

제10장

전위와 전자기장

이번 장에서 우리는 전위potential에 대해서
자세히 살펴볼 것입니다.

물론 우리는 이미 정전기학과 정자기학에서
스칼라 전위 V 와 벡터 전위 $\vec{A}$ 에 대해서 살펴본 바 있습니다.

먼저 전기역학의 경우
정전기학과 정자기학에서 정의한 전위의 개념이
어떻게 확장되어야 하는지 살펴보아야 하겠습니다.

더 나아가서 전위는 전자기학을
좀 더 수준 높은 이론적 견지에서 조망할 수 있도록 합니다.

그리고 때로는 전위로부터 출발해서 기술하는 것이
전기장과 자기장을 직접 기술하는 것보다
이론적으로 편리한 경우도 있습니다.

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

다음과 같은 네 개의 맥스웰 방정식에서 출발합시다.
여기에서 전위는 $\nabla \cdot$ 또는 $\nabla \times$ 가 0이 되는 경우에
도입할 수 있습니다.

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

먼저 자기장에 대한 가우스 법칙으로부터,
다음과 같은 벡터 퍼텐셜을 도입할 수 있게 됩니다.

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \qquad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

그러면 패러데이 법칙은 위와 같이 고쳐 쓸 수 있습니다.
따라서 다음과 같이 스칼라 퍼텐셜을 정의할 수 있습니다.

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla V$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

따라서 전기장과 자기장은 일반적으로
다음과 같이 적을 수 있습니다.

$$\vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

이러한 전기장과 자기장의 정의로부터
필연적으로 두 개의 방정식이 만족한다는 것은
확인할 수 있습니다.

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

그러면 나머지 두 방정식을 전위로 표현하면 어떻게 될까요?

$$\nabla \cdot \vec{E} = -\nabla^2 V - \frac{\partial(\nabla \cdot \vec{A})}{\partial t} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

먼저 전기장의 발산에 대한 방정식은 다음과 같습니다.

$$\nabla \cdot \vec{E} = -\nabla^2 V - \frac{\partial(\nabla \cdot \vec{A})}{\partial t} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{B} &= \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \\ &= \mu_0 \vec{J} - \mu_0 \epsilon_0 \nabla \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right) - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}\end{aligned}$$

자기장의 회전에 대한 방정식은 다음과 같습니다.

$$\nabla^2 V + \frac{\partial(\nabla \cdot \vec{A})}{\partial t} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\left(\nabla^2 \vec{A} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \right) - \nabla \left(\nabla \cdot \vec{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial V}{\partial t} \right) = -\mu_0 \vec{J}$$

이 둘을 정리하면 다음과 같은 방정식을 얻습니다.

$$\nabla^2 V + \frac{\partial(\nabla \cdot \vec{A})}{\partial t} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\left(\nabla^2 \vec{A} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \right) - \nabla \left(\nabla \cdot \vec{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial V}{\partial t} \right) = -\mu_0 \vec{J}$$

우리는 이렇게 두 전위에 대한 결합된 미분 방정식을 얻습니다.
 이 두 방정식의 특징은 이 방정식들을
 우리가 풀 수 없다는 것에 있습니다.
 이것이 무슨 뜻일까요?

우리가 앞의 방정식들을 풀 수 없는 이유는
이 방정식이 결정할 수 없는 자유도를 허용하기 때문입니다.
자유도가 있기 때문에 방정식을 유일하게 결정할 수 없고,
따라서 방정식을 풀 수 없게 되는 것입니다.

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\lambda$$

$$V' = V - \frac{\partial\lambda}{\partial t}$$

벡터 퍼텐셜 $\vec{A}$ 와 스칼라 퍼텐셜 V 에 대해
임의의 스칼라 함수 λ 를 사용해
새로운 벡터 퍼텐셜과 스칼라 퍼텐셜을 정의해 봅시다.

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\lambda$$

$$V' = V - \frac{\partial\lambda}{\partial t}$$

먼저 $\nabla \times \vec{A}' = \nabla \times \vec{A}$ 이므로,
이러한 새로운 정의에 대해
자기장은 변하지 않음을 알 수 있습니다.

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\lambda$$

$$V' = V - \frac{\partial\lambda}{\partial t}$$

마찬가지로 다음 관계식을 살펴봅시다.

$$-\nabla V' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = -\nabla V + \frac{\partial(\nabla\lambda)}{\partial t} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{\partial(\nabla\lambda)}{\partial t}$$

따라서 **전기장**도 변하지 않음을 알 수 있습니다.

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\lambda$$

$$V' = V - \frac{\partial\lambda}{\partial t}$$

즉, 이러한 변환에 대해 물리적으로 측정 가능한 로렌츠 힘 법칙은
변하지 않는다는 것을 알 수 있습니다.
이렇게 물리적으로 영향을 주지 않는 자유도를
게이지gauge라고 합니다.

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\lambda$$

$$V' = V - \frac{\partial\lambda}{\partial t}$$

이 때, 우리는 전기장과 자기장이
게이지 변환gauge transformation에 대해
게이지 대칭성gauge symmetry을 가진다고 합니다.

$$\nabla^2 V + \frac{\partial(\nabla \cdot \vec{A})}{\partial t} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\left(\nabla^2 \vec{A} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \right) - \nabla \left(\nabla \cdot \vec{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial V}{\partial t} \right) = -\mu_0 \vec{J}$$

벡터 퍼텐셜과 스칼라 퍼텐셜을 결정하기 위해서는
어떤 종류의 게이지를 선택gauge fixing해야 합니다.

$$\nabla^2 V + \frac{\partial(\nabla \cdot \vec{A})}{\partial t} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\left(\nabla^2 \vec{A} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \right) - \nabla \left(\nabla \cdot \vec{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial V}{\partial t} \right) = -\mu_0 \vec{J}$$

첫 번째 잘 알려진 게이지는 **쿨롱 게이지**라고 합니다.

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0$$

이 때, 첫 번째 방정식은 풀기 쉬워지지만
두 번째 방정식은 풀기 어려워진다는 단점이 있습니다.

$$\left(\nabla^2 V - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \right) + \frac{\partial \left(\nabla \cdot \vec{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial V}{\partial t} \right)}{\partial t} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\left(\nabla^2 \vec{A} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \right) - \nabla \left(\nabla \cdot \vec{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial V}{\partial t} \right) = -\mu_0 \vec{J}$$

또 다른 유명한 게이지로 로렌츠 게이지라는 것이 있습니다.

$$\nabla \cdot \vec{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

그러면 두 방정식이 모두 대칭적이며, 빛의 속도로 전파됩니다.

고전 전자기학에서는 게이지 선택이
전기장과 자기장을 바꾸지 않습니다.

