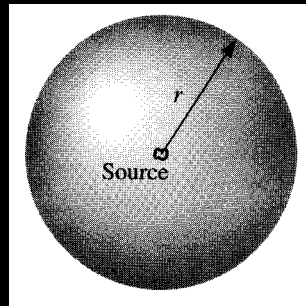


제11장

전자기파 방사

이제 우리는 움직이는 전하가 방출하는
전자기파에 대해서 살펴보겠습니다.
이것을 전자기파 방사electromagnetic radiation라고 합니다.

$$P(r, t) = \oint \vec{S} \cdot d\vec{\mathcal{A}} = \frac{1}{\mu_0} \oint (\vec{E} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\mathcal{A}}$$



방사되는 전자기파의 에너지는 위와 같은
일률에 의해 표현됩니다.

이 때 적분하는 면적을 구면으로 생각하고,
이 구면의 반지름을 r 이라고 하겠습니다.

$$P(r, t) = \oint \vec{S} \cdot d\vec{\mathcal{A}} = \frac{1}{\mu_0} \oint (\vec{E} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\mathcal{A}}$$

$$P_r(t_0) = \lim_{r \rightarrow \infty} P\left(r, t_0 + \frac{r}{c}\right)$$

방사되는 에너지는 원점 $r = 0$ 에서
 $t_0 = t - r/c$ 에 출발한 것으로 생각할 수 있습니다.

따라서 방사 일률은 t_0 에 방출된 에너지를
 무한대(원점에서 충분히 먼 곳)에서 측정한 것으로 정의할 수 있습니다.

$$\vec{E} \simeq \int \frac{\rho}{r^2} + \frac{\dot{\rho}}{r} + \frac{\dot{J}}{r}$$

$$\vec{B} \simeq \int \frac{J}{r^2} + \frac{\dot{J}}{r}$$

제피멩코 방정식을 살펴보면,
전기장과 자기장은 위와 같이 표현됩니다.

$$\vec{E} \simeq \int \frac{\rho}{r^2} + \frac{\dot{\rho}}{r} + \frac{\dot{J}}{r}$$

$$\vec{B} \simeq \int \frac{J}{r^2} + \frac{\dot{J}}{r}$$

$$\vec{E} \times \vec{B} \simeq \int \frac{\dots}{r^2} + \frac{\dots}{r^3} + \frac{\dots}{r^4} + \dots$$

따라서 포인팅 벡터는 위와 같이 근사적으로 표현됩니다.

$$\vec{E} \simeq \int \frac{\rho}{r^2} + \frac{\dot{\rho}}{r} + \frac{\dot{J}}{r}$$

$$\vec{B} \simeq \int \frac{J}{r^2} + \frac{\dot{J}}{r}$$

$$\vec{E} \times \vec{B} \simeq \int \frac{\dots}{r^2} + \frac{\dots}{r^3} + \frac{\dots}{r^4} + \dots$$

방사 일률은 포인팅 벡터의 면적분이므로,
위의 식에서 첫 번째 항만 무한대에서 유한한 값으로
기여하게 됩니다.

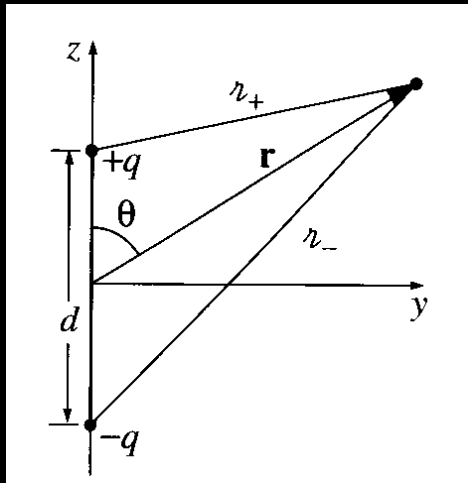
$$\vec{E} \simeq \int \frac{\rho}{r^2} + \frac{\dot{\rho}}{r} + \frac{\dot{J}}{r}$$

$$\vec{B} \simeq \int \frac{J}{r^2} + \frac{\dot{J}}{r}$$

$$\vec{E} \times \vec{B} \simeq \int \frac{\dots}{r^2} + \frac{\dots}{r^3} + \frac{\dots}{r^4} + \dots$$

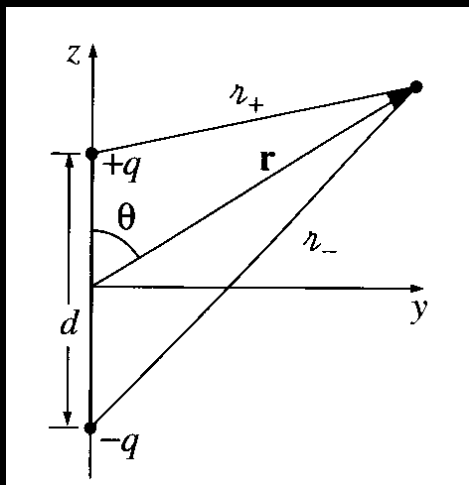
따라서 전자기파 방사가 존재하기 위해서는
 $\dot{\rho}$ 및 $\dot{J}$ 항이 존재해야 합니다.

다양한 계에서 전자기파 방사가 발생할 수 있습니다.
우리는 특히 전기 및 자기 쌍극자에서의 방사와
가속 운동하는 점전하에서의 방사를
자세히 살펴볼 것입니다.



$$q(t) = q_0 \cos \omega t$$

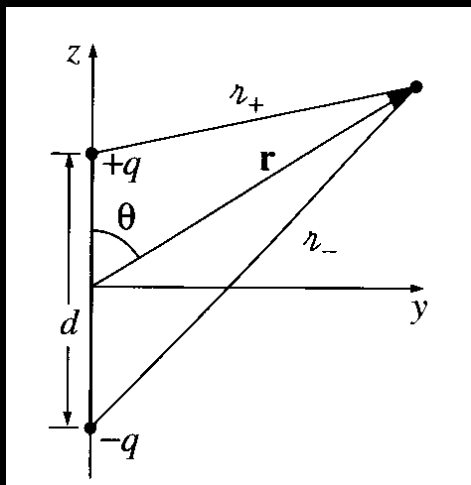
먼저 전기 쌍극자에서의 방사를 살펴봅시다.
 왼쪽 그림과 같은 전기 쌍극자가 있는데,
 두 전하 사이에 전류가 흘러서
 쌍극자의 전하가 **진동**한다고 합시다.



$$q(t) = q_0 \cos \omega t$$

$$\vec{p}(t) = p_0 \cos \omega t \hat{z}$$

전기 쌍극자를 기술하는 전기 쌍극자 모멘트는
위와 같습니다. ($p_0 = q_0 d$)



$$q(t) = q_0 \cos \omega t$$

$$\vec{p}(t) = p_0 \cos \omega t \hat{z}$$

$$r_{\pm} = \sqrt{r^2 \mp rd \cos \theta + \left(\frac{d}{2}\right)^2}$$

관찰점의 위치를 $\vec{r}$ 이라고 하면,
각 전하까지의 거리 $r_{\pm}$ 은 위와 같습니다.

$$V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_0 \cos \omega \left(t - \frac{r_+}{c} \right)}{r_+} - \frac{q_0 \cos \omega \left(t - \frac{r_-}{c} \right)}{r_-} \right)$$

이러한 정보를 바탕으로 먼저 스칼라 퍼텐셜을 적어보도록 합시다.
여기에는 원천 각각의 지연 시간이 반영되어 있습니다.

$$V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_0 \cos \omega \left(t - \frac{r_+}{c} \right)}{r_+} - \frac{q_0 \cos \omega \left(t - \frac{r_-}{c} \right)}{r_-} \right)$$

$$\stackrel{d \ll r}{\simeq} \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) + \frac{\omega d}{2c} \cos \theta \right]}{r \left(1 - \frac{d}{2r} \cos \theta \right)} - \frac{\cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) - \frac{\omega d}{2c} \cos \theta \right]}{r \left(1 + \frac{d}{2r} \cos \theta \right)} \right)$$

먼저 우리는 쌍극자의 전하간 거리 d 가
관찰점까지의 거리 r 보다 훨씬 작다는 것을 가정할 것입니다.

$$V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_0 \cos \omega \left(t - \frac{r_+}{c} \right)}{r_+} - \frac{q_0 \cos \omega \left(t - \frac{r_-}{c} \right)}{r_-} \right)$$

$$\stackrel{d \ll r}{\simeq} \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) + \frac{\omega d}{2c} \cos \theta \right]}{r \left(1 - \frac{d}{2r} \cos \theta \right)} - \frac{\cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) - \frac{\omega d}{2c} \cos \theta \right]}{r \left(1 + \frac{d}{2r} \cos \theta \right)} \right)$$

$$\simeq \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 r} \times$$

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{d}{2r} \cos \theta \right) \left(\cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \cos \left(\frac{\omega d}{2c} \cos \theta \right) - \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \sin \left(\frac{\omega d}{2c} \cos \theta \right) \right) \\ & - \left(1 - \frac{d}{2r} \cos \theta \right) \left(\cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \cos \left(\frac{\omega d}{2c} \cos \theta \right) + \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \sin \left(\frac{\omega d}{2c} \cos \theta \right) \right) \end{aligned}$$

$$V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_0 \cos \omega \left(t - \frac{r_+}{c} \right)}{r_+} - \frac{q_0 \cos \omega \left(t - \frac{r_-}{c} \right)}{r_-} \right)$$

$$\stackrel{d \ll r}{\approx} \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) + \frac{\omega d}{2c} \cos \theta \right]}{r \left(1 - \frac{d}{2r} \cos \theta \right)} - \frac{\cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) - \frac{\omega d}{2c} \cos \theta \right]}{r \left(1 + \frac{d}{2r} \cos \theta \right)} \right)$$

