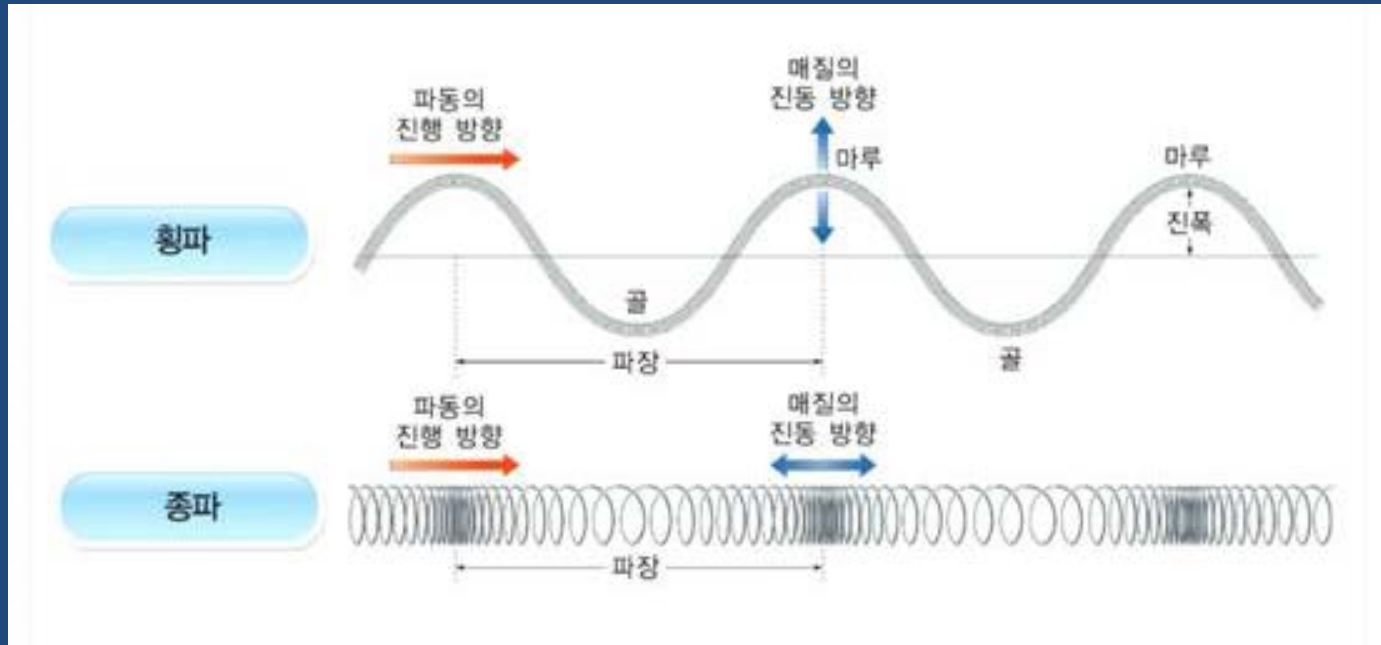
4. 투과 transmission

우리가 도체를 고려한다면,
다음과 같은 성질을 좀 더 살펴볼 필요가 있습니다.

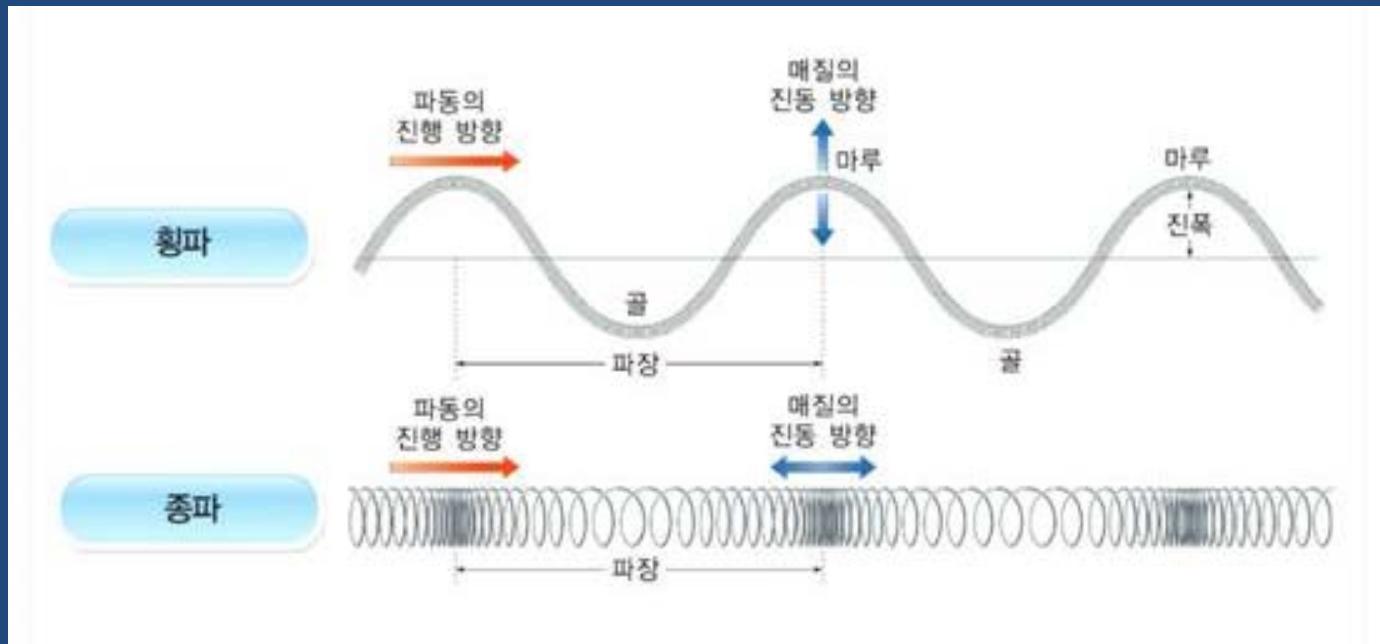
- 5. 침투 penetration
- 6. 도파관 wave guide

먼저 편광에 대해 살펴봅시다.

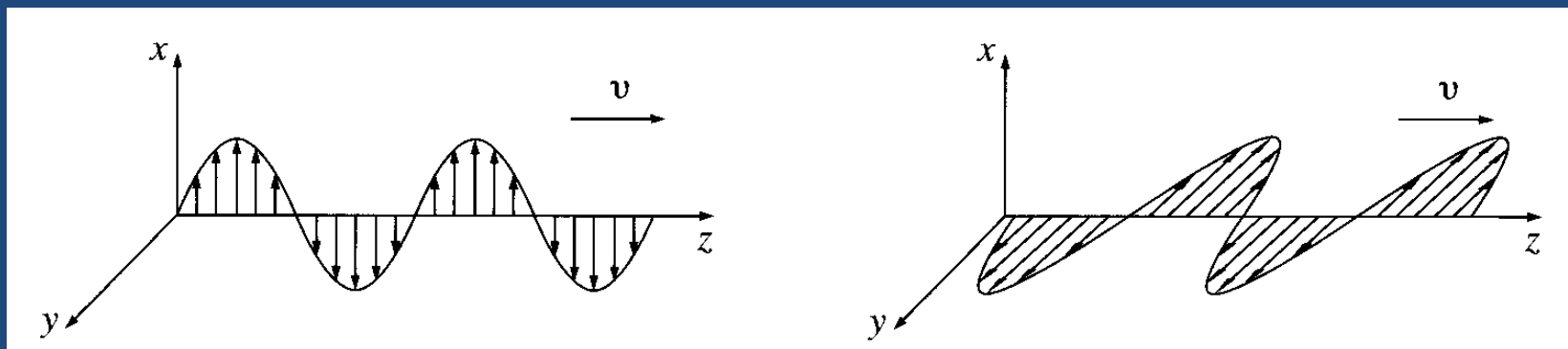
편광이란, 빛이 특정 방향으로 진행할 때,
이 진행 방향에 대해 수직인 2차원 평면에서 진동한다는 것,
즉 진동할 수 있는 방향이 두 방향이라는 것을 의미합니다.



파동에는 두 가지 형태가 있습니다.
 하나는 진행 방향에 대해 수직으로 진동하는 **횡파** transverse wave이고,
 다른 하나는 같은 방향으로 진동하는 **종파** longitudinal wave입니다.



종파의 예로는 음파가 있습니다.
전자기파는 횡파의 한 예가 됩니다.



횡파는 2차원 평면에서 진동할 수 있습니다.
 즉, 벡터의 관점에서는 두 개의 독립적인 방향을 가질 수 있습니다.
 이것을 **편광**이라고 합니다.

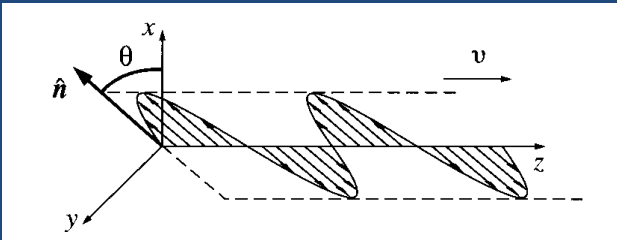
$$\tilde{f}_x = \tilde{A}e^{i(kz-\omega t)}\hat{x}$$

$$\tilde{f}_y = \tilde{A}e^{i(kz-\omega t)}\hat{y}$$

수학적으로는 진행 방향을 z-축 방향이라 할 때,
위와 같이 두 개의 편광 방향을
벡터로 적을 수 있습니다.

$$\tilde{f}_x = \tilde{A}e^{i(kz-\omega t)}\hat{x}$$

$$\tilde{f}_y = \tilde{A}e^{i(kz-\omega t)}\hat{y}$$



$$\hat{n} \cdot \hat{z} = 0$$

$$\hat{n} = \cos \theta \hat{x} + \sin \theta \hat{y}$$

일반적으로 진동면 위에 정의된 단위 벡터를 $\hat{n}$ 이라 하면,
위의 관계가 성립합니다.

여기에서 θ 를 편광 각 $\text{polarization angle}$ 이라고 합니다.

$$\tilde{f}_x = \tilde{A}e^{i(kz-\omega t)}\hat{x}$$

$$\tilde{f}_y = \tilde{A}e^{i(kz-\omega t)}\hat{y}$$

$$\hat{n} \cdot \hat{z} = 0$$

$$\tilde{f} = \tilde{A}\hat{n}e^{i(kz-\omega t)} = \tilde{A}(\cos\theta\hat{x} + \sin\theta\hat{y})e^{i(kz-\omega t)}$$

따라서 위와 같이 적는 것도 가능합니다.

이제 전자기파의 전파 과정에 대해 살펴봅시다.
먼저, 진공인 경우부터 생각해 봅시다.

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{E} &= 0 \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \times \vec{B} &= \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

진공에서의 맥스웰 방정식을 모두 적어 봅시다.

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \vec{E} &= 0 \\
 \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
 \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\
 \nabla \times \vec{B} &= \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}
 \end{aligned}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\frac{\partial (\nabla \times \vec{B})}{\partial t}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial (\nabla \times \vec{E})}{\partial t}$$

여기에서 두 번째와 네 번째 방정식의 양 변에
curl 연산을 취해 봅시다.

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \vec{E} &= 0 \\
\nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
\nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\
\nabla \times \vec{B} &= \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) &= -\frac{\partial (\nabla \times \vec{B})}{\partial t} \\
&= \nabla (\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla \times (\nabla \times \vec{B}) &= \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial (\nabla \times \vec{E})}{\partial t} \\
&= \nabla (\nabla \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B}
\end{aligned}$$

벡터의 미분의 항등식을 적용해 봅시다.

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \vec{E} &= 0 \\
 \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
 \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\
 \nabla \times \vec{B} &= \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \nabla \times (\nabla \times \vec{E}) &= -\frac{\partial (\nabla \times \vec{B})}{\partial t} \\
 &= \nabla(\cancel{\nabla \cdot \vec{E}}) - \nabla^2 \vec{E} = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \\
 \nabla \times (\nabla \times \vec{B}) &= \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial (\nabla \times \vec{E})}{\partial t} \\
 &= \nabla(\cancel{\nabla \cdot \vec{B}}) - \nabla^2 \vec{B} = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}
 \end{aligned}$$

마지막으로 양 변에 맥스웰 방정식의 결과를
다시 한 번 대입해 봅니다.

$$\nabla^2 \vec{E} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 \vec{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

최종적으로 위의 두 방정식을 얻게 됩니다.
이것은 전기장과 자기장에 대한 3차원 파동 방정식입니다.