따라서 실제로 물리적으로 측정 가능한 효과,
즉 로렌츠 힘 법칙에 의해 나타나는 효과는
게이지 선택과는 무관하게 됩니다.

그러나 양자역학(양자장이론)을 고려하면
게이지 선택이 양자역학의 정합성을
위반하지는 않는지에 대한 확인이 필요하게 됩니다.



양자색역학quantum chromodynamics에서는
쿼크에 $SU(3)$ 게이지 대칭을 부여합니다.
이것은 강력strong interaction을 설명합니다.

The Nobel Prize in Physics 1979



Sheldon Lee
Glashow

Prize share: 1/3



Abdus Salam

Prize share: 1/3



Steven Weinberg

Prize share: 1/3

The Nobel Prize in Physics 1979 was awarded jointly to Sheldon Lee Glashow, Abdus Salam and Steven Weinberg *"for their contributions to the theory of the unified weak and electromagnetic interaction between elementary particles, including, inter alia, the prediction of the weak neutral current"*.

Photos: Copyright © The Nobel Foundation

와인버그-살람 모형 Weinberg-Salam model에서는
페르미온에 $SU(2) \times U(1)$ 게이지 대칭을 부여합니다.
이것은 약력과 전자기력 electro-weak interaction을 설명합니다.

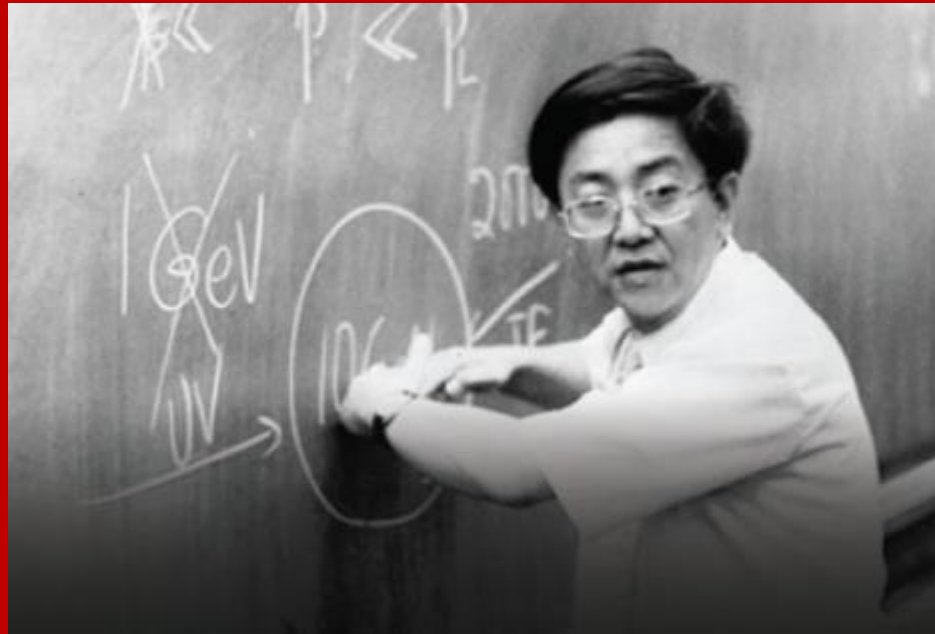
입자물리학의 표준 모형standard model은
 $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ 게이지 대칭을 통해
강력과 전자기약력을 포함합니다.

여기에서 전자기약력 부분은
힉스 메커니즘Higgs mechanism에 의해
약력과 전자기력으로 나뉘게 됩니다.
그러나 아직까지 여기에는
강력과 전자기약력이 통일되어 있지는 않습니다.

표준 모형의 강력과 전자기약력을
통일시키는 게이지 이론을 구성하는 것을
대통일 이론grand unification theory이라고 부릅니다.

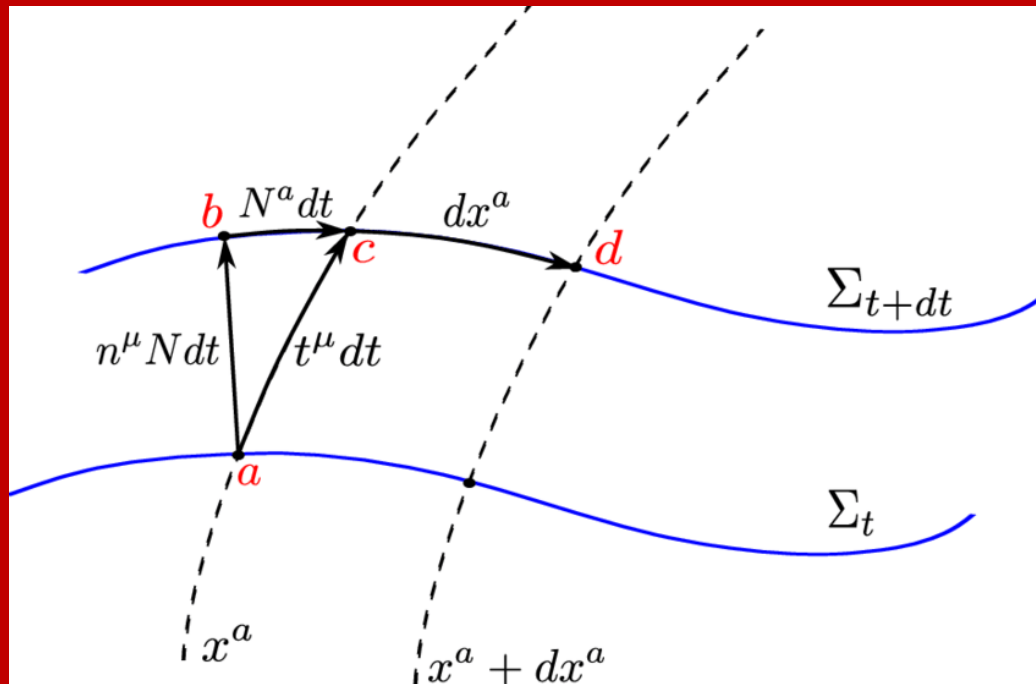
초대칭supersymmetry이 있다면
이 이론은 좀 더 성공적일 수 있습니다.
그러나 아직 여기에 대한 실험적 증거는
알려지지 않고 있습니다.

이러한 게이지 장론들이 양자역학적으로 잘 작동하는지,
즉 표준 모형을 구성하고
여기에 게이지 선택을 했을 때,
여전히 양자역학적으로 확률을 계산할 수 있는지,
즉 재규격화(renormalization)가 가능한지에 대해서
이론적인 확인이 필요합니다.



한국계 물리학자였던 이휘소 박사 Benjamin W. Lee가 이 부분에 결정적인 역할을 했습니다.