$$\begin{aligned} & \simeq \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 r} \times \quad d \ll \frac{c}{\omega} \quad \text{or} \quad d \ll \lambda \quad \simeq \frac{\omega d}{2c} \cos \theta \\ & \left(1 + \frac{d}{2r} \cos \theta\right) \left(\cos \omega \left(t - \frac{r}{c}\right) \cos \left(\frac{\omega d}{2c} \cos \theta\right) - \sin \omega \left(t - \frac{r}{c}\right) \sin \left(\frac{\omega d}{2c} \cos \theta\right) \right) \\ & - \left(1 - \frac{d}{2r} \cos \theta\right) \left(\cos \omega \left(t - \frac{r}{c}\right) \cos \left(\frac{\omega d}{2c} \cos \theta\right) + \sin \omega \left(t - \frac{r}{c}\right) \sin \left(\frac{\omega d}{2c} \cos \theta\right) \right) \\ & \quad \simeq \frac{\omega d}{2c} \cos \theta \end{aligned}$$

$$V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_0 \cos \omega \left(t - \frac{r_+}{c} \right)}{r_+} - \frac{q_0 \cos \omega \left(t - \frac{r_-}{c} \right)}{r_-} \right)$$

$$\simeq \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 r} \left(\frac{d}{r} \cos \theta \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) - \frac{\omega d}{c} \cos \theta \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right)$$

$$V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_0 \cos \omega \left(t - \frac{r_+}{c} \right)}{r_+} - \frac{q_0 \cos \omega \left(t - \frac{r_-}{c} \right)}{r_-} \right)$$

$$\simeq \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 r} \left(\frac{d}{r} \cos \theta \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) - \frac{\omega d}{c} \cos \theta \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right)$$

$$= \frac{p_0}{4\pi\epsilon_0 r} \left(-\frac{\omega}{c} \cos \theta \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) + \frac{1}{r} \cos \theta \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right)$$

$$V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_0 \cos \omega \left(t - \frac{r_+}{c} \right)}{r_+} - \frac{q_0 \cos \omega \left(t - \frac{r_-}{c} \right)}{r_-} \right)$$

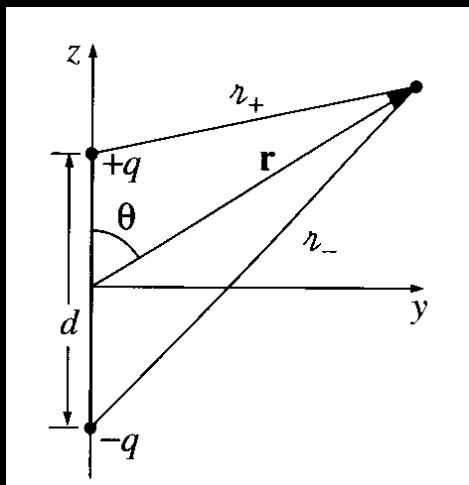
$$\simeq \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 r} \left(\frac{d}{r} \cos \theta \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) - \frac{\omega d}{c} \cos \theta \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right)$$

$$= \frac{p_0}{4\pi\epsilon_0 r} \left(-\frac{\omega}{c} \cos \theta \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) + \frac{1}{r} \cos \theta \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right)$$

$$\simeq -\frac{p_0 \omega}{4\pi\epsilon_0 c} \left(\frac{\cos \theta}{r} \right) \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right)$$

$$r \gg \frac{c}{\omega}$$

방사영역에서 살아남는
전자기장을 선택



$$q(t) = q_0 \cos \omega t$$

$$\vec{p}(t) = p_0 \cos \omega t \hat{z}$$

$$\vec{I} = \dot{q} \hat{z} = -q_0 \omega \sin \omega t \hat{z}$$

한 편, 쌍극자 진동에 의해 위 아래로 전류가 흐르는 것으로
생각할 수 있습니다.

따라서 이 때, 전류는 위와 같이 표현됩니다.

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \hat{z} \int_{-d/2}^{d/2} \frac{-q_0 \omega \sin \omega \left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} \right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dz'$$

이것으로부터 벡터 전위도 적어봅시다.

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \hat{z} \int_{-d/2}^{d/2} \frac{-q_0 \omega \sin \omega \left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} \right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dz'$$

$$\simeq -\frac{\mu_0 p_0 \omega}{4\pi r} \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \hat{z}$$

쌍극자의 크기가 아주 작은 경우에는
 $|\vec{r} - \vec{r}'| \simeq r$ 이 되므로
 위와 같은 근사가 가능합니다.

$$\vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\partial V}{\partial r} \hat{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{\theta} - \frac{\partial \hat{A}}{\partial t}$$

이러한 스칼라 및 벡터 퍼텐셜로부터
전기장과 자기장을 계산해 봅시다.

$$\vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\partial V}{\partial r} \hat{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{\theta} - \frac{\partial \hat{A}}{\partial t}$$

$$\simeq -\frac{p_0 \omega}{4\pi\epsilon_0 c} \left(\cos \theta \left(\frac{1}{r^2} \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) + \frac{\omega}{rc} \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right) \hat{r} + \frac{\sin \theta}{r^2} \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \hat{\theta} \right) \\ + \frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi r} \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) (\cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta})$$

이러한 스칼라 및 벡터 퍼텐셜로부터
전기장과 자기장을 계산해 봅시다.

$$\vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\partial V}{\partial r} \hat{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{\theta} - \frac{\partial \hat{A}}{\partial t}$$

$$\simeq -\frac{p_0 \omega}{4\pi \epsilon_0 c} \left(\cos \theta \left(\frac{1}{r^2} \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) + \frac{\omega}{rc} \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right) \hat{r} + \frac{\sin \theta}{r^2} \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \hat{\theta} \right) \\ + \frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi r} \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) (\cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta})$$

$$\simeq -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi} \frac{\sin \theta}{r} \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \hat{\theta}$$

여기에서 r^{-2} 에 비례하는 항은 무한대에서 기여하지 않으므로 무시할 수 있습니다.

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \hat{\phi}$$

마찬가지로 자기장도 계산할 수 있습니다.

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \hat{\phi}$$

$$\simeq -\frac{\mu_0 p_0 \omega}{4\pi r} \left(\frac{\omega}{c} \sin \theta \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) + \frac{\sin \theta}{r} \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right) \hat{\phi}$$

마찬가지로 자기장도 계산할 수 있습니다.

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \hat{\phi}$$

$$\simeq -\frac{\mu_0 p_0 \omega}{4\pi r} \left(\frac{\omega}{c} \sin \theta \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) + \frac{\sin \theta}{r} \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right) \hat{\phi}$$

$$\simeq -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi c} \frac{\sin \theta}{r} \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \hat{\phi}$$

역시 여기에서도 r^{-2} 에 비례하는 항은 무시할 수 있습니다.

$$\vec{E} \simeq -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2 \sin \theta}{4\pi} \frac{1}{r} \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \hat{\theta}$$

$$\vec{B} \simeq -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2 \sin \theta}{4\pi c} \frac{1}{r} \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \hat{\phi}$$

따라서 전기장과 자기장을 동시에 비교하면
위상은 같고 서로 직교하는 구면파가 방출된다는 것을
알 수 있습니다.

$$\vec{E} \simeq -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2 \sin \theta}{4\pi} \frac{1}{r} \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \hat{\theta}$$

$$\vec{B} \simeq -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2 \sin \theta}{4\pi c} \frac{1}{r} \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \hat{\phi}$$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B}) \simeq \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4 \sin^2 \theta}{16\pi^2 c} \frac{1}{r^2} \cos^2 \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \hat{r}$$

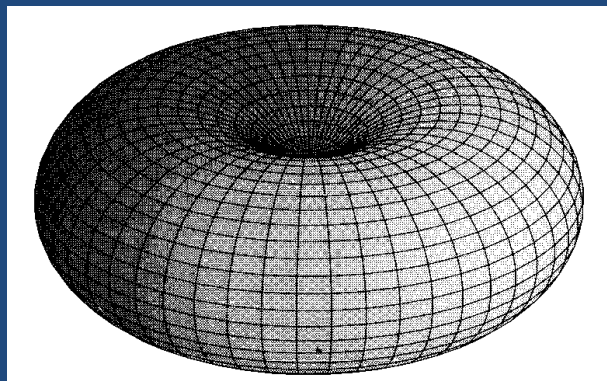
포인팅 벡터는 위와 같습니다.

$$\vec{E} \simeq -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2 \sin \theta}{4\pi} \frac{1}{r} \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \hat{\theta}$$

$$\vec{B} \simeq -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2 \sin \theta}{4\pi c} \frac{1}{r} \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \hat{\phi}$$

$$\langle \vec{S} \rangle \simeq \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4 \sin^2 \theta}{32\pi^2 c} \frac{1}{r^2} \hat{r}$$

포인팅 벡터를 한 주기 평균 하면
위의 결과를 얻습니다.



$$\langle \vec{S} \rangle \simeq \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \hat{r}$$

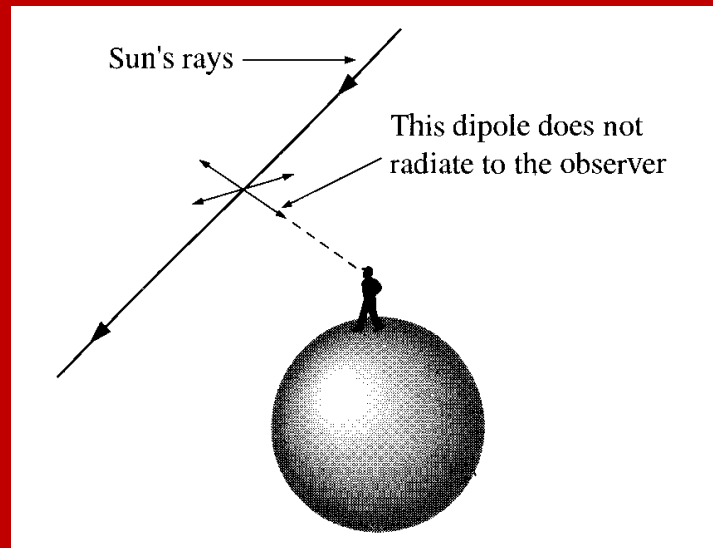
이 결과에 따르면, 쌍극자 모멘트의 방향으로
에너지가 방사되지 않고,
쌍극자 모멘트의 수직인 방향으로 가장 많이 방사된다는 것을
알 수 있습니다.

$$\langle P \rangle = \int \langle \vec{S} \rangle \cdot \hat{r} r^2 d\Omega \simeq \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c} \int \sin^2 \theta \sin \theta d\theta d\phi$$

이제 포인팅 벡터의 한 주기 평균을
반지름 r 인 구면에 대해 적분하고,
이 반지름을 무한대로 보내서
무한대에서의 방사 일률을 계산합니다.