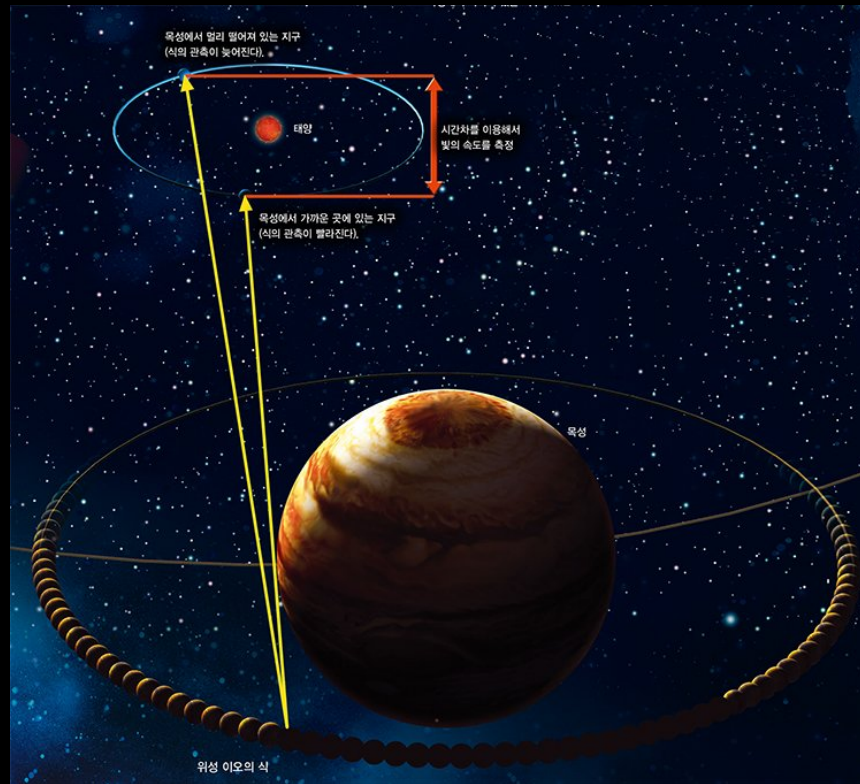
$$\nabla^2 \vec{E} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 \vec{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

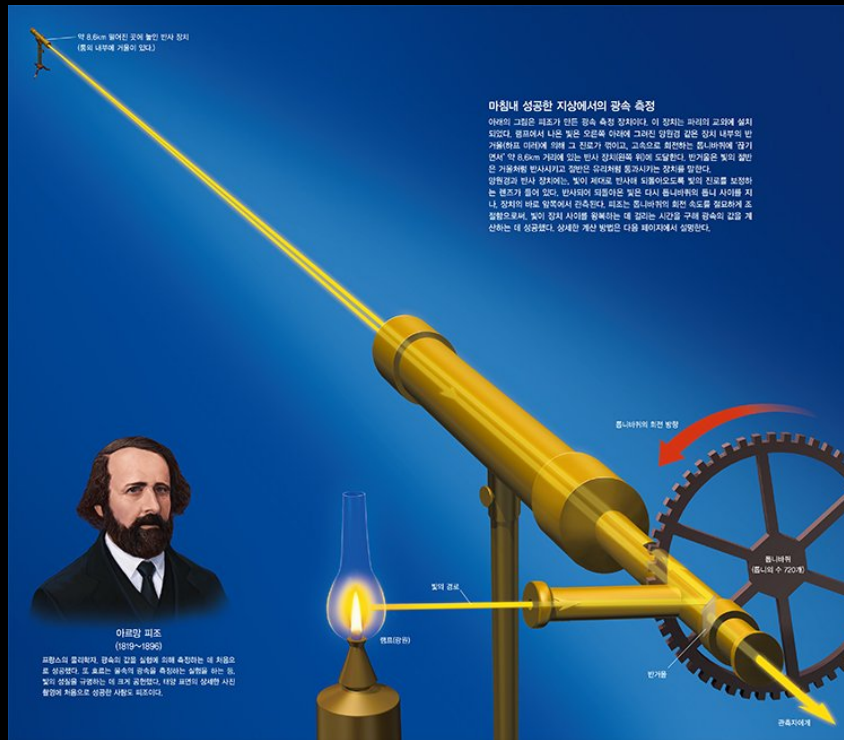
여기에서 파동의 속력은 $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ 으로 주어집니다.
이것은 진공 중에서의 빛의 속력과 같습니다.



빛의 속력을 가장 먼저 측정하려고 시도했던 것은 갈릴레이입니다.
그는 먼 거리에서 등불을 밝히는 신호를 확인하는 것을 통해
빛의 속력을 측정하려고 했지만 실패하였습니다.



뢰메르는 목성의 위성 이오가 목성 뒤로 숨는 **식 현상**이
지구와 목성 사이의 상대적 위치에 따라
시간차가 생겨 보인다는 것에 착안해
빛의 속력을 유한한 값으로 얻어내는 데에 성공합니다.



피조와 푸코는 **톱니바퀴 실험**을 통해
빛의 속력을 정밀하게 측정하는 것에 성공합니다.
톱니바퀴에 빛이 반사되는 것을 통해
빛의 경로가 사실상 길어지게 되었기 때문입니다.

피조(1849)와 푸코(1862)의 실험 결과는
19세기 중반에 알려져 있었습니다.
한 편, 맥스웰 방정식이 완성되는 것은 1861년 경입니다.

맥스웰은 전자기파의 진행 속력이
빛의 속력과 같다는 것을 알게 됩니다.

오늘날 빛의 속력은 마이켈슨 간섭계와 같은
다양한 광학 실험에 의해 정밀하게 측정될 수 있습니다.

그리고 더 나아가서 특수 상대성이론에 따라
빛의 속력이 상수가 되도록
길이의 단위를 정의하는 것을
국제 표준으로 삼고 있습니다.

$$\vec{\tilde{E}}(z, t) = \vec{\tilde{E}}_0 e^{i(kz - \omega t)}$$

$$\vec{\tilde{B}}(z, t) = \vec{\tilde{B}}_0 e^{i(kz - \omega t)}$$

이제 이러한 파동에서 특정한 진동수를 선택해서 (단색파)
위와 같이 나타내 봅시다.

x 및 y 방향의 의존성이 없으므로,
평면파라고 생각할 수 있습니다.

$$\vec{\tilde{E}}(z, t) = \vec{\tilde{E}}_0 e^{i(kz - \omega t)}$$

$$\vec{\tilde{B}}(z, t) = \vec{\tilde{B}}_0 e^{i(kz - \omega t)}$$

이 파동은 각자 파동 방정식을 만족하기는 합니다.
그러나 **맥스웰 방정식**에 의해
해의 형태가 좀 더 제한이 되어야 합니다.

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial}{\partial x} (\tilde{E}_{0x} e^{i(kz - \omega t)}) + \frac{\partial}{\partial y} (\tilde{E}_{0y} e^{i(kz - \omega t)}) + \frac{\partial}{\partial z} (\tilde{E}_{0z} e^{i(kz - \omega t)})$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial}{\partial x} (\tilde{E}_{0x} e^{i(kz - \omega t)}) + \frac{\partial}{\partial y} (\tilde{E}_{0y} e^{i(kz - \omega t)}) + \frac{\partial}{\partial z} (\tilde{E}_{0z} e^{i(kz - \omega t)})$$

$$= ik(\tilde{E}_{0z} e^{i(kz - \omega t)})$$

$$= 0 \quad \text{맥스웰 방정식}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial}{\partial x} (\tilde{E}_{0x} e^{i(kz - \omega t)}) + \frac{\partial}{\partial y} (\tilde{E}_{0y} e^{i(kz - \omega t)}) + \frac{\partial}{\partial z} (\tilde{E}_{0z} e^{i(kz - \omega t)})$$

$$= ik(\tilde{E}_{0z} e^{i(kz - \omega t)})$$

$$= 0 \quad \text{맥스웰 방정식}$$

따라서 $\tilde{E}_{0z} = 0$ 이며, 마찬가지로 $\tilde{B}_{0z} = 0$ 이 됩니다.

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{E} &= \frac{\partial}{\partial x} (\tilde{E}_{0x} e^{i(kz - \omega t)}) + \frac{\partial}{\partial y} (\tilde{E}_{0y} e^{i(kz - \omega t)}) + \frac{\partial}{\partial z} (\tilde{E}_{0z} e^{i(kz - \omega t)}) \\ &= ik(\tilde{E}_{0z} e^{i(kz - \omega t)}) \\ &= 0 \quad \text{맥스웰 방정식}\end{aligned}$$

따라서 $\tilde{E}_{0z} = 0$ 이며, 마찬가지로 $\tilde{B}_{0z} = 0$ 이 됩니다.

이것은 전기장과 자기장이 진행방향으로는 성분이 없다는 것, 즉 횡파라는 것을 보여줍니다.

$$\nabla \times \vec{E} = -\hat{x}(ik)\tilde{E}_{0y}e^{i(kz-\omega t)} + \hat{y}(ik)\tilde{E}_{0x}e^{i(kz-\omega t)}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\hat{x}(ik)\tilde{E}_{0y}e^{i(kz-\omega t)} + \hat{y}(ik)\tilde{E}_{0x}e^{i(kz-\omega t)}$$

$$= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \left(-\hat{x}\tilde{B}_{0x}(-i\omega) - \hat{y}\tilde{B}_{0y}(-i\omega) \right) e^{i(kz-\omega t)}$$

맥스웰 방정식

$$\nabla \times \vec{E} = -\hat{x}(ik)\tilde{E}_{0y}e^{i(kz-\omega t)} + \hat{y}(ik)\tilde{E}_{0x}e^{i(kz-\omega t)}$$

$$= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \left(-\hat{x}\tilde{B}_{0x}(-i\omega) - \hat{y}\tilde{B}_{0y}(-i\omega) \right) e^{i(kz-\omega t)}$$

맥스웰 방정식

따라서 $-k\tilde{E}_{0y} = \omega\tilde{B}_{0x}$ 및 $k\tilde{E}_{0x} = \omega\tilde{B}_{0y}$ 의 관계를 얻습니다.

$$\nabla \times \vec{E} = -\hat{x}(ik)\tilde{E}_{0y}e^{i(kz-\omega t)} + \hat{y}(ik)\tilde{E}_{0x}e^{i(kz-\omega t)}$$

$$= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \left(-\hat{x}\tilde{B}_{0x}(-i\omega) - \hat{y}\tilde{B}_{0y}(-i\omega) \right) e^{i(kz-\omega t)}$$

맥스웰 방정식

따라서 $-k\tilde{E}_{0y} = \omega\tilde{B}_{0x}$ 및 $k\tilde{E}_{0x} = \omega\tilde{B}_{0y}$ 의 관계를 얻습니다.

$$\vec{\tilde{B}}_0 = \frac{k}{\omega} (\hat{z} \times \vec{\tilde{E}}_0)$$

$$B_0 = \frac{k}{\omega} E_0 = \frac{1}{c} E_0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\hat{x}(ik)\tilde{E}_{0y}e^{i(kz-\omega t)} + \hat{y}(ik)\tilde{E}_{0x}e^{i(kz-\omega t)}$$

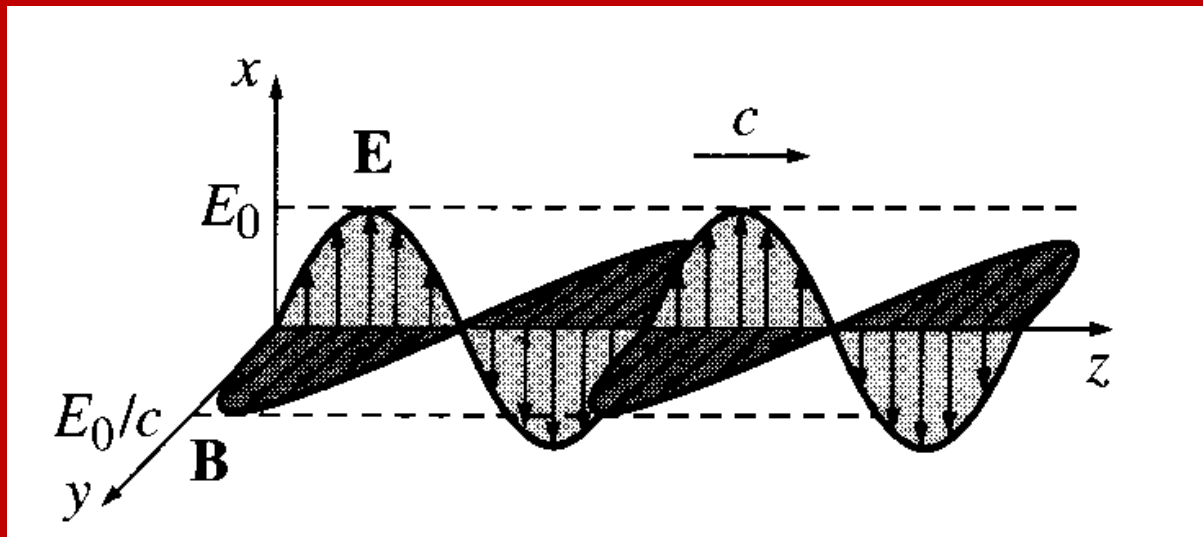
$$= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \left(-\hat{x}\tilde{B}_{0x}(-i\omega) - \hat{y}\tilde{B}_{0y}(-i\omega) \right) e^{i(kz-\omega t)}$$

맥스웰 방정식

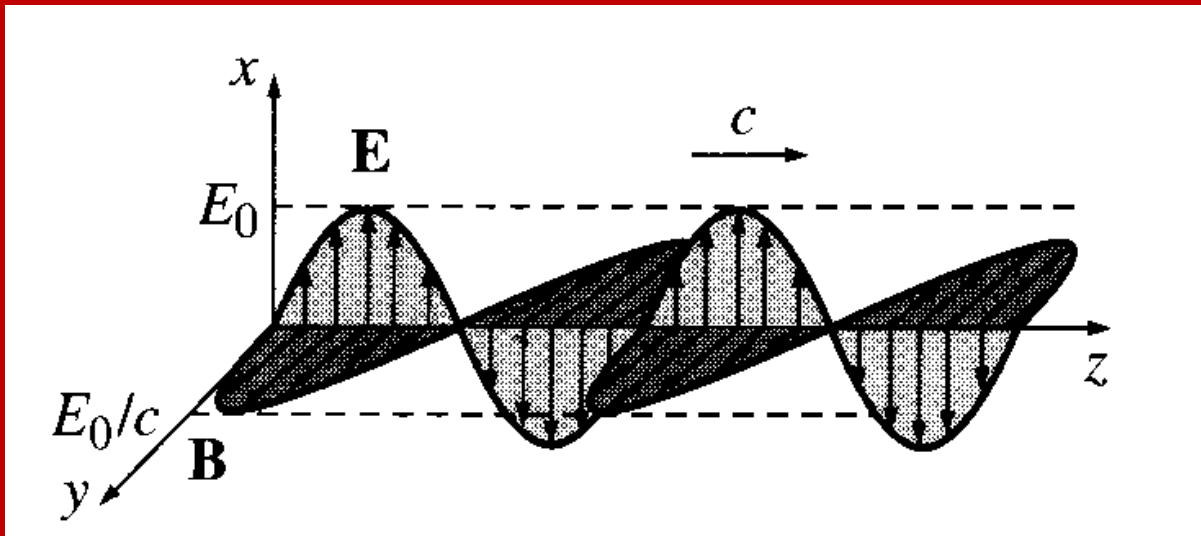
따라서 $-k\tilde{E}_{0y} = \omega\tilde{B}_{0x}$ 및 $k\tilde{E}_{0x} = \omega\tilde{B}_{0y}$ 의 관계를 얻습니다.

$$\vec{\tilde{B}}_0 = \frac{k}{\omega} (\hat{z} \times \vec{\tilde{E}}_0) \qquad B_0 = \frac{k}{\omega} E_0 = \frac{1}{c} E_0$$

따라서 전기장과 자기장은 위상은 같고 서로 직교합니다.