이를 통해 수 많은 모형들에서 계산이 가능하게 되었고, 이론과 실험의 비교를 통해 많은 노벨상이 배출되게 되었습니다.



중력은 게이지 이론은 아니지만
 시공간을 구성하는 자유도가 존재합니다.
 이러한 자유도가 양자중력이론을 만들기 어렵게 하는
 한 가지 이유이기도 합니다.

$$m\ddot{\vec{r}} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

다시 돌아와서, 전위의 관점에서
로렌츠 힘 법칙을 다시 살펴봅시다.

$$m\ddot{\vec{r}} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

$$= q \left(-\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \times (\nabla \times \vec{A}) \right)$$

여기에 앞에서 살펴본 전위를 대입해 봅시다.

$$\vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$m\ddot{\vec{r}} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

$$= q \left(-\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \times (\nabla \times \vec{A}) \right)$$

$$= \nabla(\vec{v} \cdot \vec{A}) - (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{A}$$

$$m\ddot{\vec{r}} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

$$= q \left(-\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \times (\nabla \times \vec{A}) \right)$$

$$= \nabla(\vec{v} \cdot \vec{A}) - (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{A}$$

$$= q \left(-\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \nabla(\vec{v} \cdot \vec{A}) - (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{A} \right)$$

$$m\ddot{\vec{r}} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

$$= q \left(-\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \times (\nabla \times \vec{A}) \right)$$

$$= \nabla(\vec{v} \cdot \vec{A}) - (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{A}$$

$$= q \left(-\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \nabla(\vec{v} \cdot \vec{A}) - (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{A} \right)$$

$$= q \left(-\nabla(V - \vec{v} \cdot \vec{A}) - \frac{d\vec{A}}{dt} \right)$$

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 + q(\vec{v} \cdot \vec{A}) - qV$$

따라서 로렌츠 힘 법칙은 위의 라그랑지안으로부터 유도할 수 있습니다.

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 + q(\vec{v} \cdot \vec{A}) - qV$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} - \frac{\partial L}{\partial r_i} = 0$$

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 + q(\vec{v} \cdot \vec{A}) - qV$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} - \frac{\partial L}{\partial r_i} = 0$$

$$= \frac{d}{dt} (m\dot{r}_i + qA_i) - q\vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial r_i} + q \frac{\partial V}{\partial r_i}$$

$$\rightarrow m\ddot{\vec{r}} + q \frac{d\vec{A}}{dt} - q\nabla(\vec{v} \cdot \vec{A}) + q\nabla V = 0$$

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 + q(\vec{v} \cdot \vec{A}) - qV$$

한편, 이 라그랑지안으로부터 해밀토니안도 유도할 수 있습니다.

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 + q(\vec{v} \cdot \vec{A}) - qV$$

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} = m\dot{r}_i + qA_i$$

$$\vec{p} = m\dot{\vec{r}} + q\vec{A} \quad \text{정준 운동량}$$

한편, 이 라그랑지안으로부터 해밀토니안도 유도할 수 있습니다.

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 + q(\vec{v} \cdot \vec{A}) - qV$$

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} = m \dot{r}_i + q A_i$$

$$\vec{p} = m \dot{\vec{r}} + q \vec{A} \quad \text{정준 운동량}$$

$$H = \sum_i p_i \dot{r}_i - L = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 + qV$$

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 + q(\vec{v} \cdot \vec{A}) - qV$$

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} = m \dot{r}_i + q A_i$$

$$\vec{p} = m \dot{\vec{r}} + q \vec{A} \quad \text{정준 운동량}$$

$$\begin{aligned} H &= \sum_i p_i \dot{r}_i - L = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 + qV \\ &= \frac{1}{2m} (\vec{p} - q \vec{A})^2 + qV \end{aligned}$$

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 + q(\vec{v} \cdot \vec{A}) - qV$$

$$H = \frac{1}{2m}(\vec{p} - q\vec{A})^2 + qV$$

이 해밀토니안은 양자역학에서
아하라노프-봄 효과Aharanov-Bohm effect를 다룰 때
다시 등장하게 될 것입니다.

이제 전위를 사용하면
원천이 동적인 경우에도
좀 더 일반적인 기술을 할 수 있게 됩니다.

원천이 동적인 경우,
전기장과 자기장을 직접 구하는 것은
쉽지 않습니다.
동적인 경우 원천과 장을 연결하는 방정식은
우리가 지금까지 다루어 본 적이 없는
방정식이 되기 때문입니다.

$$\left(\nabla^2 V - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \right) + \frac{\partial \left(\nabla \cdot \vec{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial V}{\partial t} \right)}{\partial t} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\left(\nabla^2 \vec{A} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \right) - \nabla \left(\nabla \cdot \vec{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial V}{\partial t} \right) = -\mu_0 \vec{J}$$

그러나 로렌츠 게이지를 적용한 전위의 방정식은
여전히 우리에게 익숙한 형태입니다.
따라서 시간 의존성을 적용하는 것이 좀 더 쉬워집니다.

동적인 원천이 만들어내는 전위에 대해
연속 분포의 경우와 점 전하의 경우로
나누어 살펴봅시다.

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

먼저 연속 분포의 경우,
원천이 시간에 의존하지 않는다면
전위는 위와 같이 표현됩니다.

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

미분 방정식이 크게 바뀌지 않았다는 점을 고려한다면,
원천의 시간 의존성은 위의 식을 어떻게 바꾸게 될까요?

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

물론 확실한 것은 우리가 방정식에 대입을 해 봐야만 알 수 있지만
 한 가지 추정할 수 있는 것은
 원천에 시간 의존성이 생기면
 원천 적분을 할 때 **인과율**을 고려해 주어야 한다는 것입니다.

$$V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

만일 우리가 위와 같이 원천 적분을 적어주면,
 어떤 특정한 시간에서의 원천 분포를
 전위가 **즉시** 인식한다는 것을 의미하게 됩니다.
 이것은 인과율과 충돌하게 됩니다.

$$V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

오직 원천의 변화가 관찰점에 도달한 이후의 것 만을
전위가 적분을 통해 인식할 수 있습니다.
따라서 원천 적분에 나타나는 시간은 관찰하는 시간보다
과거의 것이어야 합니다.

$$V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

여기에서 원천 적분에 나타나는 시간을
지연 시간retarded time이라고 합니다.

$$t_r \equiv t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}$$

$$V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

지연 시간이란 원천의 변화가 관찰점까지 신호를 보내는데 걸린 시간 차이와 관련됩니다. 즉, $c(t - t_r) = |\vec{r} - \vec{r}'|$ 가 됩니다.

$$t_r \equiv t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}$$

$$V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

이렇게 지연 시간으로 표현한 전위를
지연 전위retarded potential라고 합니다.

그렇다면 이 자연 전위는
우리가 풀고자 하는 방정식을 만족시킬까요?