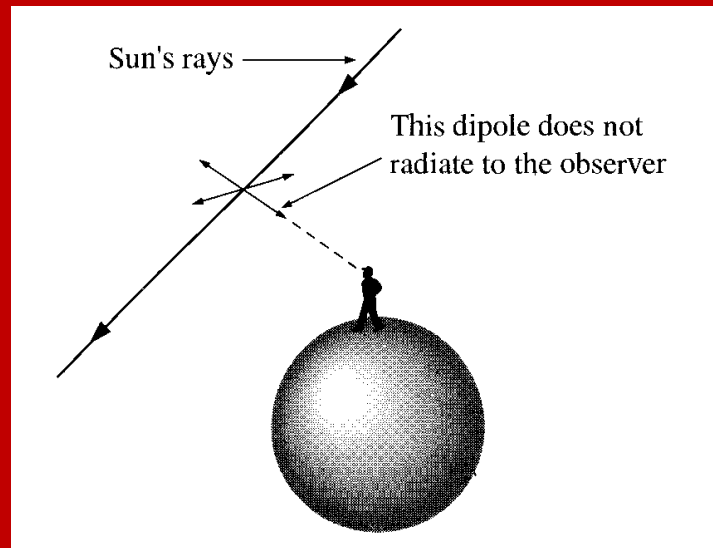
$$\begin{aligned}
 \langle P \rangle &= \int \langle \vec{S} \rangle \cdot \hat{r} r^2 d\Omega \simeq \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c} \int \sin^2 \theta \sin \theta d\theta d\phi \\
 &= \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{12\pi c} \quad \quad \quad = \frac{8\pi}{3}
 \end{aligned}$$

이제 포인팅 벡터의 한 주기 평균을
 반지름 r 인 구면에 대해 적분하고,
 이 반지름을 무한대로 보내서
 무한대에서의 방사 일률을 계산합니다.

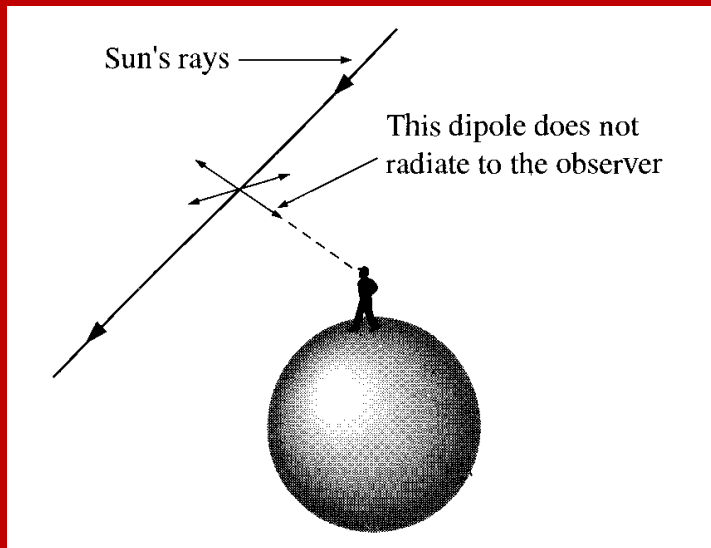


대기에서의 빛의 산란은 쌍극자의 방사와 관련됩니다.
진동수가 높을수록 쌍극자에 흡수되었다가 방사되는
빛의 에너지가 커지게 됩니다.

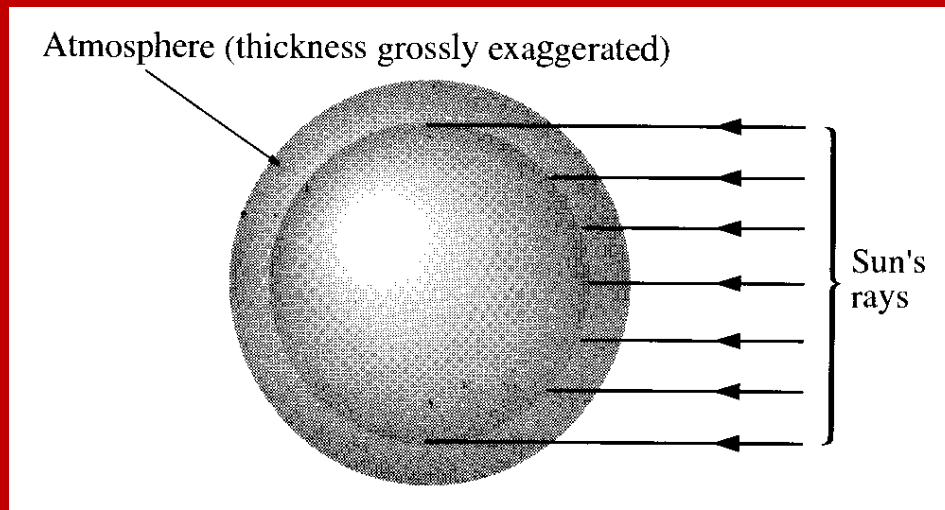
따라서 우리는 하늘에서 진동수가 높은 (파란색) 빛을 보게 됩니다.



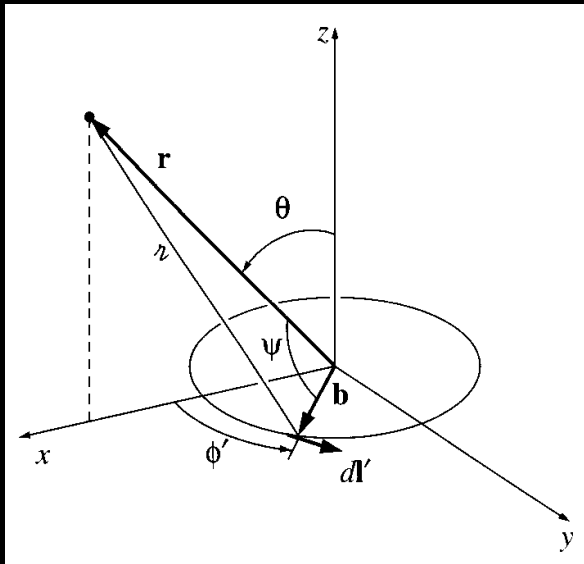
이러한 빛을 방출하기 위해서는
쌍극자는 햇빛의 진행방향과 수직하게 놓여 있어야 합니다.
그리고 쌍극자가 시선 방향과 같은 방향에 있다면
산란하는 빛을 방출하지 않을 것입니다.



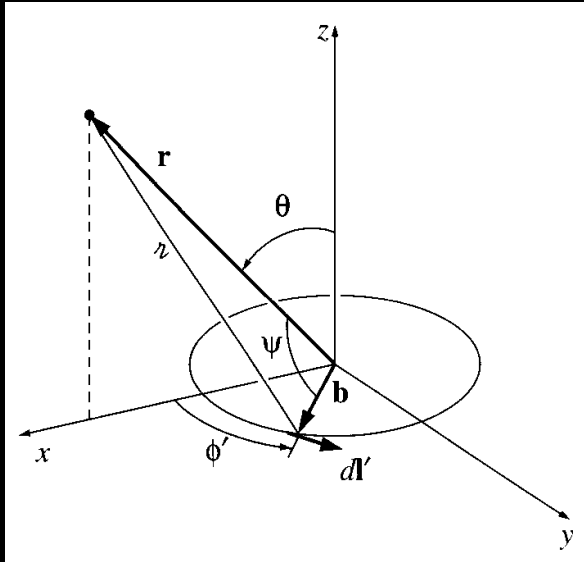
따라서 빛은 햇빛의 방향과 수직인 방향으로
편광되어 우리에게 도달하게 됩니다.



한편, 해질 무렵의 붉은색 빛은 다른 관점에서 생깁니다.
해질 무렵에는 빛이 대기를 오래 통과하게 됩니다.
따라서 파장이 긴 빛이 주로 우리 시선에 들어오게 됩니다.
따라서 붉은 빛이 주로 우리 눈에 보이게 되는 것입니다.

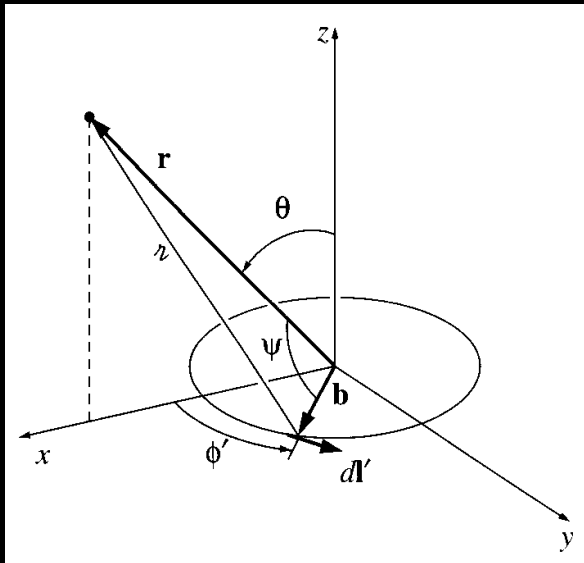


다음으로 자기 쌍극자의 경우를 살펴봅시다.
먼저 편의상 관찰점이 x -축 위에 있는 경우를 생각하고,
나중에 일반적인 경우로 확장하도록 하겠습니다.



$$I(t) = I_0 \cos \omega t$$

자기 쌍극자를 반지름 b 인 고리로 가정하고,
여기에 시간에 따라 변하는 전류 I 가 흐른다고 하겠습니다.



$$I(t) = I_0 \cos \omega t$$

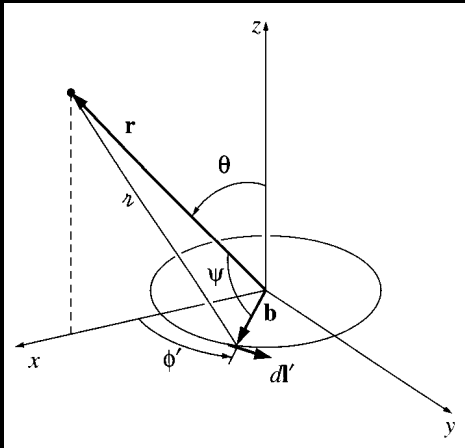
$$\vec{m}(t) = m_0 \cos \omega t \hat{z}$$

자기 쌍극자를 기술하는 자기 쌍극자 모멘트는
위와 같습니다. ($m_0 = \pi b^2 I_0$)

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I_0 \cos \omega \left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} \right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{\ell}'$$

자유 전하가 없으므로 스칼라 퍼텐셜은 0이 됩니다.
한 편, 벡터 퍼텐셜은 위와 같이 기술됩니다.