따라서 전기장과 자기장은 위상은 같고 서로 직교합니다.



이 부분에 대해서는 좀 더 자세한 설명이 필요합니다.
 전기장과 자기장은 편광을 가질 수 있습니다.
 편광의 방향을 우리는 **전기장을 기준**으로 정합니다.

$$\vec{\tilde{E}}(\vec{r}, t) = \tilde{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \hat{n}$$

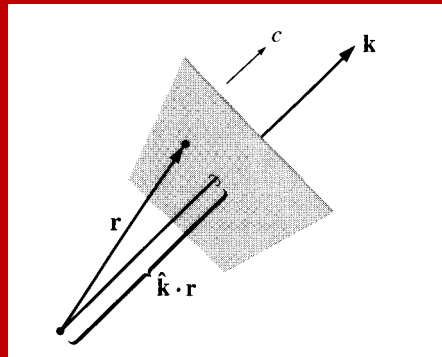
이 부분에 대해서는 좀 더 자세한 설명이 필요합니다.
전기장과 자기장은 편광을 가질 수 있습니다.
편광의 방향을 우리는 **전기장을 기준**으로 정합니다.

전파 벡터/파동 벡터

$$\hat{n} \cdot \vec{k} = 0$$

$$\vec{\tilde{E}}(\vec{r}, t) = \tilde{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \hat{n}$$

편광 방향



이 부분에 대해서는 좀 더 자세한 설명이 필요합니다.
전기장과 자기장은 편광을 가질 수 있습니다.
편광의 방향을 우리는 **전기장을 기준**으로 정합니다.

전파 벡터/파동 벡터

$$\hat{n} \cdot \vec{k} = 0$$

$$\vec{\tilde{E}}(\vec{r}, t) = \tilde{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \hat{n}$$

편광 방향

$$\begin{aligned}\vec{\tilde{B}}(\vec{r}, t) &= \frac{\tilde{E}_0}{c} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} (\hat{k} \times \hat{n}) \\ &= \frac{1}{c} (\hat{k} \times \vec{\tilde{E}})\end{aligned}$$

이 부분에 대해서는 좀 더 자세한 설명이 필요합니다.
전기장과 자기장은 편광을 가질 수 있습니다.
편광의 방향을 우리는 **전기장을 기준**으로 정합니다.

$$u = \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right)$$

이러한 전자기파는 에너지와 운동량을 전달해 줍니다.

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0 c^2} E^2 \right) \end{aligned}$$

이러한 전자기파는 에너지와 운동량을 전달해 줍니다.

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0 c^2} E^2 \right) \\
 &= \epsilon_0 E^2 = \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(kz - \omega t + \delta)
 \end{aligned}$$

이러한 전자기파는 에너지와 운동량을 전달해 줍니다.

$$u = \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0 c^2} E^2 \right)$$

$$= \epsilon_0 E^2 = \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(kz - \omega t + \delta)$$

$$\langle u \rangle = \epsilon_0 E_0^2 \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(kz - \omega t + \delta) dt = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

에너지 밀도를 한 주기 평균하면 다음과 같습니다.

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B}) = cu \hat{z} \quad \text{진행방향}$$

전자기파의 에너지는 포인팅 벡터의 방향으로 전달됩니다.

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B}) = cu \hat{z} \quad \text{진행방향}$$

$$\vec{p} = \frac{1}{c^2} \vec{S} = \frac{u}{c} \hat{z}$$

운동량 밀도의 방향도 포인팅 벡터의 방향과 같습니다.

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_0^2 \hat{z}$$

$$\langle \vec{p} \rangle = \frac{1}{2c} \epsilon_0 E_0^2 \hat{z}$$

각각의 시간 평균을 구하면 위와 같습니다.

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_0^2 \hat{z}$$

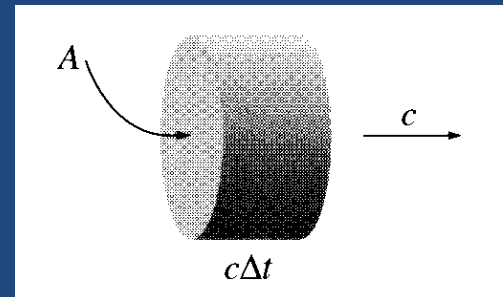
$$\langle \vec{p} \rangle = \frac{1}{2c} \epsilon_0 E_0^2 \hat{z}$$

$$I \equiv \langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_0^2$$

이것으로부터 단위 면적당 평균 일률,
즉 세기^{intensity}를 정의할 수 있습니다.

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_0^2 \hat{z}$$

$$\langle \vec{p} \rangle = \frac{1}{2c} \epsilon_0 E_0^2 \hat{z}$$

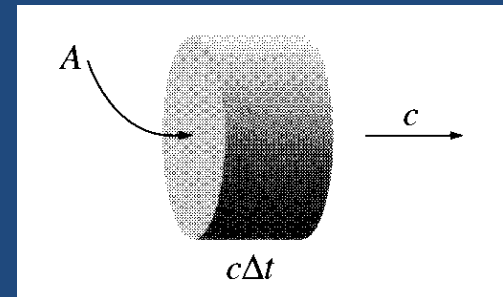


$$I \equiv \langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_0^2 \quad P \equiv \frac{1}{A} \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 = \frac{I}{c}$$

한 편, 단위 면적 및 단위 시간당 전달하는 평균 운동량,
 즉 복사 압력 radiation pressure은 위와 같습니다.
 이것은 전자기파가 완전 흡수시 전달하는 압력을 말합니다.

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_0^2 \hat{z}$$

$$\langle \vec{p} \rangle = \frac{1}{2c} \epsilon_0 E_0^2 \hat{z}$$



$$I \equiv \langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_0^2 \quad P \equiv \frac{1}{A} \frac{\Delta p}{\Delta t} = \epsilon_0 E_0^2 = 2 \frac{I}{c}$$

완전 반사시에는 전달하는 압력이 완전 흡수시의 두 배가 됩니다.

이제 전자기파의 전파를 매질이 있는 경우로 확장 시켜 봅시다.

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{D} &= 0 \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \times \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\end{aligned}$$

매질 속에서의 맥스웰 방정식을 모두 적어 봅시다.
자유 전하와 자유 전류는 없는 경우를 생각합시다.

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \vec{D} &= 0 \\
\nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
\nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\
\nabla \times \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}
\end{aligned}$$

매질이 **선형적**이라면 $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ 및 $\vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B}$ 가 됩니다.
매질이 **균일**하다면 ϵ 과 μ 는 상수가 됩니다.

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{E} &= 0 \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \times \vec{B} &= \epsilon\mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

그러면 방정식은 위와 같이 정리됩니다.
이것은 단지 전자기파의 속력만 변한 것으로 생각할 수 있습니다.
매질의 선형성에 의해 쌍극자들의 진동이 진동수는 바꾸지 않고
오직 속력만 바꾼 것입니다.

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{E} &= 0 \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \times \vec{B} &= \epsilon\mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{c}{n}$$

매질에서의 빛의 속력은 다음과 같습니다.

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \vec{E} &= 0 \\
 \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
 \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\
 \nabla \times \vec{B} &= \epsilon\mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}
 \end{aligned}$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{c}{n}$$

$$n \equiv \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0}}$$

진공에서의 빛의 속력과 매질에서의 빛의 속력 사이의 비율을
굴절률index of refraction이라고 합니다.

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \vec{E} &= 0 \\
 \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
 \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\
 \nabla \times \vec{B} &= \epsilon\mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}
 \end{aligned}$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{c}{n}$$

$$n \equiv \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0}}$$

많은 경우 $\mu \simeq \mu_0$ 이므로, 굴절률은 $n \simeq \sqrt{\kappa_E}$ 로 근사할 수 있습니다.

$$u = \frac{1}{2} \left(\epsilon E^2 + \frac{1}{\mu} B^2 \right)$$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu} (\vec{E} \times \vec{B})$$

$$I = \frac{1}{2} v \epsilon E_0^2$$

에너지 밀도와 포인팅 벡터는 쉽게 일반화됩니다.
전자기파의 세기도 위와 같이 적을 수 있습니다.

이제 매질이 있는 곳에서
전자기파의 반사와 투과에 대해 살펴봅시다.
우리는 유전체를 가정하여
자유 전하나 자유 전류는 존재하지 않는다고 생각합니다.

$$\epsilon_1 E_1^\perp - \epsilon_2 E_2^\perp = 0 \quad B_1^\perp - B_2^\perp = 0$$

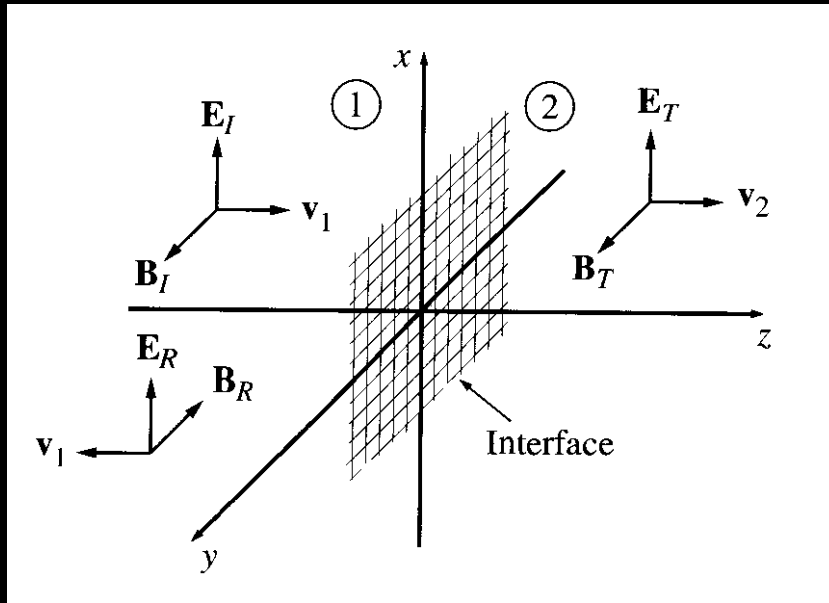
$$E_1^\parallel - E_2^\parallel = 0 \quad \frac{1}{\mu_1} B_1^\parallel - \frac{1}{\mu_2} B_2^\parallel = 0$$

전자기파가 굴절률이 다른 매질로 입사하는 경우,
위와 같은 경계 조건을 적용하면 됩니다.

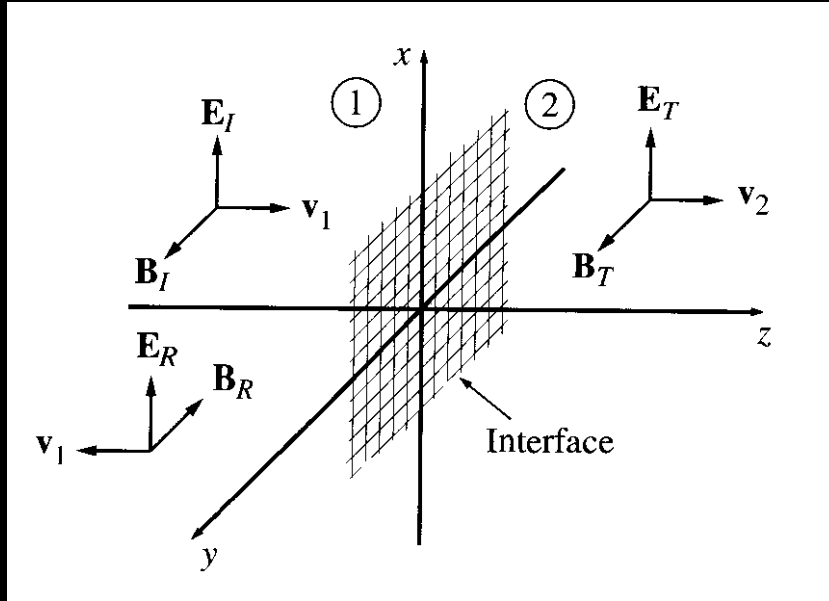
$$\epsilon_1 E_1^\perp - \epsilon_2 E_2^\perp = 0 \quad B_1^\perp - B_2^\perp = 0$$

$$E_1^\parallel - E_2^\parallel = 0 \quad \frac{1}{\mu_1} B_1^\parallel - \frac{1}{\mu_2} B_2^\parallel = 0$$

수직으로 입사하는 파동과 비스듬히 입사하는 파동에 대해
이 경계조건들을 체계적으로 적용시켜 보겠습니다.