그리고 이것으로부터 비롯되는 전기장과 자기장은
어떤 형태를 가지게 될까요?

$$\nabla V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left((\nabla\rho) \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \rho \nabla \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \right) dV'$$

먼저 스칼라 퍼텐셜의 방정식을 확인해 봅시다.
먼저 지연 전위에 ∇ 연산을 적용하면 위와 같이 됩니다.

$$\nabla V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left((\nabla\rho) \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \rho \nabla \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \right) dV'$$

지연 시간이 $\vec{r}$ 에 의존하므로
미분이 0이 되지 않습니다.

$$= - \frac{\widehat{(\vec{r} - \vec{r}')}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2}$$

$$\nabla V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left((\nabla\rho) \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \rho \nabla \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \right) dV'$$

지연 시간이 $\vec{r}$ 에 의존하므로
미분이 0이 되지 않습니다.

$$= - \frac{(\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2}$$

$$\nabla\rho = \dot{\rho}\nabla t_r = -\frac{\dot{\rho}}{c}\nabla|\vec{r} - \vec{r}'| = -\frac{\dot{\rho}}{c}(\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})$$

$$\nabla V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left((\nabla\rho) \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \rho \nabla \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \right) dV'$$

지연 시간이 $\vec{r}$ 에 의존하므로
미분이 0이 되지 않습니다.

$$= -\frac{\widehat{(\vec{r} - \vec{r}')}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2}$$

$$\nabla\rho = \dot{\rho}\nabla t_r = -\frac{\dot{\rho}}{c}\nabla|\vec{r} - \vec{r}'| = -\frac{\dot{\rho}}{c}\widehat{(\vec{r} - \vec{r}')}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left(-\frac{\dot{\rho}}{c} \frac{\widehat{(\vec{r} - \vec{r}')}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \rho \frac{\widehat{(\vec{r} - \vec{r}')}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right) dV'$$

$$\nabla^2 V = \nabla \cdot \nabla V$$

이제 라플라시안을 적어 봅시다.

$$\nabla^2 V = \nabla \cdot \nabla V$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left(-\frac{(\nabla\dot{\rho}) \cdot \widehat{(\vec{r} - \vec{r}')}}{c|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{\dot{\rho}}{c} \nabla \cdot \left(\frac{\widehat{(\vec{r} - \vec{r}')}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) - \frac{\widehat{(\vec{r} - \vec{r}')}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \cdot (\nabla\rho) - \rho \nabla \cdot \left(\frac{\widehat{(\vec{r} - \vec{r}')}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right) \right) dV'$$

$$\nabla^2 V = \nabla \cdot \nabla V$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left(-\frac{(\nabla \dot{\rho}) \cdot (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{c|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{\dot{\rho}}{c} \nabla \cdot \left(\frac{(\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) - \frac{(\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \cdot (\nabla \rho) - \rho \nabla \cdot \left(\frac{(\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right) \right) dV'$$

$$\begin{aligned} \nabla \dot{\rho} &= -\frac{\ddot{\rho}}{c} \nabla |\vec{r} - \vec{r}'| \\ &= -\frac{\ddot{\rho}}{c} (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'}) \end{aligned}$$

$$\nabla^2 V = \nabla \cdot \nabla V$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left(-\frac{(\nabla\dot{\rho}) \cdot (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{c|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{\dot{\rho}}{c} \nabla \cdot \left(\frac{(\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) - \frac{(\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \cdot (\nabla\rho) - \rho \nabla \cdot \left(\frac{(\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right) \right) dV'$$

$$\begin{aligned} \nabla\dot{\rho} &= -\frac{\ddot{\rho}}{c} \nabla|\vec{r} - \vec{r}'| &= \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \\ &= -\frac{\ddot{\rho}}{c} (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'}) \end{aligned}$$

$$\nabla^2 V = \nabla \cdot \nabla V$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left(-\frac{(\nabla \dot{\rho}) \cdot (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{c|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{\dot{\rho}}{c} \nabla \cdot \left(\frac{(\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) - \frac{(\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \cdot (\nabla \rho) - \rho \nabla \cdot \left(\frac{(\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right) \right) dV'$$

$$\begin{aligned} \nabla \dot{\rho} &= -\frac{\ddot{\rho}}{c} \nabla |\vec{r} - \vec{r}'| &= \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} &= -\frac{\dot{\rho}}{c} (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'}) \\ &= -\frac{\ddot{\rho}}{c} (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'}) \end{aligned}$$

$$\nabla^2 V = \nabla \cdot \nabla V$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left(-\frac{(\nabla\dot{\rho}) \cdot (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{c|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{\dot{\rho}}{c} \nabla \cdot \left(\frac{(\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) - \frac{(\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \cdot (\nabla\rho) - \rho \nabla \cdot \left(\frac{(\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right) \right) dV'$$

$$\begin{aligned} \nabla\dot{\rho} &= -\frac{\ddot{\rho}}{c} \nabla|\vec{r} - \vec{r}'| &= \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} &= -\frac{\dot{\rho}}{c} (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'}) &= 4\pi\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') \\ &= -\frac{\ddot{\rho}}{c} (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'}) \end{aligned}$$

$$\nabla^2 V = \nabla \cdot \nabla V$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left(-\frac{(\nabla\dot{\rho}) \cdot (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{c|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{\dot{\rho}}{c} \nabla \cdot \left(\frac{(\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) - \frac{(\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \cdot (\nabla\rho) - \rho \nabla \cdot \left(\frac{(\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right) \right) dV'$$

$$\begin{aligned} \nabla\dot{\rho} &= -\frac{\ddot{\rho}}{c} \nabla|\vec{r} - \vec{r}'| &= \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} &= -\frac{\dot{\rho}}{c} (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'}) &= 4\pi\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') \\ &= -\frac{\ddot{\rho}}{c} (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'}) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left(\frac{\ddot{\rho}}{c^2|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{\dot{\rho}}{c} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} + \frac{\dot{\rho}}{c} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} - 4\pi\rho\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') \right) dV'$$

$$\nabla^2 V = \nabla \cdot \nabla V$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left(-\frac{(\nabla\dot{\rho}) \cdot (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{c|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{\dot{\rho}}{c} \nabla \cdot \left(\frac{(\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) - \frac{(\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \cdot (\nabla\rho) - \rho \nabla \cdot \left(\frac{(\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right) \right) dV'$$

$$\begin{aligned} \nabla\dot{\rho} &= -\frac{\ddot{\rho}}{c} \nabla|\vec{r} - \vec{r}'| &= \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} &= -\frac{\dot{\rho}}{c} (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'}) &= 4\pi\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') \\ &= -\frac{\ddot{\rho}}{c} (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'}) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left(\frac{\ddot{\rho}}{c^2|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{\dot{\rho}}{c} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} + \frac{\dot{\rho}}{c} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} - 4\pi\rho\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') \right) dV'$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left(\frac{\ddot{\rho}}{c^2|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dV' - \frac{\rho(\vec{r}, t)}{\epsilon_0}$$