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I_0 \cos \omega \left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} \right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{\ell}'$$



$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{r^2 + b^2 - 2rb \cos \psi}$$

$$d\vec{\ell}' = b \cos \phi' d\phi' \hat{y}$$

여기에서 거리와 선적분은 위와 같이 표현됩니다.
선적분 과정에서 x -성분은 상쇄된다는 것을 고려하였습니다.

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I_0 \cos \omega \left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} \right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{\ell}'$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{r^2 + b^2 - 2rb \cos \psi}$$

$$d\vec{\ell}' = b \cos \phi' d\phi' \hat{y}$$

$$= \frac{\mu_0 I_0 b}{4\pi} \hat{y} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \omega \left(t - \frac{\sqrt{r^2 + b^2 - 2rb \cos \psi}}{c} \right)}{\sqrt{r^2 + b^2 - 2rb \cos \psi}} \cos \phi' d\phi'$$

$\cos \psi = \sin \theta \cos \phi'$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I_0 \cos \omega \left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} \right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{\ell}'$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{r^2 + b^2 - 2rb \cos \psi}$$

$$d\vec{\ell}' = b \cos \phi' d\phi' \hat{y}$$

$$= \frac{\mu_0 I_0 b}{4\pi} \hat{y} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \omega \left(t - \frac{\sqrt{r^2 + b^2 - 2rb \cos \psi}}{c} \right)}{\sqrt{r^2 + b^2 - 2rb \cos \psi}} \cos \phi' d\phi'$$

$\cos \psi = \sin \theta \cos \phi'$

$$\stackrel{b \ll r}{\simeq} \frac{\mu_0 I_0 b}{4\pi} \hat{y} \int_0^{2\pi} \cos \left(\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) + \frac{\omega b}{c} \sin \theta \cos \phi' \right) \frac{1}{r} \left(1 + \frac{b}{r} \sin \theta \cos \phi' \right) \cos \phi' d\phi'$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I_0 \cos \omega \left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} \right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{\ell}'$$

$$\begin{aligned} b \ll r & \simeq \frac{\mu_0 I_0 b}{4\pi} \hat{y} \int_0^{2\pi} \cos \left(\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) + \frac{\omega b}{c} \sin \theta \cos \phi' \right) \frac{1}{r} \left(1 + \frac{b}{r} \sin \theta \cos \phi' \right) \cos \phi' d\phi' \\ & \quad \underline{\hspace{10em}} \\ & = \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \cos \left(\frac{\omega b}{c} \sin \theta \cos \phi' \right) - \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \sin \left(\frac{\omega b}{c} \sin \theta \cos \phi' \right) \end{aligned}$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I_0 \cos \omega \left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} \right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{\ell}'$$

$$\begin{aligned} b \ll r & \simeq \frac{\mu_0 I_0 b}{4\pi} \hat{y} \int_0^{2\pi} \underbrace{\cos \left(\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) + \frac{\omega b}{c} \sin \theta \cos \phi' \right)}_{= \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \cos \left(\frac{\omega b}{c} \sin \theta \cos \phi' \right) - \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \sin \left(\frac{\omega b}{c} \sin \theta \cos \phi' \right)} \frac{1}{r} \left(1 + \frac{b}{r} \sin \theta \cos \phi' \right) \cos \phi' d\phi' \\ & \simeq \frac{\mu_0 I_0 b}{4\pi r} \hat{y} \int_0^{2\pi} \left(\cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) - \frac{\omega b}{c} \cos \theta \cos \phi' \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right) \left(1 + \frac{b}{r} \sin \theta \cos \phi' \right) \cos \phi' d\phi' \\ b \ll \frac{c}{\omega} & \simeq \frac{\mu_0 I_0 b}{4\pi r} \hat{y} \int_0^{2\pi} \left(\cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) - b \sin \theta \cos \phi' \left(\frac{1}{r} \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) - \frac{\omega}{c} \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right) \right) \cos \phi' d\phi' \end{aligned}$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I_0 \cos \omega \left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} \right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{\ell}'$$

$$\begin{aligned} b \ll r & \simeq \frac{\mu_0 I_0 b}{4\pi} \hat{y} \int_0^{2\pi} \underbrace{\cos \left(\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) + \frac{\omega b}{c} \sin \theta \cos \phi' \right)}_{= \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \cos \left(\frac{\omega b}{c} \sin \theta \cos \phi' \right) - \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \sin \left(\frac{\omega b}{c} \sin \theta \cos \phi' \right)} \frac{1}{r} \left(1 + \frac{b}{r} \sin \theta \cos \phi' \right) \cos \phi' d\phi' \\ & \simeq \frac{\mu_0 I_0 b}{4\pi r} \hat{y} \int_0^{2\pi} \left(\cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) - \frac{\omega b}{c} \cos \theta \cos \phi' \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right) \left(1 + \frac{b}{r} \sin \theta \cos \phi' \right) \cos \phi' d\phi' \\ b \ll \frac{c}{\omega} & \simeq \frac{\mu_0 I_0 b}{4\pi r} \hat{y} \int_0^{2\pi} \left(\cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) - b \sin \theta \cos \phi' \left(\frac{1}{r} \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) - \frac{\omega}{c} \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right) \right) \cos \phi' d\phi' \\ & = \frac{\mu_0 m_0}{4\pi} \frac{\sin \theta}{r} \left(\frac{1}{r} \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) - \frac{\omega}{c} \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right) \hat{y} \end{aligned}$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I_0 \cos \omega \left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} \right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{\ell}'$$

$$\begin{aligned}
 & \stackrel{b \ll r}{\simeq} \frac{\mu_0 I_0 b}{4\pi} \hat{y} \int_0^{2\pi} \underbrace{\cos \left(\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) + \frac{\omega b}{c} \sin \theta \cos \phi' \right)}_{= \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \cos \left(\frac{\omega b}{c} \sin \theta \cos \phi' \right) - \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \sin \left(\frac{\omega b}{c} \sin \theta \cos \phi' \right)} \frac{1}{r} \left(1 + \frac{b}{r} \sin \theta \cos \phi' \right) \cos \phi' d\phi' \\
 & \simeq \frac{\mu_0 I_0 b}{4\pi r} \hat{y} \int_0^{2\pi} \left(\cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) - \frac{\omega b}{c} \cos \theta \cos \phi' \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right) \left(1 + \frac{b}{r} \sin \theta \cos \phi' \right) \cos \phi' d\phi' \\
 & \stackrel{b \ll \frac{c}{\omega}}{\simeq} \frac{\mu_0 I_0 b}{4\pi r} \hat{y} \int_0^{2\pi} \left(\cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) - b \sin \theta \cos \phi' \left(\frac{1}{r} \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) - \frac{\omega}{c} \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right) \right) \cos \phi' d\phi' \\
 & = \frac{\mu_0 m_0}{4\pi} \frac{\sin \theta}{r} \left(\frac{1}{r} \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) - \frac{\omega}{c} \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right) \hat{y}
 \end{aligned}$$

일반적인 $\vec{r}$ 에 대해
 $\hat{y} \rightarrow \hat{\phi}$ 으로 잡을 수 있습니다.

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I_0 \cos \omega \left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} \right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{\ell}'$$

$$\simeq \frac{\mu_0 m_0 \sin \theta}{4\pi r} \left(\frac{1}{r} \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) - \frac{\omega}{c} \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right) \hat{\phi}$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I_0 \cos \omega \left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} \right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{\ell}'$$

$$\simeq \frac{\mu_0 m_0 \sin \theta}{4\pi r} \left(\frac{1}{r} \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) - \frac{\omega}{c} \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right) \hat{\phi}$$

$$\stackrel{r \gg \frac{c}{\omega}}{\simeq} - \frac{\mu_0 m_0 \omega \sin \theta}{4\pi c r} \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \hat{\phi}$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{\mu_0 m_0 \omega^2 \sin \theta}{4\pi c} \frac{1}{r} \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \hat{\phi}$$

이러한 스칼라 및 벡터 퍼텐셜로부터
전기장과 자기장을 계산해 봅시다.

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{\mu_0 m_0 \omega^2 \sin \theta}{4\pi c} \frac{1}{r} \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \hat{\phi}$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = -\frac{\mu_0 m_0 \omega^2 \sin \theta}{4\pi c^2} \frac{1}{r} \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \hat{\theta}$$

이러한 스칼라 및 벡터 퍼텐셜로부터
전기장과 자기장을 계산해 봅시다.

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{\mu_0 m_0 \omega^2 \sin \theta}{4\pi c} \frac{1}{r} \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \hat{\phi}$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = -\frac{\mu_0 m_0 \omega^2 \sin \theta}{4\pi c^2} \frac{1}{r} \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \hat{\theta}$$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B}) = \frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4 \sin^2 \theta}{16\pi^2 c^3} \frac{1}{r^2} \cos^2 \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \hat{r}$$

여기에서 포인팅 벡터를 계산하고
여기에 대한 시간 평균을 구해 봅시다.