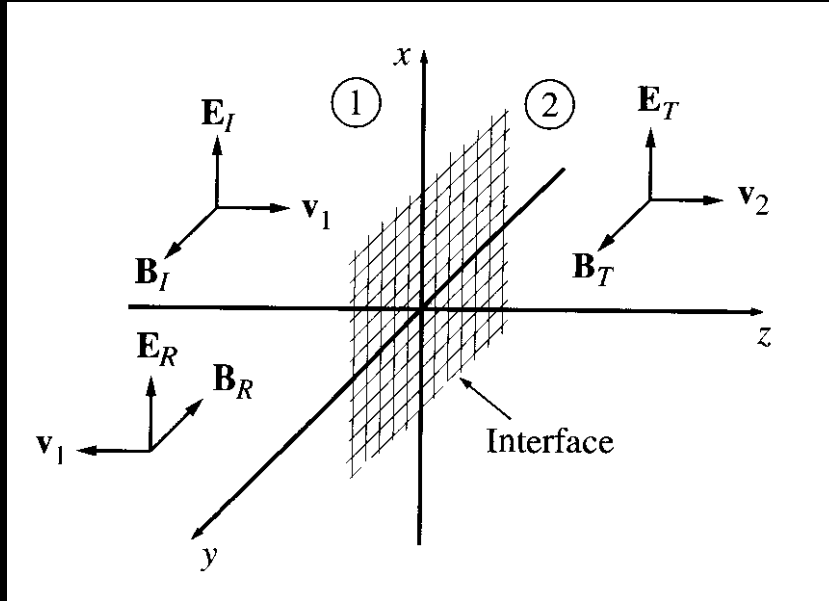
위와 같이 수직으로 입사하는 파동을 생각합시다.
 여기에서 **i**는 입사incidence, **r**은 반사reflection, **t**는 투과transmission를
 의미합니다.



$$\tilde{E}_i = \tilde{E}_{0i} e^{i(k_1 z - \omega t)} \hat{x}$$

$$\tilde{B}_i = \frac{\tilde{E}_{0i}}{v_1} e^{i(k_1 z - \omega t)} \hat{y}$$

먼저 **입사**하는 전자기파를 수학적으로 적어봅시다.
우리가 이미 익힌 원리에 따라 적어보면
필연적으로 위와 같이 표현 됩니다.
여기에서 인덱스 **1**은 첫 번째 매질을 의미합니다.



$$\tilde{E}_i = \tilde{E}_{0i} e^{i(k_1 z - \omega t)} \hat{x}$$

$$\tilde{B}_i = \frac{\tilde{E}_{0i}}{v_1} e^{i(k_1 z - \omega t)} \hat{y}$$

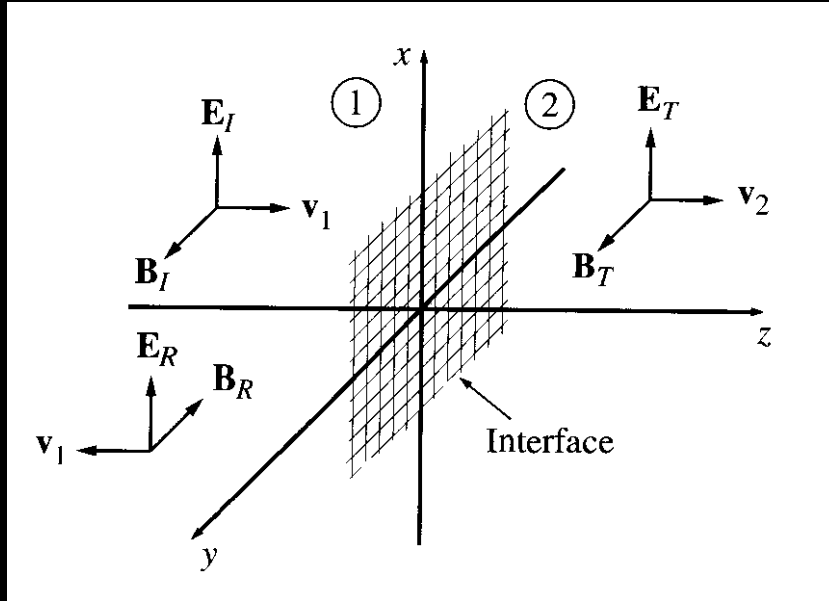
$$\tilde{E}_r = \tilde{E}_{0r} e^{i(-k_1 z - \omega t)} \hat{x}$$

$$\tilde{B}_r = \frac{\tilde{E}_{0r}}{v_1} e^{i(-k_1 z - \omega t)} (-\hat{y})$$

반사하는 전자기파도 수학적으로 적어봅시다.

매질의 특성은 인덱스 1과 같지만
진행 방향은 반대가 되어야 합니다.

이것은 $k_1 \rightarrow -k_1$ 및 $\hat{y} \rightarrow -\hat{y}$ 을 선택한다는 것을 의미합니다.



$$\tilde{E}_i = \tilde{E}_{0i} e^{i(k_1 z - \omega t)} \hat{x}$$

$$\tilde{B}_i = \frac{\tilde{E}_{0i}}{v_1} e^{i(k_1 z - \omega t)} \hat{y}$$

$$\tilde{E}_r = \tilde{E}_{0r} e^{i(-k_1 z - \omega t)} \hat{x}$$

$$\tilde{B}_r = \frac{\tilde{E}_{0r}}{v_1} e^{i(-k_1 z - \omega t)} (-\hat{y})$$

$$\tilde{E}_t = \tilde{E}_{0t} e^{i(k_2 z - \omega t)} \hat{x}$$

$$\tilde{B}_t = \frac{\tilde{E}_{0t}}{v_2} e^{i(k_2 z - \omega t)} \hat{y}$$

마지막으로 **투과**하는 전자기파도 수학적으로 적어봅시다.
매질의 특성은 인덱스 **2**가 되지만
진행 방향은 입사파와 동일합니다.

$$\begin{aligned}
 E_1^{\parallel} - E_2^{\parallel} &= 0 \\
 \epsilon_1 E_1^{\perp} - \epsilon_2 E_2^{\perp} &= 0 \\
 B_1^{\perp} - B_2^{\perp} &= 0 \\
 \frac{1}{\mu_1} B_1^{\parallel} - \frac{1}{\mu_2} B_2^{\parallel} &= 0
 \end{aligned}$$

$$\tilde{E}_i = \tilde{E}_{0i} e^{i(k_1 z - \omega t)} \hat{x}$$

$$\tilde{B}_i = \frac{\tilde{E}_{0i}}{v_1} e^{i(k_1 z - \omega t)} \hat{y}$$

$$\tilde{E}_r = \tilde{E}_{0r} e^{i(-k_1 z - \omega t)} \hat{x}$$

$$\tilde{B}_r = \frac{\tilde{E}_{0r}}{v_1} e^{i(-k_1 z - \omega t)} (-\hat{y})$$

$$\tilde{E}_t = \tilde{E}_{0t} e^{i(k_2 z - \omega t)} \hat{x}$$

$$\tilde{B}_t = \frac{\tilde{E}_{0t}}{v_2} e^{i(k_2 z - \omega t)} \hat{y}$$

이제 여기 있는 전자기파의 형태에 대해
 $z = 0$ 에서 맥스웰 방정식의 **경계 조건**을 적용해서
 세 상수 $\tilde{E}_{0i}$, $\tilde{E}_{0r}$, $\tilde{E}_{0t}$ 사이의 관계를 알아봅시다.

$$\begin{aligned}
 E_1^{\parallel} - E_2^{\parallel} &= 0 \\
 \epsilon_1 E_1^{\perp} - \epsilon_2 E_2^{\perp} &= 0 \\
 B_1^{\perp} - B_2^{\perp} &= 0 \\
 \frac{1}{\mu_1} B_1^{\parallel} - \frac{1}{\mu_2} B_2^{\parallel} &= 0
 \end{aligned}$$

$$\tilde{E}_i = \tilde{E}_{0i} e^{i(k_1 z - \omega t)} \hat{x}$$

$$\tilde{B}_i = \frac{\tilde{E}_{0i}}{v_1} e^{i(k_1 z - \omega t)} \hat{y}$$

$$\tilde{E}_r = \tilde{E}_{0r} e^{i(-k_1 z - \omega t)} \hat{x}$$

$$\tilde{B}_r = \frac{\tilde{E}_{0r}}{v_1} e^{i(-k_1 z - \omega t)} (-\hat{y})$$

$$\tilde{E}_t = \tilde{E}_{0t} e^{i(k_2 z - \omega t)} \hat{x}$$

$$\tilde{B}_t = \frac{\tilde{E}_{0t}}{v_2} e^{i(k_2 z - \omega t)} \hat{y}$$

먼저 경계면에 수직으로 입사하는 파동이므로
 경계면에 수직인 전기장 및 자기장 성분은 없습니다.
 따라서 두 번째와 세 번째 방정식은 자동적으로 만족됩니다.

$$\begin{aligned}
 E_1^{\parallel} - E_2^{\parallel} &= 0 \\
 \epsilon_1 E_1^{\perp} - \epsilon_2 E_2^{\perp} &= 0 \\
 B_1^{\perp} - B_2^{\perp} &= 0 \\
 \frac{1}{\mu_1} B_1^{\parallel} - \frac{1}{\mu_2} B_2^{\parallel} &= 0
 \end{aligned}$$

$$\tilde{E}_i = \tilde{E}_{0i} e^{i(k_1 z - \omega t)} \hat{x}$$

$$\tilde{B}_i = \frac{\tilde{E}_{0i}}{v_1} e^{i(k_1 z - \omega t)} \hat{y}$$

$$\tilde{E}_r = \tilde{E}_{0r} e^{i(-k_1 z - \omega t)} \hat{x}$$

$$\tilde{B}_r = \frac{\tilde{E}_{0r}}{v_1} e^{i(-k_1 z - \omega t)} (-\hat{y})$$

$$\tilde{E}_t = \tilde{E}_{0t} e^{i(k_2 z - \omega t)} \hat{x}$$

$$\tilde{B}_t = \frac{\tilde{E}_{0t}}{v_2} e^{i(k_2 z - \omega t)} \hat{y}$$

첫 번째 방정식을 적용하면 다음 결과를 얻습니다.

$$\tilde{E}_{0i} + \tilde{E}_{0r} = \tilde{E}_{0t}$$

$$\begin{aligned}
 E_1^{\parallel} - E_2^{\parallel} &= 0 \\
 \epsilon_1 E_1^{\perp} - \epsilon_2 E_2^{\perp} &= 0 \\
 B_1^{\perp} - B_2^{\perp} &= 0 \\
 \frac{1}{\mu_1} B_1^{\parallel} - \frac{1}{\mu_2} B_2^{\parallel} &= 0
 \end{aligned}$$

$$\tilde{E}_i = \tilde{E}_{0i} e^{i(k_1 z - \omega t)} \hat{x}$$

$$\tilde{B}_i = \frac{\tilde{E}_{0i}}{v_1} e^{i(k_1 z - \omega t)} \hat{y}$$

$$\tilde{E}_r = \tilde{E}_{0r} e^{i(-k_1 z - \omega t)} \hat{x}$$

$$\tilde{B}_r = \frac{\tilde{E}_{0r}}{v_1} e^{i(-k_1 z - \omega t)} (-\hat{y})$$

$$\tilde{E}_t = \tilde{E}_{0t} e^{i(k_2 z - \omega t)} \hat{x}$$

$$\tilde{B}_t = \frac{\tilde{E}_{0t}}{v_2} e^{i(k_2 z - \omega t)} \hat{y}$$

네 번째 방정식을 적용하면 다음 결과를 얻습니다.

$$\frac{1}{\mu_1} \left(\frac{\tilde{E}_{0i}}{v_1} - \frac{\tilde{E}_{0r}}{v_1} \right) = \frac{1}{\mu_2} \frac{\tilde{E}_{0t}}{v_2}$$

$$\begin{aligned}
 E_1^{\parallel} - E_2^{\parallel} &= 0 \\
 \epsilon_1 E_1^{\perp} - \epsilon_2 E_2^{\perp} &= 0 \\
 B_1^{\perp} - B_2^{\perp} &= 0 \\
 \frac{1}{\mu_1} B_1^{\parallel} - \frac{1}{\mu_2} B_2^{\parallel} &= 0
 \end{aligned}$$

$$\tilde{E}_i = \tilde{E}_{0i} e^{i(k_1 z - \omega t)} \hat{x}$$

$$\tilde{B}_i = \frac{\tilde{E}_{0i}}{v_1} e^{i(k_1 z - \omega t)} \hat{y}$$

$$\tilde{E}_r = \tilde{E}_{0r} e^{i(-k_1 z - \omega t)} \hat{x}$$

$$\tilde{B}_r = \frac{\tilde{E}_{0r}}{v_1} e^{i(-k_1 z - \omega t)} (-\hat{y})$$

$$\tilde{E}_t = \tilde{E}_{0t} e^{i(k_2 z - \omega t)} \hat{x}$$

$$\tilde{B}_t = \frac{\tilde{E}_{0t}}{v_2} e^{i(k_2 z - \omega t)} \hat{y}$$

또는 정리하면 다음과 같습니다.

$$\tilde{E}_{0i} - \tilde{E}_{0r} = \underbrace{\frac{\mu_1 n_2}{\mu_2 n_1}}_{\equiv \beta} \tilde{E}_{0t}$$

$$\tilde{E}_{0i} + \tilde{E}_{0r} = \tilde{E}_{0t}$$

$$\tilde{E}_{0i} - \tilde{E}_{0r} = \beta \tilde{E}_{0t}$$

이제 우리가 얻은 세 변수 사이의 관계는 위와 같습니다.

$$\tilde{E}_{0i} + \tilde{E}_{0r} = \tilde{E}_{0t}$$

$$\tilde{E}_{0i} - \tilde{E}_{0r} = \beta \tilde{E}_{0t}$$

$$\tilde{E}_{0r} = \left(\frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right) \tilde{E}_{0i}$$

$$\tilde{E}_{0t} = \left(\frac{2}{1 + \beta} \right) \tilde{E}_{0i}$$

두 식을 연립해 풀면 위와 같은 결과를 얻게 됩니다.
이 식은 입사파에 대한 반사파 및 투과파의
상대적 진폭을 나타내 줍니다.

$$\mathcal{R} \equiv \frac{I_r}{I_i} = \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)^2 = \left(\frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right)^2$$

$$\mathcal{T} \equiv \frac{I_t}{I_i} = \frac{\epsilon_2 \nu_2}{\epsilon_1 \nu_1} \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)^2 = \beta \left(\frac{2}{1 + \beta} \right)^2$$

서로 다른 매질에서
상대적인 전파 속력이 다르므로

그러면 우리는 여기에서 반사율reflectance과 투과율transmittance을
정의할 수 있습니다.