$\vec{r} = \vec{r}'$ 인 곳에서는
 $t = t_r$ 이 됩니다.

$$\nabla^2 V = \nabla \cdot \nabla V$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left(-\frac{(\nabla\dot{\rho}) \cdot (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{c|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{\dot{\rho}}{c} \nabla \cdot \left(\frac{(\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) - \frac{(\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \cdot (\nabla\rho) - \rho \nabla \cdot \left(\frac{(\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right) \right) dV'$$

$$\begin{aligned} \nabla\dot{\rho} &= -\frac{\ddot{\rho}}{c} \nabla|\vec{r} - \vec{r}'| &= \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} &= -\frac{\dot{\rho}}{c} (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'}) &= 4\pi\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') \\ &= -\frac{\ddot{\rho}}{c} (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'}) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left(\frac{\ddot{\rho}}{c^2|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{\dot{\rho}}{c} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} + \frac{\dot{\rho}}{c} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} - 4\pi\rho\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') \right) dV'$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left(\frac{\ddot{\rho}}{c^2|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dV' - \frac{\rho(\vec{r}, t)}{\epsilon_0} \quad \boxed{= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \frac{\rho(\vec{r}, t)}{\epsilon_0}}$$

$\vec{r} = \vec{r}'$ 인 곳에서는
 $t = t_r$ 이 됩니다.

$$\left(\nabla^2 V - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \right) + \frac{\partial \left(\nabla \cdot \vec{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial V}{\partial t} \right)}{\partial t} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\left(\nabla^2 \vec{A} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \right) - \nabla \left(\nabla \cdot \vec{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial V}{\partial t} \right) = -\mu_0 \vec{J}$$

따라서 스칼라 퍼텐셜이 위의 방정식을 만족시킴을 알 수 있습니다.
 같은 방법으로 벡터 퍼텐셜도
 위의 방정식을 만족시킴을 보일 수 있습니다.

$$V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}', t_a)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}', t_a)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

수학적인 대칭성에 의해 다음과 같이 **앞선 시간**advanced time을 사용하는 것도 마찬가지로 방정식의 해가 됩니다.

$$t_a \equiv t + \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}$$

$$V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}', t_a)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

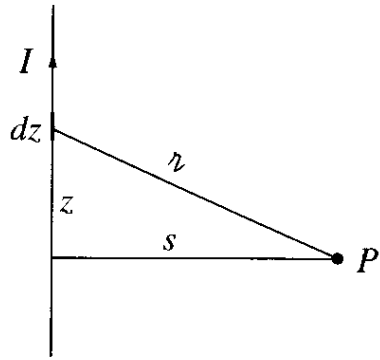
$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}', t_a)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

물론 이 경우에는 미래로부터의 신호를 받는 것이 되어
인과율을 위배하게 됩니다.

$$t_a \equiv t + \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}$$

예:

도선에 전류가 다음과 같이 흐르는 경우를 생각해 봅시다.



$$I(t) = 0 \quad (t \leq 0)$$

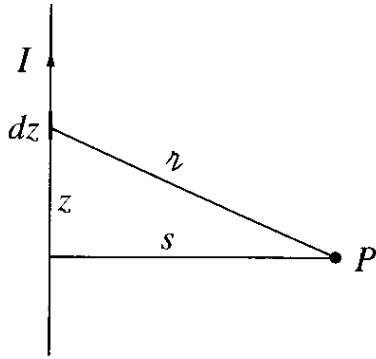
$$= I_0 \quad (t > 0)$$

예:

도선에 전류가 다음과 같이 흐르는 경우를 생각해 봅시다.

$$I(t) = 0 \quad (t \leq 0)$$

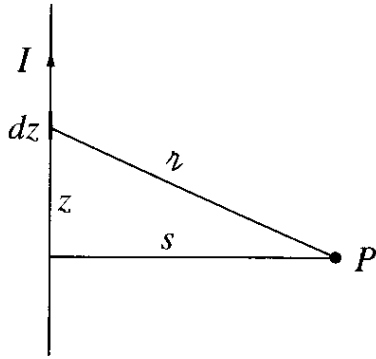
$$= I_0 \quad (t > 0)$$



먼저, 자유 전하가 없으므로 $V = 0$ 이 됩니다.

예:

도선에 전류가 다음과 같이 흐르는 경우를 생각해 봅시다.



$$I(t) = 0 \quad (t \leq 0)$$

$$= I_0 \quad (t > 0)$$

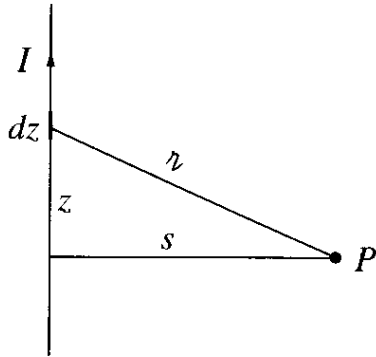
먼저, 자유 전하가 없으므로 $V = 0$ 이 됩니다.

한 편, 전류에 의한 벡터 퍼텐셜은 다음과 같습니다.

$$\vec{A}(s, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \hat{z} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I(t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dz$$

예:

도선에 전류가 다음과 같이 흐르는 경우를 생각해 봅시다.



$$I(t) = 0 \quad (t \leq 0)$$

$$= I_0 \quad (t > 0)$$

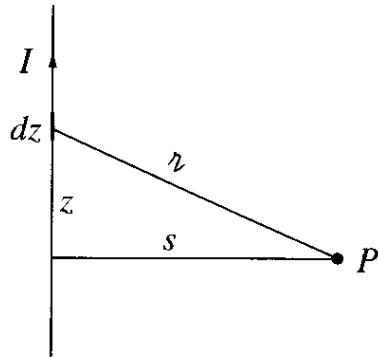
먼저, 자유 전하가 없으므로 $V = 0$ 이 됩니다.

한 편, 전류에 의한 벡터 퍼텐셜은 다음과 같습니다.

$$\begin{aligned} \vec{A}(s, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \hat{z} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I(t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dz \\ &= \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \hat{z} \times 2 \int_0^{\sqrt{(ct)^2 - s^2}} \frac{dz}{\sqrt{s^2 + z^2}} \end{aligned}$$

예:

도선에 전류가 다음과 같이 흐르는 경우를 생각해 봅시다.



$$I(t) = 0 \quad (t \leq 0)$$

$$= I_0 \quad (t > 0)$$

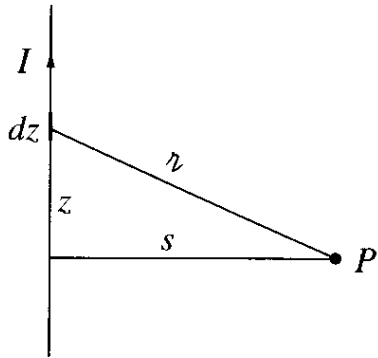
먼저, 자유 전하가 없으므로 $V = 0$ 이 됩니다.