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{\mu_0 m_0 \omega^2 \sin \theta}{4\pi c} \frac{1}{r} \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \hat{\phi}$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = -\frac{\mu_0 m_0 \omega^2 \sin \theta}{4\pi c^2} \frac{1}{r} \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \hat{\theta}$$

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4 \sin^2 \theta}{32\pi^2 c^3} \frac{1}{r^2} \hat{r}$$

여기에서 포인팅 벡터를 계산하고
여기에 대한 시간 평균을 구해 봅시다.

$$\langle P \rangle = \frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4}{12\pi c^3}$$

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c^3} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \hat{r}$$

최종적으로 **방사 일률**을 구할 수 있습니다.

$$\frac{P_m}{P_e} = \left(\frac{m_0}{p_0 c} \right)^2 = \left(\frac{\omega b}{c} \right)^2 \ll 1$$

$$m_0 = \pi b^2 I_0$$

$$p_0 = q_0 d$$

$$I_0 = q_0 \omega$$

전기 쌍극자와 자기 쌍극자에 의한 방사 일률을 비교해 봅시다.

$$\frac{P_m}{P_e} = \left(\frac{m_0}{p_0 c} \right)^2 = \left(\frac{\omega b}{c} \right)^2 \ll 1$$

$$m_0 = \pi b^2 I_0$$

$$p_0 = q_0 d$$

$$I_0 = q_0 \omega$$

일반적으로는 전기 쌍극자에 의한 방사 일률이 자기 쌍극자에 의한 것보다 더 크다는 것을 알 수 있습니다.

$$V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

이제 좀 더 일반적인 경우를 다루어 봅시다.

$$\begin{aligned}
 V(\vec{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \\
 &\simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left(\rho(\vec{r}', t_0) + \dot{\rho}(\vec{r}', t_0) \left(\frac{\hat{r} \cdot \vec{r}'}{c} \right) \right) \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} \right) dV'
 \end{aligned}$$

원천이 국소적인 곳에 모여 있어서 $r' \ll r$ 이고, 따라서
 $|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}'} \simeq r \left(1 - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} \right)$ 로 근사할 수 있다면
 위와 같이 전개가 가능합니다.

$$\begin{aligned}
 V(\vec{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \\
 &\simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left(\rho(\vec{r}', t_0) + \dot{\rho}(\vec{r}', t_0) \left(\frac{\hat{r} \cdot \vec{r}'}{c} \right) \right) \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} \right) dV'
 \end{aligned}$$

여기에서 첫 번째 항은 $r' \ll \frac{c}{|\ddot{\rho}/\dot{\rho}|}, \frac{c}{|\ddot{\rho}/\dot{\rho}|^{1/2}}, \dots$ 이라 할 때,
 $t_0 \equiv t - \frac{r}{c}$ 근방에서 시간에 따라 전개한 것입니다.

$$\begin{aligned}
 V(\vec{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \\
 &\simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left(\rho(\vec{r}', t_0) + \dot{\rho}(\vec{r}', t_0) \left(\frac{\hat{r} \cdot \vec{r}'}{c} \right) \right) \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} \right) dV' \\
 &\simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \left(\int \rho(\vec{r}', t_0) dV' + \frac{\hat{r}}{r} \cdot \int \vec{r}' \rho(\vec{r}', t_0) dV' + \frac{\hat{r}}{c} \cdot \frac{d}{dt} \int \vec{r}' \rho(\vec{r}', t_0) dV' \right)
 \end{aligned}$$

이 식을 전개해서 고차 항을 제거하면
위와 같은 식을 얻게 됩니다.

$$\begin{aligned}
V(\vec{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \\
&\simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left(\rho(\vec{r}', t_0) + \dot{\rho}(\vec{r}', t_0) \left(\frac{\hat{r} \cdot \vec{r}'}{c} \right) \right) \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} \right) dV' \\
&\simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \left(\underbrace{\int \rho(\vec{r}', t_0) dV'}_{= Q} + \frac{\hat{r}}{r} \cdot \underbrace{\int \vec{r}' \rho(\vec{r}', t_0) dV'}_{= \vec{p}} + \frac{\hat{r}}{c} \cdot \frac{d}{dt} \underbrace{\int \vec{r}' \rho(\vec{r}', t_0) dV'}_{= \vec{p}} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V(\vec{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \\
&\simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left(\rho(\vec{r}', t_0) + \dot{\rho}(\vec{r}', t_0) \left(\frac{\hat{r} \cdot \vec{r}'}{c} \right) \right) \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} \right) dV' \\
&\simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \left(\underbrace{\int \rho(\vec{r}', t_0) dV'}_{= Q} + \frac{\hat{r}}{r} \cdot \underbrace{\int \vec{r}' \rho(\vec{r}', t_0) dV'}_{= \vec{p}} + \frac{\hat{r}}{c} \cdot \frac{d}{dt} \underbrace{\int \vec{r}' \rho(\vec{r}', t_0) dV'}_{= \vec{p}} \right) \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{r} + \frac{\hat{r} \cdot \vec{p}}{r^2} + \frac{\hat{r} \cdot \dot{\vec{p}}}{rc} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V(\vec{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \\
&\simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left(\rho(\vec{r}', t_0) + \dot{\rho}(\vec{r}', t_0) \left(\frac{\hat{r} \cdot \vec{r}'}{c} \right) \right) \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} \right) dV' \\
&\simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \left(\underbrace{\int \rho(\vec{r}', t_0) dV'}_{= Q} + \frac{\hat{r}}{r} \cdot \underbrace{\int \vec{r}' \rho(\vec{r}', t_0) dV'}_{= \vec{p}} + \frac{\hat{r}}{c} \cdot \frac{d}{dt} \underbrace{\int \vec{r}' \rho(\vec{r}', t_0) dV'}_{= \vec{p}} \right) \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\boxed{\frac{Q}{r}} + \frac{\hat{r} \cdot \vec{p}}{r^2} + \frac{\hat{r} \cdot \dot{\vec{p}}}{rc} \right)
\end{aligned}$$

이 항은 전자기파 방사와
관계가 없습니다.

$$\begin{aligned}
V(\vec{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \\
&\simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left(\rho(\vec{r}', t_0) + \dot{\rho}(\vec{r}', t_0) \left(\frac{\hat{r} \cdot \vec{r}'}{c} \right) \right) \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} \right) dV' \\
&\simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \left(\underbrace{\int \rho(\vec{r}', t_0) dV'}_{= Q} + \frac{\hat{r}}{r} \cdot \underbrace{\int \vec{r}' \rho(\vec{r}', t_0) dV'}_{= \vec{p}} + \frac{\hat{r}}{c} \cdot \frac{d}{dt} \underbrace{\int \vec{r}' \rho(\vec{r}', t_0) dV'}_{= \vec{p}} \right) \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{r} + \boxed{\frac{\hat{r} \cdot \vec{p}}{r^2}} + \frac{\hat{r} \cdot \dot{\vec{p}}}{rc} \right)
\end{aligned}$$

이 항은 고차항으로
무한대에서 무시할 수 있습니다.

$$\begin{aligned}
 V(\vec{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \\
 &\simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left(\rho(\vec{r}', t_0) + \dot{\rho}(\vec{r}', t_0) \left(\frac{\hat{r} \cdot \vec{r}'}{c} \right) \right) \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} \right) dV' \\
 &\simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \left(\underbrace{\int \rho(\vec{r}', t_0) dV'}_{= Q} + \frac{\hat{r}}{r} \cdot \underbrace{\int \vec{r}' \rho(\vec{r}', t_0) dV'}_{= \vec{p}} + \frac{\hat{r}}{c} \cdot \frac{d}{dt} \underbrace{\int \vec{r}' \rho(\vec{r}', t_0) dV'}_{= \vec{p}} \right) \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{r} + \frac{\hat{r} \cdot \vec{p}}{r^2} + \boxed{\frac{\hat{r} \cdot \dot{\vec{p}}}{rc}} \right)
 \end{aligned}$$

따라서 이 항만
전자기파 방사에 기여합니다.

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

마찬가지로 벡터 퍼텐셜도 계산해 봅시다.

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \\ &\simeq \frac{\mu_0}{4\pi r} \int \vec{J}(\vec{r}', t_0) dV'\end{aligned}$$

$r' \ll r$ 인 경우 위와 같이 근사할 수 있습니다.

$$\begin{aligned}
\vec{A}(\vec{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \\
&\simeq \frac{\mu_0}{4\pi r} \int \vec{J}(\vec{r}', t_0) dV' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{\vec{p}}(t_0)}{r}
\end{aligned}$$

전기 쌍극자로 표현하면 위와 같이 나타낼 수 있습니다.
 이 항이 이미 전기 쌍극자 모멘트의 시간 미분에 의존하므로,
 $|\vec{r} - \vec{r}'|$ 의 고차 항은 필요하지 않습니다.

$$-\nabla V \simeq -\nabla \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r} \cdot \vec{p}}{rc} \right) \simeq -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r} \cdot \ddot{\vec{p}}}{rc} (\nabla t_0)$$

이제 전기장과 자기장에 기여하는 항들을
위와 같이 계산해 봅시다.

$$\begin{aligned}
 -\nabla V &\simeq -\nabla \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r} \cdot \dot{\vec{p}}}{rc} \right) \simeq -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r} \cdot \ddot{\vec{p}}}{rc} (\nabla t_0) \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\hat{r} \cdot \ddot{\vec{p}}}{r} \hat{r} \qquad \qquad \qquad = -\frac{\hat{r}}{c}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -\nabla V &\simeq -\nabla \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r} \cdot \vec{\dot{p}}}{rc} \right) \simeq -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r} \cdot \vec{\ddot{p}}}{rc} (\nabla t_0) \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\hat{r} \cdot \vec{\ddot{p}}}{r} \hat{r} \qquad \qquad \qquad = -\frac{\hat{r}}{c}
 \end{aligned}$$

$$-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \simeq -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{\ddot{p}}}{r}$$

$$\begin{aligned}
 -\nabla V &\simeq -\nabla \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r} \cdot \dot{\vec{p}}}{rc} \right) \simeq -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r} \cdot \ddot{\vec{p}}}{rc} (\nabla t_0) \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\hat{r} \cdot \ddot{\vec{p}}}{r} \hat{r} \qquad \qquad \qquad = -\frac{\hat{r}}{c}
 \end{aligned}$$

$$-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \simeq -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\ddot{\vec{p}}}{r}$$

$$\nabla \times \vec{A} \simeq \frac{\mu_0}{4\pi r} \nabla \times \dot{\vec{p}} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \left(\nabla t_0 \times \ddot{\vec{p}}(t_0) \right)$$

$$\begin{aligned}
 -\nabla V &\simeq -\nabla \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r} \cdot \vec{\dot{p}}}{rc} \right) \simeq -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r} \cdot \vec{\ddot{p}}}{rc} (\nabla t_0) \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\hat{r} \cdot \vec{\ddot{p}}}{r} \hat{r} \qquad \qquad \qquad = -\frac{\hat{r}}{c}
 \end{aligned}$$

$$-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \simeq -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{\ddot{p}}}{r}$$