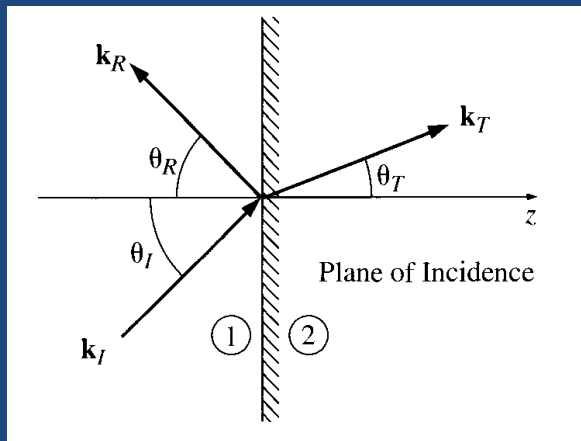
$$\mathcal{R} \equiv \frac{I_r}{I_i} = \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)^2 = \left(\frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right)^2$$

$$\mathcal{T} \equiv \frac{I_t}{I_i} = \frac{\epsilon_2 \nu_2}{\epsilon_1 \nu_1} \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)^2 = \beta \left(\frac{2}{1 + \beta} \right)^2$$

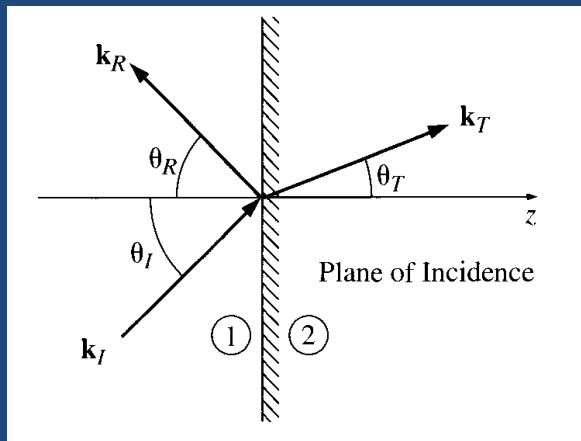
서로 다른 매질에서
상대적인 전파 속력이 다르므로

$$\mathcal{R} + \mathcal{T} = 1$$

그러면 반사율과 투과율의 합은
항상 1이 된다는 것을 확인할 수 있습니다.



이번에는 비스듬한 입사파에 대해서 고려해 봅시다.
수식은 좀 더 복잡해지지만
근본적으로 새로운 것은 없습니다.



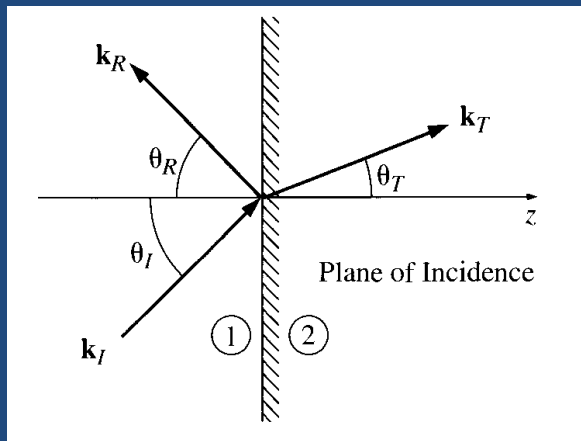
$$\vec{\tilde{E}}_i = \vec{\tilde{E}}_{0i} e^{i(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad \vec{\tilde{B}}_i = \frac{1}{v_1} (\hat{k}_i \times \vec{\tilde{E}}_i)$$

$$\vec{\tilde{E}}_r = \vec{\tilde{E}}_{0r} e^{i(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad \vec{\tilde{B}}_r = \frac{1}{v_1} (\hat{k}_r \times \vec{\tilde{E}}_r)$$

$$\vec{\tilde{E}}_t = \vec{\tilde{E}}_{0t} e^{i(\vec{k}_t \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad \vec{\tilde{B}}_t = \frac{1}{v_2} (\hat{k}_t \times \vec{\tilde{E}}_t)$$

전기장과 자기장에 대해 위와 같이 적을 수 있습니다.

이번에는 벡터로 표기된 것이 $\vec{\tilde{E}}_0$ 및 $\vec{k}$ 라는 것을
주의 깊게 살펴봅시다.



$$\vec{\tilde{E}}_i = \vec{\tilde{E}}_{0i} e^{i(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad \vec{\tilde{B}}_i = \frac{1}{v_1} (\hat{k}_i \times \vec{\tilde{E}}_i)$$

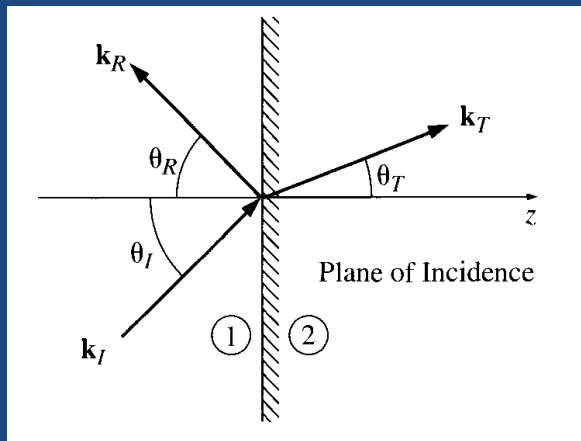
$$\vec{\tilde{E}}_r = \vec{\tilde{E}}_{0r} e^{i(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad \vec{\tilde{B}}_r = \frac{1}{v_1} (\hat{k}_r \times \vec{\tilde{E}}_r)$$

$$\vec{\tilde{E}}_t = \vec{\tilde{E}}_{0t} e^{i(\vec{k}_t \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad \vec{\tilde{B}}_t = \frac{1}{v_2} (\hat{k}_t \times \vec{\tilde{E}}_t)$$

선형적 및 등방적 매질에서는 진동수는 변하지 않습니다.

따라서 $k_i v_1 = k_r v_1 = k_t v_2 = \omega$ 가 됩니다.

따라서 $k_i = k_r = \frac{v_2}{v_1} k_t = \frac{n_1}{n_2} k_t$ 라는 관계를 얻습니다.

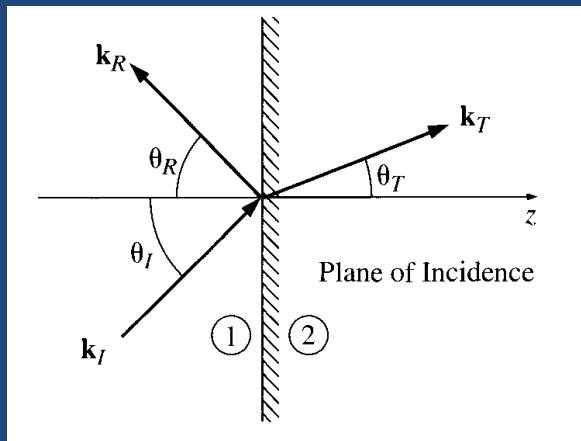


$$\vec{\tilde{E}}_i = \vec{\tilde{E}}_{0i} e^{i(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad \vec{\tilde{B}}_i = \frac{1}{v_1} (\hat{k}_i \times \vec{\tilde{E}}_i)$$

$$\vec{\tilde{E}}_r = \vec{\tilde{E}}_{0r} e^{i(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad \vec{\tilde{B}}_r = \frac{1}{v_1} (\hat{k}_r \times \vec{\tilde{E}}_r)$$

$$\vec{\tilde{E}}_t = \vec{\tilde{E}}_{0t} e^{i(\vec{k}_t \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad \vec{\tilde{B}}_t = \frac{1}{v_2} (\hat{k}_t \times \vec{\tilde{E}}_t)$$

한편, $z = 0$ 인 경계면에서 x 와 y 를 바꾸어도
경계조건이 만족되어야 하므로,
지수함수는 연속이어야 합니다.



$$\vec{\tilde{E}}_i = \vec{\tilde{E}}_{0i} e^{i(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad \vec{\tilde{B}}_i = \frac{1}{v_1} (\hat{k}_i \times \vec{\tilde{E}}_i)$$

$$\vec{\tilde{E}}_r = \vec{\tilde{E}}_{0r} e^{i(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad \vec{\tilde{B}}_r = \frac{1}{v_1} (\hat{k}_r \times \vec{\tilde{E}}_r)$$

$$\vec{\tilde{E}}_t = \vec{\tilde{E}}_{0t} e^{i(\vec{k}_t \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad \vec{\tilde{B}}_t = \frac{1}{v_2} (\hat{k}_t \times \vec{\tilde{E}}_t)$$

따라서 다음 결과를 얻습니다. ($z = 0$ 에서)

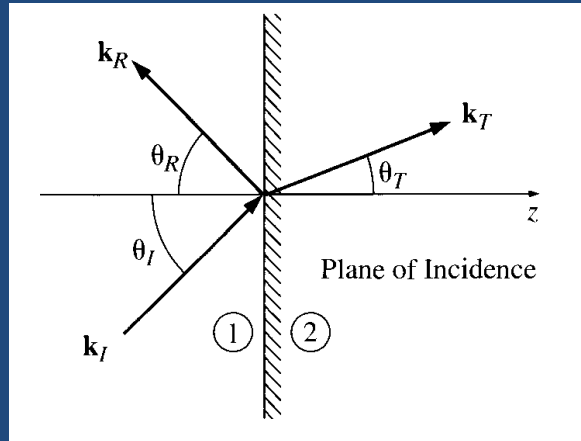
$$\vec{k}_i \cdot \vec{r} = \vec{k}_r \cdot \vec{r} = \vec{k}_t \cdot \vec{r}$$

또는 정리하면 다음과 같습니다. (임의의 x, y 에 대해)

$$x(k_i)_x + y(k_i)_y = x(k_r)_x + y(k_r)_y = x(k_t)_x + y(k_t)_y$$

$$k_i = k_r = \frac{v_2}{v_1} k_t = \frac{n_1}{n_2} k_t$$

$$(k_i)_x = (k_r)_x = (k_t)_x$$

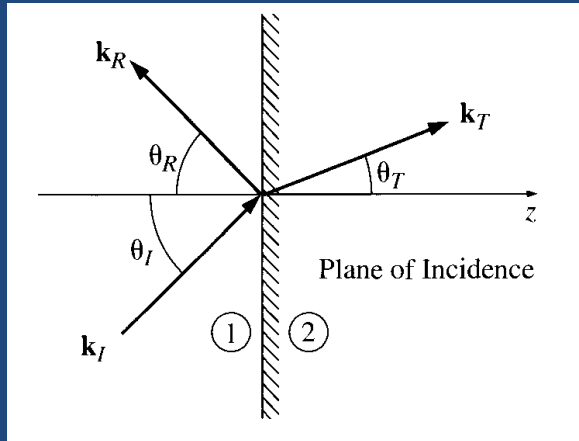


$$(k_i)_y = (k_r)_y = (k_t)_y$$

따라서 일반적으로 위와 같은 결과를 얻습니다.

$$k_i = k_r = \frac{v_2}{v_1} k_t = \frac{n_1}{n_2} k_t$$

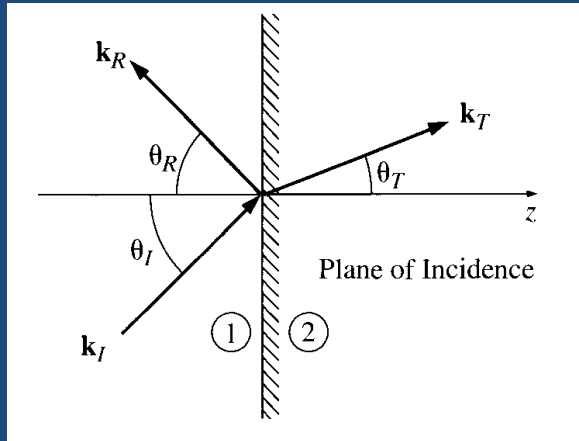
$$(k_i)_x = (k_r)_x = (k_t)_x$$



$$(k_i)_y = (k_r)_y = (k_t)_y$$

두 번째 식의 경우, 좌표축을 잘 잡아서 $(k_i)_y = 0$ 이 되도록 하면,
 $(k_r)_y = (k_t)_y = 0$ 이 됨을 알 수 있습니다.
 즉, 반사와 투과 벡터는 입사파와 **같은 평면**에 놓이게 됩니다.