한 편, 전류에 의한 벡터 퍼텐셜은 다음과 같습니다.

$$\begin{aligned} \vec{A}(s, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \hat{z} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I(t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dz \\ &= \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \hat{z} \times 2 \int_0^{\sqrt{(ct)^2 - s^2}} \frac{dz}{\sqrt{s^2 + z^2}} \\ &= \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \hat{z} \ln \left(\frac{ct + \sqrt{(ct)^2 - s^2}}{s} \right) \end{aligned}$$

예:

이제 이것을 미분해서 전기장과 자기장을 구합니다.

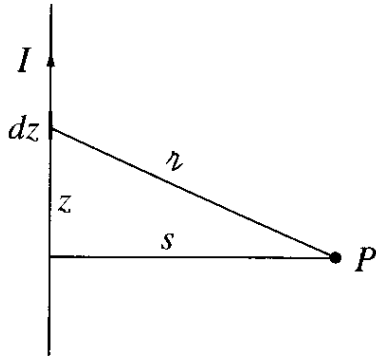


$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 I_0 c}{2\pi \sqrt{(ct)^2 - s^2}} \hat{z}$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \frac{\mu_0 I_0 ct}{2\pi s \sqrt{(ct)^2 - s^2}} \hat{\phi}$$

예:

이제 이것을 미분해서 전기장과 자기장을 구합니다.



$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 I_0 c}{2\pi \sqrt{(ct)^2 - s^2}} \hat{z}$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \frac{\mu_0 I_0 ct}{2\pi s \sqrt{(ct)^2 - s^2}} \hat{\phi}$$

따라서 시간이 충분히 지나면, 전기장은 사라지고 자기장은 비오-사바르 법칙을 따르게 된다는 것을 확인할 수 있습니다.

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left(\frac{\rho(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'} + \frac{\dot{\rho}(\vec{r}', t_r)}{c|\vec{r} - \vec{r}'|} (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'} - \frac{\dot{\vec{J}}(\vec{r}', t_r)}{c^2|\vec{r} - \vec{r}'|}) \right) dV'$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left(\frac{\vec{J}(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} + \frac{\dot{\vec{J}}(\vec{r}', t_r)}{c|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \times (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'} dV'$$

이제 이 스칼라 및 벡터 퍼텐셜을 미분하면
전기장과 자기장도 구할 수 있습니다.

이것을 제피멘코 방정식 Jefimenko equation 이라고 부릅니다.

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left(\frac{\rho(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'} + \frac{\dot{\rho}(\vec{r}', t_r)}{c|\vec{r} - \vec{r}'|} (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'} - \frac{\dot{\vec{J}}(\vec{r}', t_r)}{c^2|\vec{r} - \vec{r}'|}) \right) dV'$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left(\frac{\vec{J}(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} + \frac{\dot{\vec{J}}(\vec{r}', t_r)}{c|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \times (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'} dV'$$

물론 이 식의 유도는 실제 미분을 통해 이루어져야 하지만,
대략 다음과 같은 치환에 의해 정상 상태의 경우로부터
동적인 경우로 확장됨을 알 수 있습니다.

$$\rho \rightarrow \rho + \dot{\rho} \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} = \rho + \dot{\rho}(t - t_r)$$

$$\vec{J} \rightarrow \vec{J} + \dot{\vec{J}} \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} = \vec{J} + \dot{\vec{J}}(t - t_r)$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left(\frac{\rho(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'} + \frac{\dot{\rho}(\vec{r}', t_r)}{c|\vec{r} - \vec{r}'|} \widehat{\vec{r} - \vec{r}'} - \frac{\dot{\vec{J}}(\vec{r}', t_r)}{c^2|\vec{r} - \vec{r}'|}) dV' \right)$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left(\frac{\vec{J}(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} + \frac{\dot{\vec{J}}(\vec{r}', t_r)}{c|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \times (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'} dV'$$

여기에 추가로 전류 밀도의 변화가
전기장에 기여하는 효과가 있습니다.

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left(\frac{\rho(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'} + \frac{\dot{\rho}(\vec{r}', t_r)}{c|\vec{r} - \vec{r}'|} (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'} - \frac{\dot{\vec{J}}(\vec{r}', t_r)}{c^2|\vec{r} - \vec{r}'|}) \right) dV'$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left(\frac{\vec{J}(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} + \frac{\dot{\vec{J}}(\vec{r}', t_r)}{c|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \times (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'} dV'$$

이러한 항들을 통해,
 지연 시간의 효과가 전기장과 자기장의 원천 적분에
 시간 미분 항을 도입하게 한다는 것을 알 수 있습니다.

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left(\frac{\rho(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'} + \frac{\dot{\rho}(\vec{r}', t_r)}{c|\vec{r} - \vec{r}'|} (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'} - \frac{\dot{\vec{J}}(\vec{r}', t_r)}{c^2|\vec{r} - \vec{r}'|}) \right) dV'$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left(\frac{\vec{J}(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} + \frac{\dot{\vec{J}}(\vec{r}', t_r)}{c|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \times (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'} dV'$$

또 한 가지 중요한 통찰은 바로 이러한 수학적 구조 때문에
정상 상태 전기장과 자기장의 원천 적분에서
단순히 시간을 지연 시간으로 바꾼다고 해서
올바른 답을 얻을 수는 없다는 것을 알 수 있습니다.

$$\int \rho(\vec{r}', t_r) dV'$$

이제 점 전하의 경우로 우리의 관심을 옮겨 봅시다.
점 전하의 효과를 보기 위해서는
위와 같이 연속 분포의 전하 밀도 부분에
부피 적분을 적용하면 됩니다.

$$\int \rho(\vec{r}', t_r) dV' = \frac{q}{1 - \frac{\vec{v} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{c}}$$

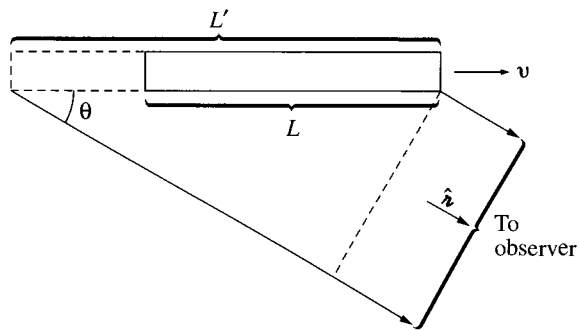
그런데 원천이 운동을 하기 때문에,
 부피 적분 부분에 **지연에 의한 효과**가 나타나서
 위의 적분이 단순히 점 전하의 총 전하량 q 와는
 같아지지 않게 됩니다.