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \vec{A} &\simeq \frac{\mu_0}{4\pi r} \nabla \times \vec{\dot{p}} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \left(\nabla t_0 \times \vec{\ddot{p}}(t_0) \right) \\
 &= -\frac{\mu_0}{4\pi r c} \left(\hat{r} \times \vec{\ddot{p}} \right)
 \end{aligned}$$

$$\vec{E} \simeq \frac{\mu_0}{4\pi r} \left((\hat{r} \cdot \ddot{\vec{p}}) \hat{r} - \ddot{\vec{p}} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \left(\hat{r} \times (\hat{r} \times \ddot{\vec{p}}) \right)$$

$$\vec{B} \simeq -\frac{\mu_0}{4\pi r c} (\hat{r} \times \ddot{\vec{p}})$$

따라서 전기장과 자기장은 위와 같습니다.

$$\vec{E} \simeq \frac{\mu_0}{4\pi r} \left((\hat{r} \cdot \ddot{\vec{p}}) \hat{r} - \ddot{\vec{p}} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \left(\hat{r} \times (\hat{r} \times \ddot{\vec{p}}) \right)$$

$$\vec{B} \simeq -\frac{\mu_0}{4\pi r c} (\hat{r} \times \ddot{\vec{p}})$$

다시 한 번, 전기장과 자기장은 서로 직교하며,
진행 방향은 $\hat{r}$ 방향이 됨을 알 수 있습니다.

$$\vec{E} \simeq \frac{\mu_0}{4\pi r} \left((\hat{r} \cdot \ddot{\vec{p}}) \hat{r} - \ddot{\vec{p}} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \left(\hat{r} \times (\hat{r} \times \ddot{\vec{p}}) \right)$$

$$\vec{B} \simeq -\frac{\mu_0}{4\pi r c} (\hat{r} \times \ddot{\vec{p}})$$

$$\vec{E} \simeq \frac{\mu_0}{4\pi} \ddot{p} \frac{\sin \theta}{r} \hat{\theta}$$

$$\vec{B} \simeq \frac{\mu_0}{4\pi c} \ddot{p} \frac{\sin \theta}{r} \hat{\phi}$$

만일 전기 쌍극자의 방향과 z-축을 같게 놓으면
위와 같이 적을 수 있습니다.

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B}) \simeq \frac{\mu_0}{16\pi^2 c} \ddot{p}^2 \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \hat{r}$$

$$\vec{E} \simeq \frac{\mu_0}{4\pi} \ddot{p} \frac{\sin \theta}{r} \hat{\theta}$$

$$\vec{B} \simeq \frac{\mu_0}{4\pi c} \ddot{p} \frac{\sin \theta}{r} \hat{\phi}$$

포인팅 벡터를 계산해 봅시다.

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B}) \simeq \frac{\mu_0}{16\pi^2 c} \ddot{p}^2 \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \hat{r}$$

$$P \simeq \frac{\mu_0}{6\pi c} \ddot{p}^2$$

이것으로부터 **방사 일률**을 계산할 수 있습니다.

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B}) \simeq \frac{\mu_0}{16\pi^2 c} \ddot{p}^2 \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \hat{r}$$

$$P \simeq \frac{\mu_0}{6\pi c} \ddot{p}^2 = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{6\pi c}$$

$$\vec{p} = q\vec{d} = qd \cos \omega t \hat{d}$$

$$\ddot{\vec{p}} = q\ddot{\vec{d}} = -qd\omega^2 \cos \omega t \hat{d}$$

전기 쌍극자가 진동하는 경우
위와 같이 **가속도**로 표현할 수 있습니다.

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B}) \simeq \frac{\mu_0}{16\pi^2 c} \ddot{p}^2 \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \hat{r}$$

$$P \simeq \frac{\mu_0}{6\pi c} \ddot{p}^2 = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{6\pi c}$$

$$\vec{p} = q\vec{d} = qd \cos \omega t \hat{d}$$

$$\ddot{\vec{p}} = q\ddot{\vec{d}} = -qd\omega^2 \cos \omega t \hat{d}$$

이것을 라모 공식 Larmor formula 이라고 합니다.

이제 우리의 관심을
가속 운동하는 점전하에서의 방사로
 옮겨 봅시다.

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{((\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{u})^3} \left((c^2 - v^2)\vec{u} + (\vec{r} - \vec{r}') \times (\vec{u} \times \vec{a}) \right)$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \widehat{(\vec{r} - \vec{r}')} \times \vec{E}$$

먼저 리에나르-비케르트 전위로부터
전기장과 자기장이 위와 같이 표현된다는 것으로부터
출발합시다.

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{((\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{u})^3} \left((c^2 - v^2)\vec{u} + (\vec{r} - \vec{r}') \times (\vec{u} \times \vec{a}) \right)$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \widehat{(\vec{r} - \vec{r}')} \times \vec{E}$$

위의 전기장 식에서, 첫 번째 항은 r^{-2} 에 비례하고
 두 번째 항은 r^{-1} 에 비례하므로
 최종적으로 두 번째 항만 방사에 기여하게 될 것입니다.

$$\vec{E}_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{\left((\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{u}\right)^3} \left((\vec{r} - \vec{r}') \times (\vec{u} \times \vec{a})\right)$$

따라서 방사에 기여하는 성분만을 취해 봅시다.

$$\begin{aligned}
 \vec{E}_r &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{\left((\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{u}\right)^3} \left((\vec{r} - \vec{r}') \times (\vec{u} \times \vec{a})\right) \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 |\vec{r} - \vec{r}'|} \left(\widehat{(\vec{r} - \vec{r}')} \times (\widehat{(\vec{r} - \vec{r}')} \times \vec{a})\right)
 \end{aligned}$$

속도 $\vec{v}$ 를 순간적으로 무시할 수 있어서
 $\vec{u} = c\widehat{(\vec{r} - \vec{r}')}$ 으로 놓을 수 있으면
 위와 같이 전개가 가능합니다.

$$\begin{aligned}
\vec{E}_r &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{\left((\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{u}\right)^3} \left((\vec{r} - \vec{r}') \times (\vec{u} \times \vec{a})\right) \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 |\vec{r} - \vec{r}'|} \left(\widehat{(\vec{r} - \vec{r}')} \times (\widehat{(\vec{r} - \vec{r}')} \times \vec{a})\right) \\
&= \frac{\mu_0 q}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|} \left(\left(\widehat{(\vec{r} - \vec{r}')} \cdot \vec{a}\right) \widehat{(\vec{r} - \vec{r}')} - \vec{a}\right)
\end{aligned}$$

속도 $\vec{v}$ 를 순간적으로 무시할 수 있어서
 $\vec{u} = c\widehat{(\vec{r} - \vec{r}')}$ 으로 놓을 수 있으면
 위와 같이 전개가 가능합니다.

$$\vec{E}_r = \frac{\mu_0 q}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|} \left(((\widehat{\vec{r} - \vec{r}'} \cdot \vec{a}) (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'} - \vec{a}) \right)$$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0 c} E_r^2 (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})$$

전기장과 자기장이 서로 수직이며
파동의 전파 방향이 $(\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})$ 이므로
포인팅 벡터는 위와 같이 기술됩니다.

$$\vec{E}_r = \frac{\mu_0 q}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|} \left(((\widehat{\vec{r} - \vec{r}'} \cdot \vec{a}) (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'} - \vec{a}) \right)$$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0 c} E_r^2 (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})$$

$$= \frac{1}{\mu_0 c} \left(\frac{\mu_0 q}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|} \right)^2 \left(a^2 - (\vec{a} \cdot (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'}))^2 \right) (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})$$

좀 더 구체적으로 전개하면 위와 같습니다.

$$\vec{E}_r = \frac{\mu_0 q}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|} \left(((\widehat{\vec{r} - \vec{r}'}) \cdot \vec{a}) (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'}) - \vec{a} \right)$$

$$\begin{aligned} \vec{S} &= \frac{1}{\mu_0 c} E_r^2 (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'}) \\ &= \frac{1}{\mu_0 c} \left(\frac{\mu_0 q}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|} \right)^2 \left(a^2 - (\underbrace{\vec{a} \cdot (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}_{= a \cos \theta})^2 \right) (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'}) \\ &= \frac{\mu_0 q^2 a^2 \sin^2 \theta}{16\pi^2 c |\vec{r} - \vec{r}'|^2} (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'}) \end{aligned}$$

$$\vec{S} = \frac{\mu_0 q^2 a^2 \sin^2 \theta}{16\pi^2 c |\vec{r} - \vec{r}'|^2} (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})$$

$$P = \oint \vec{S} \cdot d\vec{A} = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{6\pi c}$$

따라서 포인팅 벡터를 적분하면
 방사 일률을 얻을 수 있습니다.
 이 결과는 라모 공식과 같지만,
 속도를 순간적으로 무시할 수 있는 경우에만 적용됩니다.

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{d^2W}{d\Omega d\mathbf{t}_r} = \frac{1}{\left(\frac{\partial \mathbf{t}_r}{\partial \mathbf{t}}\right)} \frac{d^2W}{d\Omega d\mathbf{t}}$$

$$\frac{d^2W}{d\Omega d\mathbf{t}} = \vec{S} \cdot (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'}) |\vec{r} - \vec{r}'|^2$$

$\vec{v}$ 를 무시할 수 없는 경우에는
 자연 시간에 계산한 일률과
 관찰하는 시간에 계산한 일률 사이에
 위와 같은 보정을 고려해야 합니다.