$$k_i = k_r = \frac{v_2}{v_1} k_t = \frac{n_1}{n_2} k_t$$



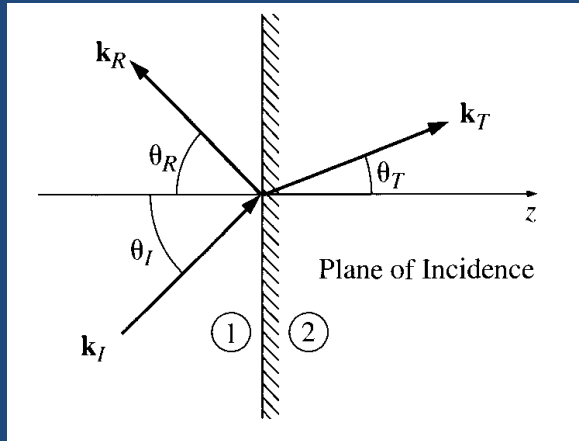
$$(k_i)_x = (k_r)_x = (k_t)_x$$

$$k_i \sin \theta_i = k_r \sin \theta_r = k_t \sin \theta_t$$

$$(k_i)_y = (k_r)_y = (k_t)_y$$

첫 번째 식은 입사각, 반사각 및 굴절각을 사용해
다시 적을 수 있습니다.

$$k_i = k_r = \frac{v_2}{v_1} k_t = \frac{n_1}{n_2} k_t$$



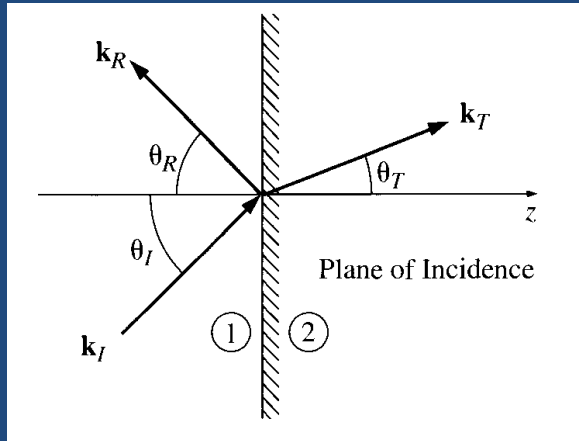
$$(k_i)_x = (k_r)_x = (k_t)_x$$

$$k_i \sin \theta_i = k_r \sin \theta_r = k_t \sin \theta_t$$

$$(k_i)_y = (k_r)_y = (k_t)_y$$

따라서 다음 세 법칙을 얻습니다.
 첫째, 입사, 반사, 투과파의 파동 벡터는
 같은 평면 plane of incidence에 놓입니다.

$$k_i = k_r = \frac{v_2}{v_1} k_t = \frac{n_1}{n_2} k_t$$



$$(k_i)_x = (k_r)_x = (k_t)_x$$

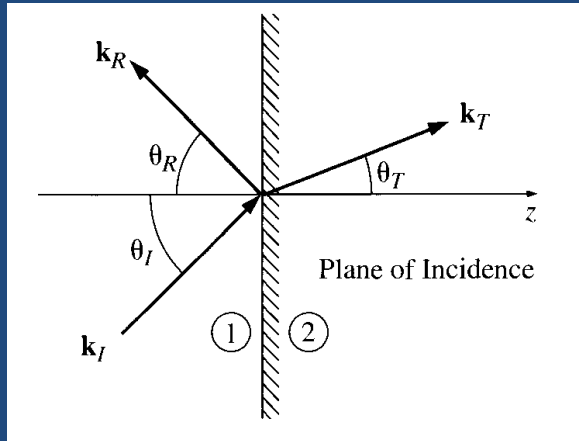
$$k_i \sin \theta_i = k_r \sin \theta_r = k_t \sin \theta_t$$

$$(k_i)_y = (k_r)_y = (k_t)_y$$

둘째, 반사 법칙 law of reflection,
즉, 입사각과 반사각은 같습니다.

$$\theta_i = \theta_r$$

$$k_i = k_r = \frac{v_2}{v_1} k_t = \frac{n_1}{n_2} k_t$$



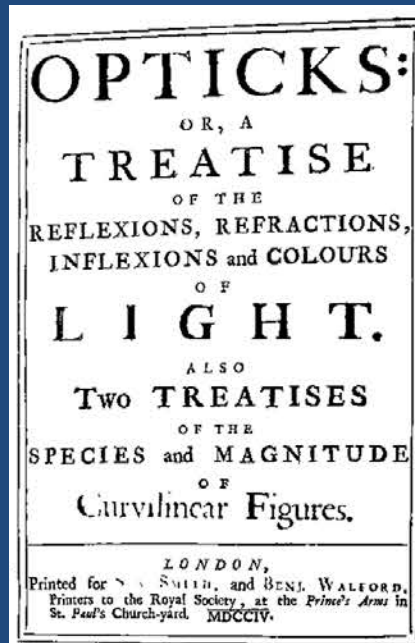
$$(k_i)_x = (k_r)_x = (k_t)_x$$

$$k_i \sin \theta_i = k_r \sin \theta_r = k_t \sin \theta_t$$

$$(k_i)_y = (k_r)_y = (k_t)_y$$

셋째, 굴절 법칙 law of refraction 또는 스넬의 법칙 Snell's law,
즉, 입사각과 굴절각의 관계는 다음과 같습니다.

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t$$



A X I O M S.

A X. I.

THE Angles of Incidence, Reflexion, and Refraction, lye
in one and the same Plane.

A X. II.

The Angle of Reflexion is equal to the Angle of Incidence

A X. III.

If the refracted Ray be returned directly back to the Point
of Incidence, it shall be refracted into the Line before descri-
bed by the incident Ray.

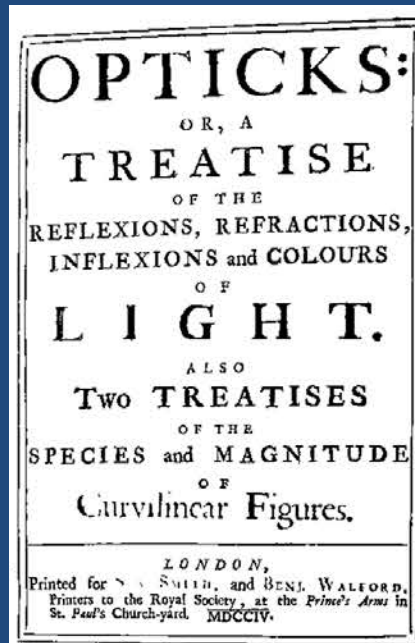
A X. IV.

Refraction out of the rarer Medium into the denser; is made
towards the Perpendicular; that is, so that the Angle of Refra-
ction be less than the Angle of Incidence.

A X. V.

The Sine of Incidence, is either accurately or very nearly in a
given Ratio to the Sine of Refraction.

이 세 가지 법칙은 뉴턴이 자신의 광학(1704) 저서에서
잘 정리했던 것입니다.



A X I O M S.

A X. I.

THE Angles of Incidence, Reflexion, and Refraction, lie in one and the same Plane.

A X. II.

The Angle of Reflexion is equal to the Angle of Incidence

A X. III.

If the refracted Ray be returned directly back to the Point of Incidence, it shall be refracted into the Line before described by the incident Ray.

A X. IV.

Refraction out of the rarer Medium into the denser; is made towards the Perpendicular; that is, so that the Angle of Refraction be less than the Angle of Incidence.

A X. V.

The Sine of Incidence, is either accurately or very nearly in a given Ratio to the Sine of Refraction.

이 세 법칙은 파동의 연속성이 성립하면,
전자기파 이외의 파동에 대해서도 적용할 수 있는 것입니다.
맥스웰 방정식을 적용하면
방향 뿐만 아니라 진폭에 대한 정보도 결정할 수 있게 됩니다.

$$\epsilon_1 \left(\vec{\tilde{E}}_{0i} + \vec{\tilde{E}}_{0r} \right)_z = \epsilon_2 \left(\vec{\tilde{E}}_{0t} \right)_z$$

$$\left(\vec{\tilde{B}}_{0i} + \vec{\tilde{B}}_{0r} \right)_z = \left(\vec{\tilde{B}}_{0t} \right)_z$$

$$\left(\vec{\tilde{E}}_{0i} + \vec{\tilde{E}}_{0r} \right)_{x,y} = \left(\vec{\tilde{E}}_{0t} \right)_{x,y}$$

$$\frac{1}{\mu_1} \left(\vec{\tilde{B}}_{0i} + \vec{\tilde{B}}_{0r} \right)_{x,y} = \frac{1}{\mu_2} \left(\vec{\tilde{B}}_{0t} \right)_{x,y}$$

맥스웰 방정식의 네 가지 경계조건을 모두 적용하면
위와 같은 네 개의 방정식을 얻게 됩니다.

$$\left(\vec{\tilde{B}}_0 = \frac{1}{v} \hat{k} \times \vec{\tilde{E}}_0 \right)$$

$$\epsilon_1 \left(\vec{\tilde{E}}_{0i} + \vec{\tilde{E}}_{0r} \right)_z = \epsilon_2 \left(\vec{\tilde{E}}_{0t} \right)_z$$

$$\left(\vec{\tilde{B}}_{0i} + \vec{\tilde{B}}_{0r} \right)_z = \left(\vec{\tilde{B}}_{0t} \right)_z$$

$$\left(\vec{\tilde{E}}_{0i} + \vec{\tilde{E}}_{0r} \right)_{x,y} = \left(\vec{\tilde{E}}_{0t} \right)_{x,y}$$

$$\frac{1}{\mu_1} \left(\vec{\tilde{B}}_{0i} + \vec{\tilde{B}}_{0r} \right)_{x,y} = \frac{1}{\mu_2} \left(\vec{\tilde{B}}_{0t} \right)_{x,y}$$

편광 방향($\vec{E}$ 의 방향)이 xz -평면에 있는 경우,
 $\vec{B}$ 는 z 성분이 없으므로, 두 번째 방정식은 자동으로 만족됩니다.

$$\epsilon_1(-\tilde{E}_{0i} \sin \theta_i + \tilde{E}_{0r} \sin \theta_r) = \epsilon_2(-\tilde{E}_{0t} \sin \theta_t)$$

$$\left(\tilde{\vec{B}}_{0i} + \tilde{\vec{B}}_{0r}\right)_z = \left(\tilde{\vec{B}}_{0t}\right)_z$$

$$\tilde{E}_{0i} \cos \theta_i + \tilde{E}_{0r} \cos \theta_r = \tilde{E}_{0t} \cos \theta_t$$

$$\frac{1}{\mu_1 v_1} (\tilde{E}_{0i} - \tilde{E}_{0r}) = \frac{1}{\mu_2 v_2} \tilde{E}_{0t}$$

나머지 세 방정식을 입사각, 반사각 및 굴절각을
사용해서 표현해봅시다.

$$\left(\tilde{\vec{B}}_0 = \frac{1}{v} \hat{k} \times \tilde{\vec{E}}_0\right)$$

$$\epsilon_1(-\tilde{E}_{0i} \sin \theta_i + \tilde{E}_{0r} \sin \theta_r) = \epsilon_2(-\tilde{E}_{0t} \sin \theta_t)$$

$$\left(\tilde{\vec{B}}_{0i} + \tilde{\vec{B}}_{0r}\right)_z = \left(\tilde{\vec{B}}_{0t}\right)_z$$

$$\tilde{E}_{0i} \cos \theta_i + \tilde{E}_{0r} \cos \theta_r = \tilde{E}_{0t} \cos \theta_t$$

$$\frac{1}{\mu_1 v_1} (\tilde{E}_{0i} - \tilde{E}_{0r}) = \frac{1}{\mu_2 v_2} \tilde{E}_{0t}$$

첫 번째 식과 네 번째 식에 반사 법칙 $\theta_i = \theta_r$ 과 굴절 법칙 $n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_r$ 을 적용하면 다음 결과를 얻습니다.

$$\tilde{E}_{0i} - \tilde{E}_{0r} = \beta \tilde{E}_{0t}$$

$$\epsilon_1(-\tilde{E}_{0i} \sin \theta_i + \tilde{E}_{0r} \sin \theta_r) = \epsilon_2(-\tilde{E}_{0t} \sin \theta_t)$$

$$\left(\vec{\tilde{B}}_{0i} + \vec{\tilde{B}}_{0r}\right)_z = \left(\vec{\tilde{B}}_{0t}\right)_z$$

$$\tilde{E}_{0i} \cos \theta_i + \tilde{E}_{0r} \cos \theta_r = \tilde{E}_{0t} \cos \theta_t$$

$$\frac{1}{\mu_1 v_1} (\tilde{E}_{0i} - \tilde{E}_{0r}) = \frac{1}{\mu_2 v_2} \tilde{E}_{0t}$$

한 편, 세 번째 식을 정리하면 아래 결과를 얻습니다.

$$\tilde{E}_{0i} + \tilde{E}_{0r} = \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i} \tilde{E}_{0t} \equiv \alpha$$

$$\tilde{E}_{0i} - \tilde{E}_{0r} = \beta \tilde{E}_{0t}$$

$$\tilde{E}_{0i} + \tilde{E}_{0r} = \alpha \tilde{E}_{0t}$$

$$\tilde{E}_{0r} = \left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \right) \tilde{E}_{0i}$$

$$\tilde{E}_{0t} = \left(\frac{2}{\alpha + \beta} \right) \tilde{E}_{0i}$$

따라서 두 방정식을 풀어서, 진폭 사이의 두 관계식을 얻습니다.