$$\int \rho(\vec{r}', t_r) dV' = \frac{q}{1 - \frac{\vec{v} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{c}}$$

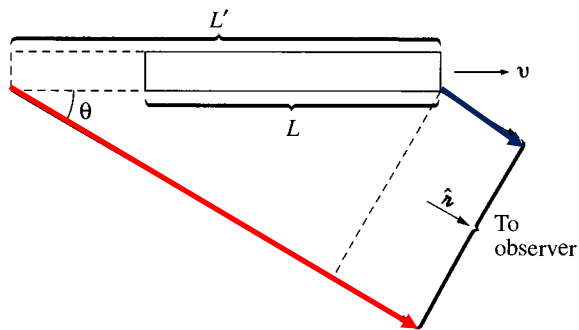
단, $\vec{v}$ 는 지연 시간에서의 속도,
 $\vec{r}'$ 은 지연 시간에서의 위치를 말합니다.
 따라서 $\vec{v}$ 와 $\vec{r}'$ 을 구하기 위해서는
 지연 시간을 먼저 구해야 합니다.

$$\int \rho(\vec{r}', t_r) dV' = \frac{q}{1 - \frac{\vec{v} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{c}}$$

왜 지연에 의한 효과가
이런 형태로 나타나게 될까요?

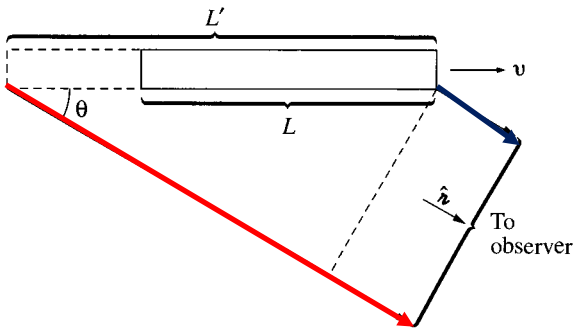


이 현상을 이해하기 위해 위와 같이 길이 L 인 막대가
 속력 v 로 오른쪽으로 움직이는 상황을 살펴봅시다.
 이 때, 관찰자는 수평면에서 각도 θ 만큼 아래쪽에 있습니다.

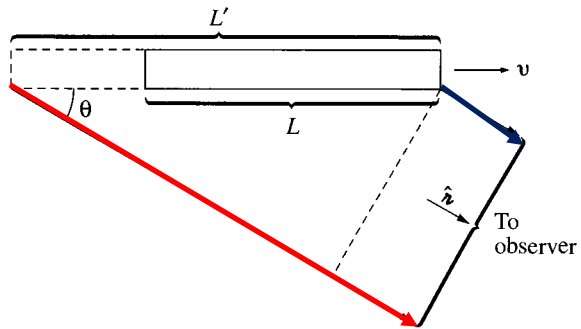


이 때, 우리의 질문은 관찰자의 관점에서는
 이 막대의 길이가 얼마로 보일까 하는 부분입니다.
 막대의 **왼쪽 끝**에서 보낸 신호와 **오른쪽 끝**에서 보낸 신호가
동시에 관찰자에게 도달한다는 것을 살펴볼 수 있습니다.

$$t = \frac{L'}{c} \cos \theta$$

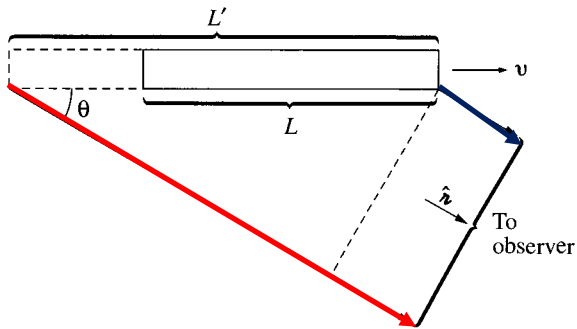


먼저 왼쪽 끝에서 출발한 빛과 오른쪽 끝에서 출발한 빛 사이의
 시간 차 t 는 위와 같은 관계를 가집니다.



$$t = \frac{L'}{c} \cos \theta = \frac{L' - L}{v}$$

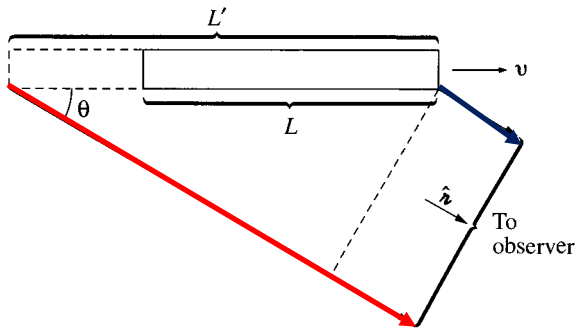
그리고 이 시간 동안 막대의 오른쪽 끝은
좀 더 오른쪽으로 이동합니다.



$$t = \frac{L'}{c} \cos \theta = \frac{L' - L}{v}$$

$$L' = \frac{L}{1 - \frac{v}{c} \cos \theta} = \frac{L}{1 - \frac{\vec{v} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{c}}$$

이 효과를 고려하면 위와 같은 관계를 얻습니다.



$$t = \frac{L'}{c} \cos \theta = \frac{L' - L}{v}$$

$$L' = \frac{L}{1 - \frac{v}{c} \cos \theta} = \frac{L}{1 - \frac{\vec{v} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{c}}$$

$$dV' = \frac{dV}{1 - \frac{\vec{v} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{c}}$$

따라서 좀 더 일반적으로,
 운동하는 물체의 겉보기 부피는 위와 같은 관계를 가집니다.

$$\int \rho(\vec{r}', t_r) dV' = \frac{q}{1 - \frac{\vec{v} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{c}}$$

따라서 지연 효과를 고려하면
점 전하의 전하량은 위와 같이 수정되어야 함을 알 수 있습니다.

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \left(\frac{1}{1 - \frac{\vec{v} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{c}} \right)$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \left(\frac{1}{1 - \frac{\vec{v} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{c}} \right) = \frac{\vec{v}}{c^2} V$$

이것으로부터 스칼라 퍼텐셜과 벡터 퍼텐셜을 적을 수 있습니다.

이것이 바로

리에나르-비케르트 전위Lienard-Wiechert potential입니다.