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{d^2W}{d\Omega d\mathbf{t}_r} = \boxed{\left(\frac{\partial \mathbf{t}_r}{\partial t}\right)} \frac{d^2W}{d\Omega d\mathbf{t}}$$

$$\frac{d^2W}{d\Omega d\mathbf{t}} = \vec{S} \cdot (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'}) |\vec{r} - \vec{r}'|^2$$

$$\boxed{\vec{S} = \frac{1}{\mu_0 c} E_r^2 (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}$$

한 편, 다음과 같은 관계를 증명할 수 있습니다.

$$\frac{\partial \mathbf{t}_r}{\partial t} = \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|c}{(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{u}}$$

$$\vec{E}_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{((\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{u})^3} ((\vec{r} - \vec{r}') \times (\vec{u} \times \vec{a}))$$

$$\frac{dP}{d\Omega} = \left(\frac{(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{u}}{|\vec{r} - \vec{r}'|c} \right) \frac{E_r^2}{\mu_0 c} |\vec{r} - \vec{r}'|^2$$

$$= \left(\frac{(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{u}}{\mu_0 c^2} \right) |\vec{r} - \vec{r}'| \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{((\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{u})^3} |(\vec{r} - \vec{r}') \times (\vec{u} \times \vec{a})| \right)^2$$

이것을 모두 대입하면 위와 같은 결과를 얻습니다.

$$\vec{E}_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{((\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{u})^3} ((\vec{r} - \vec{r}') \times (\vec{u} \times \vec{a}))$$

$$\frac{dP}{d\Omega} = \left(\frac{(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{u}}{|\vec{r} - \vec{r}'|c} \right) \frac{E_r^2}{\mu_0 c} |\vec{r} - \vec{r}'|^2$$

$$= \left(\frac{(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{u}}{\mu_0 c^2} \right) |\vec{r} - \vec{r}'| \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{((\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{u})^3} |(\vec{r} - \vec{r}') \times (\vec{u} \times \vec{a})| \right)^2$$

$$= \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0} \frac{|(\widehat{\vec{r} - \vec{r}'} \times (\vec{u} \times \vec{a}))|^2}{((\widehat{\vec{r} - \vec{r}'} \cdot \vec{u})^5}$$

이것을 모두 대입하면 위와 같은 결과를 얻습니다.

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$P = \frac{\mu_0 q^2 \gamma^6}{6\pi c} \left(a^2 - \left| \frac{\vec{v} \times \vec{a}}{c} \right|^2 \right)$$

마지막으로 $d\Omega$ 적분을 해서 최종 방사 일률을 구합니다.
 이것을 **리에나르의 일반화** Lienard's generalization 라고 부릅니다.
 $\vec{v} = 0$ 인 경우에는 라모 공식을 따름을 알 수 있습니다.

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$P = \frac{\mu_0 q^2 \gamma^6}{6\pi c} \left(a^2 - \left| \frac{\vec{v} \times \vec{a}}{c} \right|^2 \right)$$

앞에서 얻은 $dP/d\Omega$ 를 적분하는 것은 쉽지 않습니다.
 그러나 리에나르의 일반화를 증명하는 좀 더 멋진 방법이 있습니다.
 이것은 특수 상대론을 사용하는 것입니다.

속도 v 로 운동하는 전하를 생각해봅시다.

우리가 관성 좌표계를 잘 선택해서 **관성 좌표계의 속도를 v 로** 만들면
이 관성 좌표계에서는 라모 공식이 잘 맞으리라는 것을 알 수 있습니다.

$$P' = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{6\pi c}$$

속도 v 로 운동하는 전하를 생각해봅시다.

우리가 관성 좌표계를 잘 선택해서 **관성 좌표계의 속도를 v 로** 만들면
이 관성 좌표계에서는 라모 공식이 잘 맞으리라는 것을 알 수 있습니다.
여기에서 가속도의 제곱 항이 **로렌츠 스칼라**라는 것을 기억해 봅시다.

$$P' = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{6\pi c} = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} (a^\mu a_\mu)$$

속도 $\vec{v}$ 로 운동하는 전하를 생각해봅시다.

우리가 관성 좌표계를 잘 선택해서 **관성 좌표계의 속도를 $\vec{v}$ 로** 만들면
이 관성 좌표계에서는 라모 공식이 잘 맞으리라는 것을 알 수 있습니다.
여기에서 가속도의 제곱 항이 **로렌츠 스칼라**라는 것을 기억해 봅시다.

$$P' = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{6\pi c} = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} (a^\mu a_\mu)$$

이제 이 결과를 **정지 좌표계**로 옮겨 봅시다.

4차원 좌표 $x^\mu = (ct, \vec{x})$ 에 대해 **속도**와 **가속도**는 아래와 같이 적을 수 있습니다.

$$\frac{dx^\mu}{d\tau} = \left(c \frac{dt}{d\tau}, \frac{dt}{d\tau} \frac{d\vec{x}}{dt} \right) = (c\gamma, \gamma\vec{v})$$

속도 $\vec{v}$ 로 운동하는 전하를 생각해봅시다.

우리가 관성 좌표계를 잘 선택해서 **관성 좌표계의 속도를 $\vec{v}$ 로** 만들면
이 관성 좌표계에서는 라모 공식이 잘 맞으리라는 것을 알 수 있습니다.
여기에서 가속도의 제곱 항이 **로렌츠 스칼라**라는 것을 기억해 봅시다.

$$P' = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{6\pi c} = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} (a^\mu a_\mu)$$

이제 이 결과를 **정지 좌표계**로 옮겨 봅시다.

4차원 좌표 $x^\mu = (ct, \vec{x})$ 에 대해 **속도**와 **가속도**는 아래와 같이 적을 수 있습니다.

$$\frac{dx^\mu}{d\tau} = \left(c \frac{dt}{d\tau}, \frac{dt}{d\tau} \frac{d\vec{x}}{dt} \right) = (c\gamma, \gamma\vec{v})$$
$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = \left(\gamma^4 \frac{(\vec{v} \cdot \vec{a})}{c}, \gamma^4 \frac{(\vec{v} \cdot \vec{a})}{c^2} \vec{v} + \gamma^2 \vec{a} \right)$$

$$\frac{d\gamma}{d\tau} = \gamma^4 \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2}$$

속도 $\vec{v}$ 로 운동하는 전하를 생각해봅시다.

우리가 관성 좌표계를 잘 선택해서 **관성 좌표계의 속도를 $\vec{v}$ 로** 만들면
이 관성 좌표계에서는 라모 공식이 잘 맞으리라는 것을 알 수 있습니다.
여기에서 가속도의 제곱 항이 **로렌츠 스칼라**라는 것을 기억해 봅시다.

$$P = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} (a^\mu a_\mu)$$

이제 위의 식에 가속도의 제곱 항을 대입해 봅시다.

$$a^\mu a_\mu = \gamma^4 \left(\frac{(\vec{v} \cdot \vec{a})}{c^2 - v^2} + a^2 \right)$$

정리하면 리에나르의 일반화를 얻습니다.

$$P = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} (a^\mu a_\mu) = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \gamma^6 \left(a^2 - \frac{|\vec{a} \times \vec{v}|^2}{c^2} \right)$$

정리하면 리에나르의 일반화를 얻습니다.

$$P = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} (a^\mu a_\mu) = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \gamma^6 \left(a^2 - \frac{|\vec{a} \times \vec{v}|^2}{c^2} \right)$$

즉, 리에나르의 일반화는 라모 공식에 대한 특수 상대론적 효과를 반영한 것입니다.

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0} \frac{|\widehat{(\vec{r} - \vec{r}')} \times (\vec{u} \times \vec{a})|^2}{((\widehat{(\vec{r} - \vec{r}')} \cdot \vec{u})^5}$$

$$\vec{u} \times \vec{a} = c(\widehat{(\vec{r} - \vec{r}')} \times \vec{a})$$

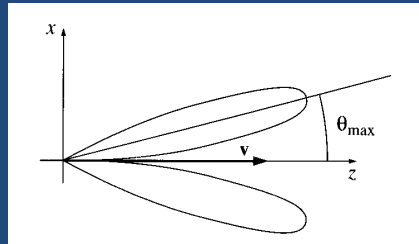
$$\vec{v} \parallel \hat{z} = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{16\pi^2 c} \frac{\sin^2 \theta}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right)^5}$$

두 가지 중요한 예를 살펴보겠습니다.
먼저 $\vec{a} \parallel \vec{v}$ 인 경우입니다.

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0} \frac{|\widehat{(\vec{r} - \vec{r}')} \times (\vec{u} \times \vec{a})|^2}{((\widehat{(\vec{r} - \vec{r}')} \cdot \vec{u})^5}$$

$$\vec{u} \times \vec{a} = c(\widehat{(\vec{r} - \vec{r}')} \times \vec{a})$$

$$\vec{v} \parallel \hat{z} = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{16\pi^2 c} \frac{\sin^2 \theta}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right)^5}$$



속도가 커질 수록 전자기파 방사는 $\hat{z}$ -축을 향한다는 것을 알 수 있습니다.