이것을 **프레넬 방정식** Fresnel's equation이라고 합니다.

이 방정식은 편광 방향이 입사면과 평행인 경우에 성립합니다.

흥미롭게도, 반사파의 진폭은 $\alpha = \beta$ 일 때 0이 됩니다.

흥미롭게도, 반사파의 진폭은 $\alpha = \beta$ 일 때 0이 됩니다.

$$\alpha = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \theta_t}}{\cos \theta_i} = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2 \theta_i}}{\cos \theta_i} = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2 \theta_i}}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta_i}}$$

흥미롭게도, 반사파의 진폭은 $\alpha = \beta$ 일 때 0이 됩니다.

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \theta_t}}{\cos \theta_i} = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2 \theta_i}}{\cos \theta_i} = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2 \theta_i}}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta_i}} \\ &= \beta = \frac{\mu_1 n_2}{\mu_2 n_1}\end{aligned}$$

흥미롭게도, 반사파의 진폭은 $\alpha = \beta$ 일 때 0이 됩니다.

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \theta_t}}{\cos \theta_i} = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2 \theta_i}}{\cos \theta_i} = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2 \theta_i}}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta_i}} \\ &= \beta = \frac{\mu_1 n_2}{\mu_2 n_1}\end{aligned}$$

따라서 다음 결과를 얻습니다.

$$\sin^2 \theta_i = \frac{1 - \beta^2}{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 - \beta^2}$$

흥미롭게도, 반사파의 진폭은 $\alpha = \beta$ 일 때 0이 됩니다.

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \theta_t}}{\cos \theta_i} = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2 \theta_i}}{\cos \theta_i} = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2 \theta_i}}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta_i}} \\ &= \beta = \frac{\mu_1 n_2}{\mu_2 n_1}\end{aligned}$$

$\mu_1 \simeq \mu_2$ 인 경우, 아래와 같이 근사됩니다.

$$\sin^2 \theta_i \simeq \frac{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}{1 + \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}$$

흥미롭게도, 반사파의 진폭은 $\alpha = \beta$ 일 때 0이 됩니다.

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \theta_t}}{\cos \theta_i} = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2 \theta_i}}{\cos \theta_i} = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2 \theta_i}}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta_i}} \\ &= \beta = \frac{\mu_1 n_2}{\mu_2 n_1}\end{aligned}$$

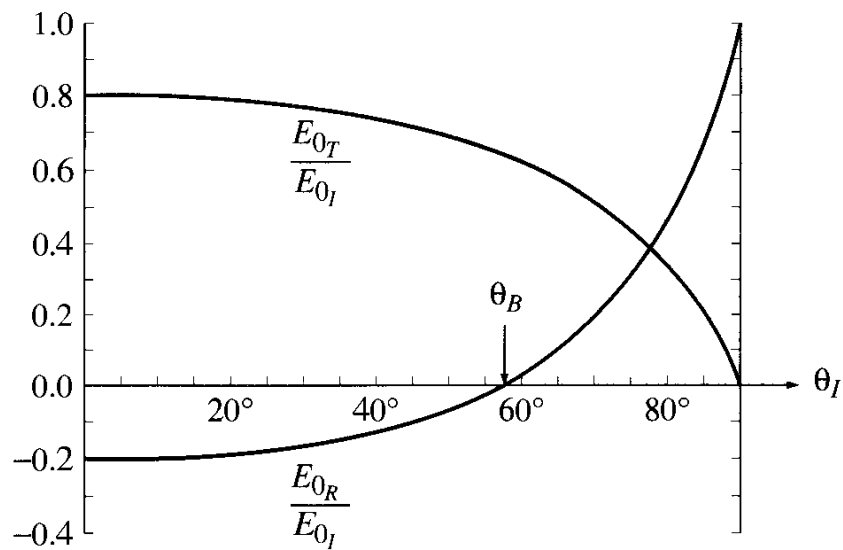
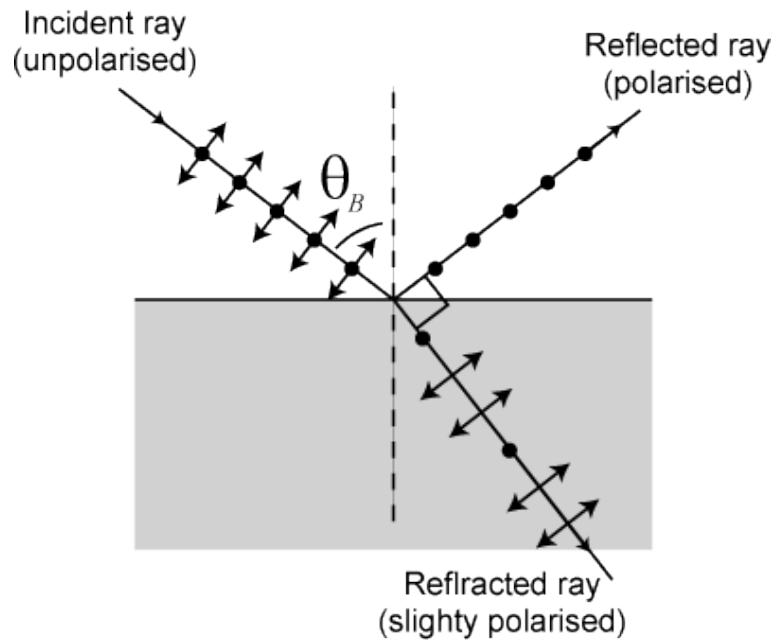
$\mu_1 \simeq \mu_2$ 인 경우, 아래와 같이 근사됩니다.

$$\sin^2 \theta_i \simeq \frac{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}{1 + \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}$$

또는 이 식은 오른쪽과 같이 표현됩니다.

이 각도를 브루스터 각Brewster's angle이라고 합니다.

$$\tan \theta_i \simeq \frac{n_2}{n_1}$$



또는 이 식은 오른쪽과 같이 표현됩니다.

이 각도를 **브루스터 각** Brewster's angle이라고 합니다.

$$\tan \theta_i \simeq \frac{n_2}{n_1}$$

$$I_i = \frac{1}{2} \epsilon_1 \nu_1 E_{0i}^2 \cos \theta_i$$
$$I_r = \frac{1}{2} \epsilon_1 \nu_1 E_{0r}^2 \cos \theta_r$$
$$I_t = \frac{1}{2} \epsilon_2 \nu_2 E_{0t}^2 \cos \theta_t$$

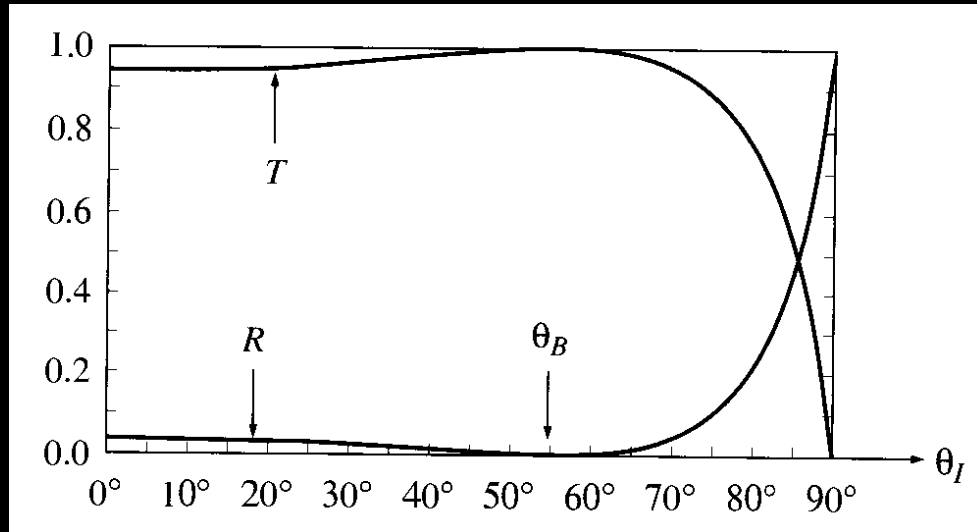
입사, 반사 및 투과 세기에 대해 위와 같은 관계를 적을 수 있습니다.

$$\mathcal{R} \equiv \frac{I_r}{I_i} = \left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \right)^2$$

$$\mathcal{T} \equiv \frac{I_t}{I_i} = \frac{\epsilon_2 \nu_2}{\epsilon_1 \nu_1} \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)^2 \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i} = \alpha \beta \left(\frac{2}{\alpha + \beta} \right)^2$$

$$\mathcal{R} + \mathcal{T} = 1$$

이것으로부터 **반사율**과 **투과율**을 구할 수 있습니다.
 또한 반사율과 투과율의 합이 항상 1이 된다는 것을
 다시 한 번 확인할 수 있습니다.



이것으로부터 반사율과 투과율을 구할 수 있습니다.
또한 반사율과 투과율의 합이 항상 1이 된다는 것을
다시 한 번 확인할 수 있습니다.

지금까지는 매질이 유전체라고 가정하였습니다.
그러나 도체의 경우에는
자유 전하와 자유 전류가 존재할 수 있습니다.
이 때는 전자기파가 다르게 반응하게 됩니다.

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_f}{\epsilon}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu\sigma\vec{E} + \mu\epsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

도체 내부에서 **옴의 법칙** $\vec{J}_f = \sigma\vec{E}$ 이 성립한다고 할 때,
맥스웰 방정식은 위와 같습니다.

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_f}{\epsilon}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu\sigma\vec{E} + \mu\epsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{J}_f = -\frac{\partial \rho_f}{\partial t}$$

그리고 연속 방정식을 적으면 위와 같습니다.

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_f}{\epsilon}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu\sigma\vec{E} + \mu\epsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{J}_f = -\frac{\partial \rho_f}{\partial t}$$

$$= \sigma(\nabla \cdot \vec{E}) = \frac{\sigma}{\epsilon}\rho_f$$

옴의 법칙과 첫 번째 맥스웰 방정식을 적용하면
위와 같은 관계를 얻습니다.

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_f}{\epsilon}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu\sigma\vec{E} + \mu\epsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{J}_f &= -\frac{\partial \rho_f}{\partial t} \\ &= \sigma(\nabla \cdot \vec{E}) = \frac{\sigma}{\epsilon}\rho_f\end{aligned}$$

따라서 연속 방정식으로부터
자유 전하 밀도에 대한 관계식을 얻게 됩니다.

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_f}{\epsilon}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu\sigma\vec{E} + \mu\epsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{J}_f &= -\frac{\partial \rho_f}{\partial t} \\ &= \sigma(\nabla \cdot \vec{E}) = \frac{\sigma}{\epsilon}\rho_f\end{aligned}$$

이 방정식을 풀면 다음과 같은 답을 얻습니다.

$$\rho_f(t) = \rho_f(0)e^{-\left(\frac{\sigma}{\epsilon}\right)t}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_f}{\epsilon}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu\sigma\vec{E} + \mu\epsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{J}_f &= -\frac{\partial \rho_f}{\partial t} \\ &= \sigma(\nabla \cdot \vec{E}) = \frac{\sigma}{\epsilon}\rho_f\end{aligned}$$

따라서 고유 시간 $\tau \equiv \frac{\epsilon}{\sigma}$ 만큼 지난 뒤에
초기 자유 전하 밀도가 흩어지게 됩니다.

$$\rho_f(t) = \rho_f(0)e^{-\left(\frac{\sigma}{\epsilon}\right)t}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu\sigma\vec{E} + \mu\epsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

초기 자유 전하가 흩어진 뒤에는 위와 같은 방정식을 얻게 됩니다.