예: 다음과 같이 등속 운동하는 점전하의 전위를 구해 봅시다.

$$\vec{w}(t) = \vec{v}t$$

예: 다음과 같이 등속 운동하는 점전하의 전위를 구해 봅시다.

$$\vec{w}(t) = \vec{v}t$$

먼저 원천점과 관찰점 사이의 거리는 다음과 같이 표현됩니다.

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = |\vec{r} - \vec{v}t_r| = c(t - t_r)$$

예: 다음과 같이 등속 운동하는 점전하의 전위를 구해 봅시다.

$$\vec{w}(t) = \vec{v}t$$

먼저 원천점과 관찰점 사이의 거리는 다음과 같이 표현됩니다.

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = |\vec{r} - \vec{v}t_r| = c(t - t_r)$$

이 식으로부터 지연 시간을 구할 수 있습니다.

$$|\vec{r} - \vec{v}t_r|^2 = r^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{v}t_r + v^2t_r^2 = c^2(t - t_r)^2$$

예: 다음과 같이 등속 운동하는 점전하의 전위를 구해 봅시다.

$$\vec{w}(t) = \vec{v}t$$

먼저 원천점과 관찰점 사이의 거리는 다음과 같이 표현됩니다.

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = |\vec{r} - \vec{v}t_r| = c(t - t_r)$$

이 식으로부터 지연 시간을 구할 수 있습니다.

$$|\vec{r} - \vec{v}t_r|^2 = r^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{v}t_r + v^2t_r^2 = c^2(t - t_r)^2$$

$$t_r = \frac{(c^2t - \vec{r} \cdot \vec{v}) \pm \sqrt{(c^2t - \vec{r} \cdot \vec{v})^2 + (c^2 - v^2)(r^2 - c^2t^2)}}{c^2 - v^2}$$

예: 다음과 같이 등속 운동하는 점전하의 전위를 구해 봅시다.

$$\vec{w}(t) = \vec{v}t$$

먼저 원천점과 관찰점 사이의 거리는 다음과 같이 표현됩니다.

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = |\vec{r} - \vec{v}t_r| = c(t - t_r)$$

이 식으로부터 지연 시간을 구할 수 있습니다.

$$|\vec{r} - \vec{v}t_r|^2 = r^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{v}t_r + v^2t_r^2 = c^2(t - t_r)^2$$

$$t_r = \frac{(c^2t - \vec{r} \cdot \vec{v}) - \sqrt{(c^2t - \vec{r} \cdot \vec{v})^2 + (c^2 - v^2)(r^2 - c^2t^2)}}{c^2 - v^2}$$

여기에서 $v = 0$ 인 극한에서 $t_r = t - \frac{r}{c}$ 가 되어야 하므로, 위 식에서 음의 부호를 택합니다.

예: 다음과 같이 등속 운동하는 점전하의 전위를 구해 봅시다.

$$\vec{w}(t) = \vec{v}t$$

그러면 이렇게 구한 지연 시간을 사용해서 다음 관계를 구할 수 있습니다.

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = c(t - t_r)$$

$$\widehat{(\vec{r} - \vec{r}')} = \frac{\vec{r} - \vec{v}t_r}{c(t - t_r)}$$

예: 다음과 같이 등속 운동하는 점전하의 전위를 구해 봅시다.

$$\vec{w}(t) = \vec{v}t$$

그러면 이렇게 구한 지연 시간을 사용해서 다음 관계를 구할 수 있습니다.

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = c(t - t_r)$$

$$(\widehat{\vec{r} - \vec{r}'}) = \frac{\vec{r} - \vec{v}t_r}{c(t - t_r)}$$

따라서 우리가 원하는 전위는 다음과 같습니다.

$$V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qc}{\sqrt{(c^2t - \vec{r} \cdot \vec{v})^2 - (c^2 - v^2)(r^2 - c^2t^2)}}$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{v}}{c^2} V(\vec{r}, t)$$

이제 리에나르-비케르트 전위를 미분해서
움직이는 점 전하에 의한 전기장과 자기장을 구할 수 있습니다.

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{((\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{u})^3} \left((c^2 - v^2) \vec{u} + (\vec{r} - \vec{r}') \times (\vec{u} \times \vec{a}) \right)$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \widehat{(\vec{r} - \vec{r}')} \times \vec{E}$$

결과만 적으면 위와 같습니다.
 여기에서 $\vec{u} \equiv c \widehat{(\vec{r} - \vec{r}')} - \vec{v}$ 이고,
 $\vec{a}$ 는 지연 시간에서의 가속도를 의미합니다.

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{((\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{u})^3} \left((c^2 - v^2) \vec{u} + (\vec{r} - \vec{r}') \times (\vec{u} \times \vec{a}) \right)$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \widehat{(\vec{r} - \vec{r}')} \times \vec{E}$$

이것을 사용해서 로렌츠 힘을 적으면
가장 일반적인 로렌츠 힘의 공식을 얻게 됩니다.

예: 등속 운동하는 점전하의 전기장과 자기장을 구해 봅시다.

$$V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qc}{\sqrt{(c^2t - \vec{r} \cdot \vec{v})^2 - (c^2 - v^2)(r^2 - c^2t^2)}}$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{v}}{c^2} V(\vec{r}, t)$$

예: 등속 운동하는 점전하의 전기장과 자기장을 구해 봅시다.

$$V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qc}{\sqrt{(c^2t - \vec{r} \cdot \vec{v})^2 - (c^2 - v^2)(r^2 - c^2t^2)}}$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{v}}{c^2} V(\vec{r}, t)$$

따라서 전기장과 자기장은 다음과 같습니다. ($\vec{R} \equiv \vec{r} - \vec{v}t$)

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \theta\right)^{3/2}} \frac{\hat{R}}{R^2}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E}$$

예: **등속 운동**하는 점전하의 전기장과 자기장을 구해 봅시다.

$$V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qc}{\sqrt{(c^2t - \vec{r} \cdot \vec{v})^2 - (c^2 - v^2)(r^2 - c^2t^2)}}$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{v}}{c^2} V(\vec{r}, t)$$

따라서 전기장과 자기장은 다음과 같습니다. ($\vec{R} \equiv \vec{r} - \vec{v}t$)

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \theta\right)^{3/2}} \frac{\hat{R}}{R^2} & \rightarrow \vec{E} \simeq \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{R} \\ \vec{B} &= \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E} & \rightarrow \vec{B} \simeq \frac{\mu_0 q}{4\pi R^2} \vec{v} \times \hat{R} \end{aligned}$$

속력이 느려지는 극한에서는 위와 같이 표현됩니다. 이 결과는 우리가 예상했던 것과 같습니다.

이렇게 원천 전하 및 원천 전류가 동적인 경우의
전기장과 자기장이 보여주는 **경험적인 의미**는 무엇일까요?
그 중 한 가지 중요한 사례로서
다음 장에서 **전자기파 방사**를 공부해 보도록 합시다.

감사합니다