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu\sigma\vec{E} + \mu\epsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu\epsilon\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \mu\sigma\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\nabla^2 \vec{B} = \mu\epsilon\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} + \mu\sigma\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

이 방정식들로부터 다음과 같은 파동 방정식을 유도할 수 있습니다.
 이 두 방정식은 파동 방정식이지만,
 시간 미분에 비례하는 감쇠항이 존재합니다.

$$\vec{\tilde{E}}(z, t) = \vec{\tilde{E}}_0 e^{i(\tilde{k}z - \omega t)}$$

$$\vec{\tilde{B}}(z, t) = \vec{\tilde{B}}_0 e^{i(\tilde{k}z - \omega t)}$$

이 파동 방정식의 일반적인 해는 위와 같이 표현됩니다.

$$\vec{\tilde{E}}(z, t) = \vec{\tilde{E}}_0 e^{i(\tilde{k}z - \omega t)}$$

$$\vec{\tilde{B}}(z, t) = \vec{\tilde{B}}_0 e^{i(\tilde{k}z - \omega t)}$$

$$\tilde{k}^2 = \mu\epsilon\omega^2 + i\mu\sigma\omega$$

이 파동 방정식의 일반적인 해는 위와 같이 표현됩니다.
단, 파수가 복소수가 된다는 점이 다른 점입니다.

$$\vec{\tilde{E}}(z, t) = \vec{\tilde{E}}_0 e^{i(\tilde{k}z - \omega t)}$$

$$\vec{\tilde{B}}(z, t) = \vec{\tilde{B}}_0 e^{i(\tilde{k}z - \omega t)}$$

$$\tilde{k}^2 = \mu\epsilon\omega^2 + i\mu\sigma\omega$$

$$\tilde{k} = k + i\kappa$$

$$k \equiv \omega \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2}} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2} + 1 \right)^{1/2} \quad \kappa \equiv \omega \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2}} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2} - 1 \right)^{1/2}$$

파수를 실수부와 허수부로 나누어 적으면 위와 같습니다.

$$\vec{\tilde{E}}(z, t) = \vec{\tilde{E}}_0 e^{-\kappa z} e^{i(kz - \omega t)}$$

$$\vec{\tilde{B}}(z, t) = \vec{\tilde{B}}_0 e^{-\kappa z} e^{i(kz - \omega t)}$$

$$\tilde{k}^2 = \mu\epsilon\omega^2 + i\mu\sigma\omega$$

$$\tilde{k} = k + i\kappa$$

$$k \equiv \omega \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2}} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2} + 1 \right)^{1/2} \quad \kappa \equiv \omega \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2}} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2} - 1 \right)^{1/2}$$

파수를 실수부와 허수부로 나누어 적으면 위와 같습니다.
따라서 전기장과 자기장도 다시 적을 수 있습니다.

$$\vec{\tilde{E}}(z, t) = \vec{\tilde{E}}_0 e^{-\kappa z} e^{i(kz - \omega t)}$$

$$\vec{\tilde{B}}(z, t) = \vec{\tilde{B}}_0 e^{-\kappa z} e^{i(kz - \omega t)}$$

$$\tilde{k}^2 = \mu\epsilon\omega^2 + i\mu\sigma\omega$$

$$\tilde{k} = k + i\kappa$$

$$k \equiv \omega \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2}} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2} + 1 \right)^{1/2} \quad \kappa \equiv \omega \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2}} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2} - 1 \right)^{1/2}$$

따라서 도체의 일부에 전자기파가 침투하지만, 곧 사라지게 됩니다.

여기에서 $d \equiv \frac{1}{\kappa}$ 를 침투 깊이 skin depth라고 합니다.

$$\vec{\tilde{E}}_0 = \tilde{E}_0 \hat{x} \quad \rightarrow \quad \vec{\tilde{B}}_0 = \frac{\tilde{k}}{\omega} \tilde{E}_0 \hat{y}$$

맥스웰 방정식으로 전기장과 자기장의 조건을
좀 더 자세히 살펴보면
위의 관계를 얻게 됩니다.

$$\begin{aligned}\vec{\tilde{E}}_0 = \tilde{E}_0 \hat{x} &\rightarrow \vec{\tilde{B}}_0 = \frac{\tilde{k}}{\omega} \tilde{E}_0 \hat{y} \\ &= \frac{|\tilde{k}|}{\omega} \tilde{E}_0 e^{i\phi} \hat{y}\end{aligned}$$

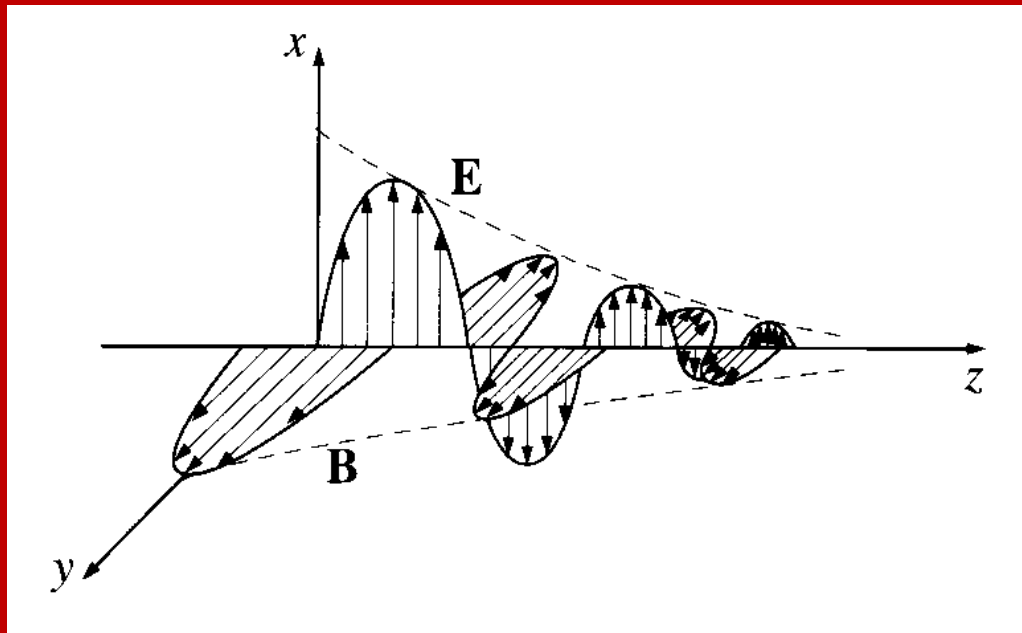
파수가 복소수이므로, 자기장 벡터는 **추가적인 위상**을 얻게 됩니다.

$$\begin{aligned}\vec{\tilde{E}}_0 = \tilde{E}_0 \hat{x} &\rightarrow \vec{\tilde{B}}_0 = \frac{\tilde{k}}{\omega} \tilde{E}_0 \hat{y} \\ &= \frac{|\tilde{k}|}{\omega} \tilde{E}_0 e^{i\phi} \hat{y}\end{aligned}$$

$$\vec{E}(z, t) = E_0 e^{-\kappa z} \cos(kz - \omega t + \delta_E) \hat{x}$$

$$\vec{B}(z, t) = B_0 e^{-\kappa z} \cos(kz - \omega t + \delta_E + \phi) \hat{y}$$

이것은 전기장과 자기장 사이에
위상 차이가 생긴다는 것을 의미합니다.



이것은 전기장과 자기장 사이에
위상 차이가 생긴다는 것을 의미합니다.

도체 표면에서의 반사 현상을 기술하기 위해서는 다음 경계 조건이 필요합니다.

$$\epsilon_1 E_1^\perp - \epsilon_2 E_2^\perp = \sigma_f$$

$$E_1^\parallel - E_2^\parallel = 0$$

$$B_1^\perp - B_2^\perp = 0$$

$$\frac{1}{\mu_1} B_1^\parallel - \frac{1}{\mu_2} B_2^\parallel = K_f \times \hat{n}$$

도체 표면에서의 반사 현상을 기술하기 위해서는 다음 경계 조건이 필요합니다.

$$\epsilon_1 E_1^\perp - \epsilon_2 E_2^\perp = \sigma_f$$

$$E_1^\parallel - E_2^\parallel = 0$$

$$B_1^\perp - B_2^\perp = 0$$

$$\frac{1}{\mu_1} B_1^\parallel - \frac{1}{\mu_2} B_2^\parallel = K_f \times \hat{n}$$

입사, 반사 및 투과파를 적어봅시다.

$$\tilde{E}_i = \tilde{E}_{0i} e^{i(k_1 z - \omega t)} \hat{x}$$

$$\tilde{B}_i = \frac{\tilde{E}_{0i}}{v_1} e^{i(k_1 z - \omega t)} \hat{y}$$

$$\tilde{E}_r = \tilde{E}_{0r} e^{i(-k_1 z - \omega t)} \hat{x}$$

$$\tilde{B}_r = \frac{\tilde{E}_{0r}}{v_1} e^{i(-k_1 z - \omega t)} (-\hat{y})$$

$$\tilde{E}_t = \tilde{E}_{0t} e^{i(\tilde{k}_2 z - \omega t)} \hat{x}$$

$$\tilde{B}_t = \frac{\tilde{k}_2 \tilde{E}_{0t}}{\omega} e^{i(\tilde{k}_2 z - \omega t)} \hat{y}$$

$\tilde{k}_2$ 가 복소수라는 것을 제외하면, 앞에서 구한 결과와 동일합니다.

$$\tilde{\beta} \equiv \frac{\mu_1 v_1}{\mu_2 \omega} \tilde{k}_2$$

$$\tilde{E}_{0r} = \left(\frac{1 - \tilde{\beta}}{1 + \tilde{\beta}} \right) \tilde{E}_{0i}$$

$$\tilde{E}_{0t} = \left(\frac{2}{1 + \tilde{\beta}} \right) \tilde{E}_{0i}$$

$\tilde{k}_2$ 가 복소수라는 것을 제외하면, 앞에서 구한 결과와 동일합니다.

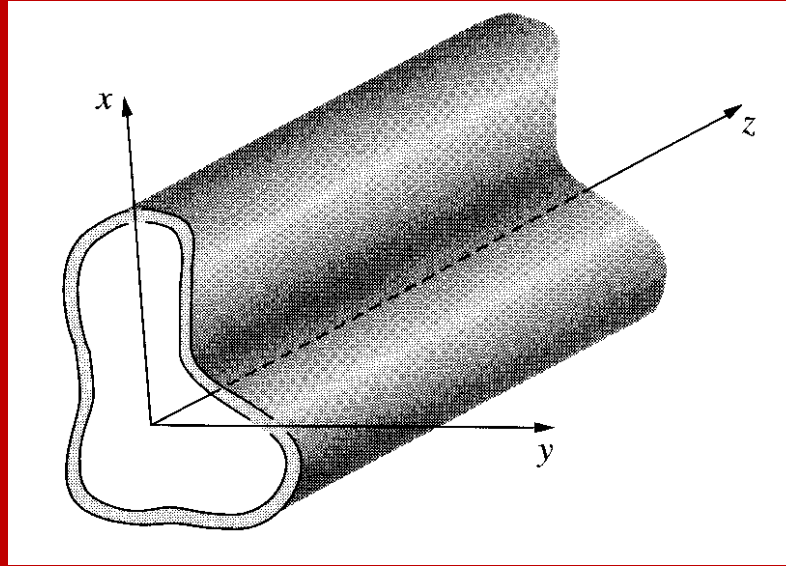
$$\tilde{\beta} \equiv \frac{\mu_1 v_1}{\mu_2 \omega} \tilde{k}_2$$

$$\tilde{E}_{0r} = \left(\frac{1 - \tilde{\beta}}{1 + \tilde{\beta}} \right) \tilde{E}_{0i}$$

$$\tilde{E}_{0t} = \left(\frac{2}{1 + \tilde{\beta}} \right) \tilde{E}_{0i}$$

$\sigma \rightarrow \infty$ (완전 도체)이면, $\tilde{E}_{0r} = -\tilde{E}_{0i}$ 및 $\tilde{E}_{0t} = 0$ 이 됩니다.

즉, 이것은 완전 도체가 좋은 거울이 된다는 뜻이 됩니다.



이제 마지막으로 유한한 공간에
전자기파가 갇힌 경우를 생각해 봅시다.
경계면은 완전 도체라고 가정합시다.
이것을 **도파관** wave guide 이라고 합니다.

$$\vec{\tilde{E}} = \vec{\tilde{E}}_0(x, y)e^{i(kz - \omega t)}$$

$$\vec{\tilde{B}} = \vec{\tilde{B}}_0(x, y)e^{i(kz - \omega t)}$$

이 경우, $\vec{\tilde{E}}_0$ 및 $\vec{\tilde{B}}_0$ 부분은 xy -단면의 분포를 나타내고,
지수 함수 부분은 z -방향으로의 전파를 나타냅니다.

$$\vec{\tilde{E}} = \vec{\tilde{E}}_0(x, y)e^{i(kz - \omega t)}$$

$$\vec{\tilde{B}} = \vec{\tilde{B}}_0(x, y)e^{i(kz - \omega t)}$$

$$\vec{\tilde{E}}_0(x, y) = E_x\hat{x} + E_y\hat{y} + E_z\hat{z}$$

$$\vec{\tilde{B}}_0(x, y) = B_x\hat{x} + B_y\hat{y} + B_z\hat{z}$$

xy -단면에서 경계 조건을 만족시키기 위해서는
진행 방향에 수직인 성분 뿐만 아니라
진행 방향과 같은 성분도 존재해야 합니다.

$$\vec{\tilde{E}} = \vec{\tilde{E}}_0(x, y)e^{i(kz - \omega t)}$$

$$\vec{\tilde{B}} = \vec{\tilde{B}}_0(x, y)e^{i(kz - \omega t)}$$

$$\vec{\tilde{E}}_0(x, y) = E_x\hat{x} + E_y\hat{y} + E_z\hat{z}$$

$$\vec{\tilde{B}}_0(x, y) = B_x\hat{x} + B_y\hat{y} + B_z\hat{z}$$

$E_z = 0$ 인 경우를 TE transverse electric 라고 하고,
 $B_z = 0$ 인 경우를 TM transverse magnetic 이라고 합니다.
 $E_z = B_z = 0$ 인 경우는 TEM이라고 합니다.

$$\vec{\tilde{E}} = \vec{\tilde{E}}_0(x, y)e^{i(kz - \omega t)}$$

$$\vec{\tilde{B}} = \vec{\tilde{B}}_0(x, y)e^{i(kz - \omega t)}$$

$$\vec{\tilde{E}}_0(x, y) = E_x\hat{x} + E_y\hat{y} + E_z\hat{z}$$

$$\vec{\tilde{B}}_0(x, y) = B_x\hat{x} + B_y\hat{y} + B_z\hat{z}$$

이 경우, 일반적으로 불연속적인 진동수만 허용됩니다.
 그리고 일정 진동수보다 진동수가 낮아지면,
 그 진동수의 효과는 지수함수적으로 감쇠합니다.
 이것을 차단 진동수라고 합니다.

감사합니다