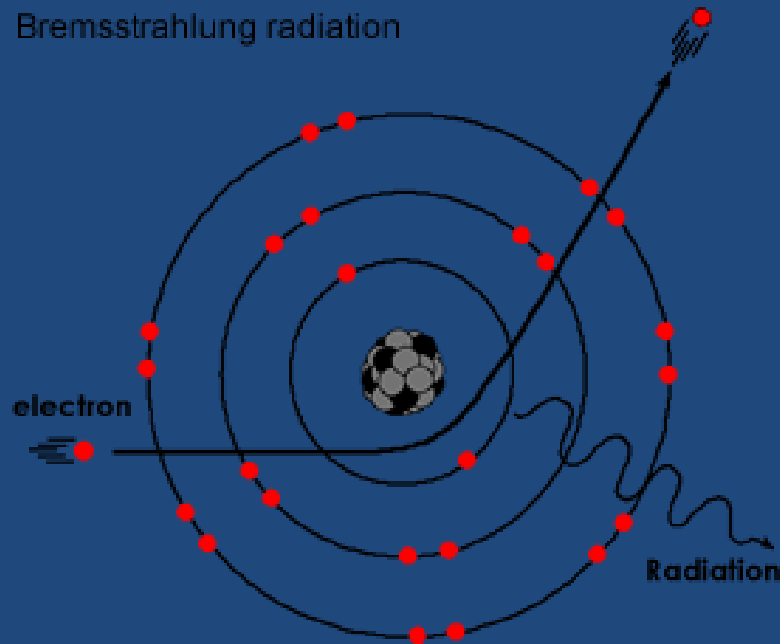
$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0} \frac{|\widehat{(\vec{r} - \vec{r}')} \times (\vec{u} \times \vec{a})|^2}{((\widehat{(\vec{r} - \vec{r}')} \cdot \vec{u})^5}$$

$$\vec{u} \times \vec{a} = c(\widehat{(\vec{r} - \vec{r}')} \times \vec{a})$$

$$\stackrel{\vec{v} \parallel \hat{z}}{=} \frac{\mu_0 q^2 a^2}{16\pi^2 c} \frac{\sin^2 \theta}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right)^5}$$

$$P = \frac{\mu_0 q^2 a^2 \gamma^6}{6\pi c}$$

$d\Omega$ 적분을 하면 위와 같은 결과를 얻습니다.



전하가 진행 방향으로 감속하는 경우 이러한 에너지가 방사됩니다.
이러한 경우를 **제동 방사**Bremsstrahlung라고 합니다.

$$P = \frac{\mu_0 q^2 a^2 \gamma^4}{6\pi c}$$



또 다른 중요한 예는 $\vec{a} \perp \vec{v}$ 인 경우입니다.
 이 때는 위와 같은 방사 일률을 얻게 됩니다.
 이것을 싱크로트론 복사synchrotron radiation라고 합니다.

마지막으로 이러한 방사 효과가
가속하는 전하에 미치는 효과를 살펴봅시다.

에너지가 방사되면 에너지 보존에 의해
입자의 운동이 방해될 것으로 보입니다.
이러한 효과는 어떻게 다루어 질 수 있을까요?

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_r \cdot \vec{v} dt = - \int_{t_1}^{t_2} P dt = - \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \int_{t_1}^{t_2} a^2 dt$$

↑
라모 공식

전하가 t_1 과 t_2 사이에서 주기운동을 한다고 가정하고
 이 두 시간 사이에 방사 반작용력 $\vec{F}_r$ 에 의한
 평균 일을 구해보도록 합시다.

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_r \cdot \vec{v} dt = - \int_{t_1}^{t_2} P dt = - \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \int_{t_1}^{t_2} a^2 dt$$

↑
라모 공식

$$= - \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} dt$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_r \cdot \vec{v} dt = - \int_{t_1}^{t_2} P dt = - \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \int_{t_1}^{t_2} a^2 dt$$

↑ 라모 공식

↓ 부분 적분

$$= - \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} dt = - \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \left(\underbrace{\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}}_{\substack{\text{주기 운동을 가정하면} \\ \text{이 항은 사라지게 됩니다.}}} \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \vec{v} \cdot \frac{d^2 \vec{v}}{dt^2} dt \right)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_r \cdot \vec{v} dt = - \int_{t_1}^{t_2} P dt = - \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \int_{t_1}^{t_2} a^2 dt$$

라모 공식

부분 적분

$$= - \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} dt = - \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \left(\underbrace{\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}}_{\substack{\text{주기 운동을 가정하면} \\ \text{이 항은 사라지게 됩니다.}}} \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \vec{v} \cdot \frac{d^2 \vec{v}}{dt^2} dt \right)$$

$$= + \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \left(\int_{t_1}^{t_2} \vec{v} \cdot \dot{\vec{a}} dt \right)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\vec{F}_r - \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \dot{\vec{a}} \right) \cdot \vec{v} dt = 0$$

따라서 위의 식이 성립해야 합니다.

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\vec{F}_r - \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \dot{\vec{a}} \right) \cdot \vec{v} dt = 0$$

$$\vec{F}_r = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \dot{\vec{a}}$$

즉, 방사 반작용력 $\vec{F}_r$ 은 위와 같은 관계를 만족해야 합니다.
이것을 **아브라함-로렌츠 공식** Abraham-Lorentz formula이라고 합니다.

아브라함-로렌츠 공식을 외력이 없는 경우에 적용하면,
아래와 같은 방정식을 얻게 됩니다.

$$ma = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \dot{a} \equiv m\tau \dot{a}$$

아브라함-로렌츠 공식을 외력이 없는 경우에 적용하면,
아래와 같은 방정식을 얻게 됩니다.

$$ma = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \dot{a} \equiv m\tau \dot{a}$$

이 때, 일반해는 다음과 같습니다.

$$a(t) = a_0 e^{+\frac{t}{\tau}}$$

따라서 무한대에서 발산하지 않는 해는 $a_0 = 0$ 을 만족해야만 합니다.

외력이 있는 경우에는 아래와 같은 방정식을 얻게 됩니다.

$$a = \tau \dot{a} + \frac{F}{m}$$

일반적으로 뉴턴 방정식은 2차 미분 방정식이기 때문에 위치와 속력이 연속이면 운동 방정식을 만족시킬 수 있습니다. 즉, 가속도는 연속일 필요가 없습니다.

그러나 아브라함-로렌츠 방정식에는 가속도의 시간 미분이 들어있으므로, 3차 미분 방정식이 됩니다. 따라서 가속도도 연속이어야 합니다.

외력이 있는 경우에는 아래와 같은 방정식을 얻게 됩니다.

$$a = \tau \dot{a} + \frac{F}{m}$$

이것을 염두에 두고, F 가 $0 < t < T$ 사이에만 작용하는 경우를 생각해 봅시다.

$$t < 0 \qquad a(t) = Ae^{+\frac{t}{\tau}}$$

$$0 < t < T \qquad = \frac{F}{m} + Be^{+\frac{t}{\tau}}$$

$$T < t \qquad = Ce^{+\frac{t}{\tau}}$$

외력이 있는 경우에는 아래와 같은 방정식을 얻게 됩니다.

$$a = \tau \dot{a} + \frac{F}{m}$$

가속도의 연속성을 고려하면 다음과 같습니다.

$$\begin{aligned} t < 0 & \quad a(t) = \left(\frac{F}{m} + B \right) e^{+\frac{t}{\tau}} \\ 0 < t < T & \quad = \frac{F}{m} + B e^{+\frac{t}{\tau}} \\ T < t & \quad = \left(\frac{F}{m} e^{-\frac{T}{\tau}} + B \right) e^{\frac{t}{\tau}} \end{aligned}$$

외력이 있는 경우에는 아래와 같은 방정식을 얻게 됩니다.

$$a = \tau \dot{a} + \frac{F}{m}$$

시간이 무한대일 때 발산하지 않는 조건을 취하면 다음과 같습니다.

$$\begin{aligned} t < 0 & \quad a(t) = \frac{F}{m} \left(1 - e^{-\frac{T}{\tau}} \right) e^{+\frac{t}{\tau}} \\ 0 < t < T & \quad = \frac{F}{m} \left(1 - e^{+\frac{t-T}{\tau}} \right) \\ T < t & \quad = 0 \end{aligned}$$

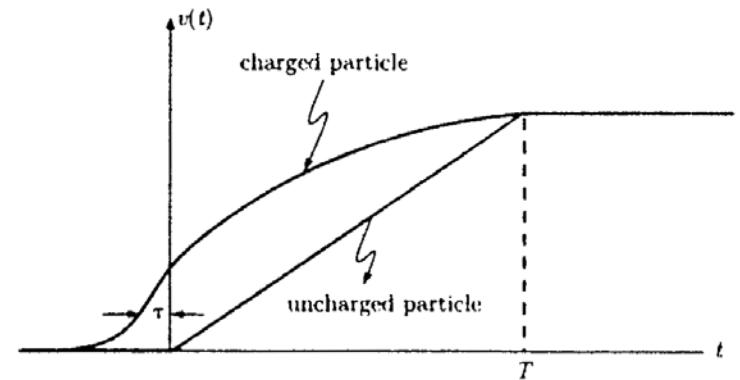
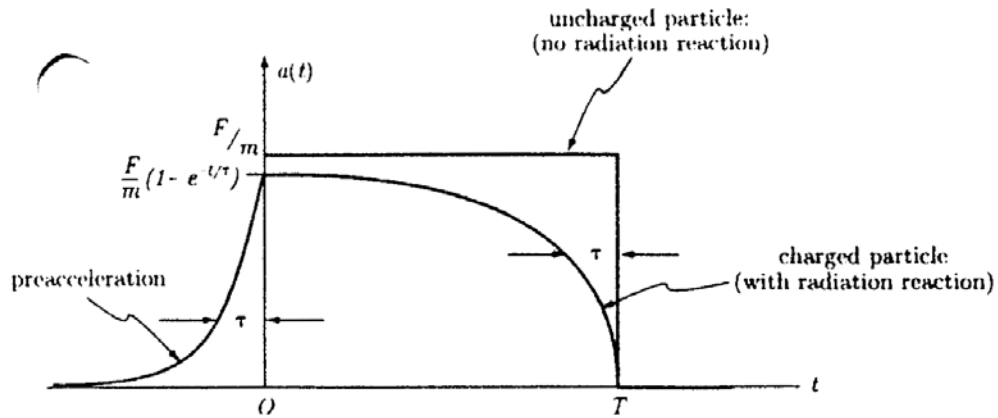
외력이 있는 경우에는 아래와 같은 방정식을 얻게 됩니다.

$$a = \tau \dot{a} + \frac{F}{m}$$

시간이 무한대일 때 발산하지 않는 조건을 취하면 다음과 같습니다.

$$\begin{aligned} t < 0 & \quad a(t) = \frac{F}{m} \left(1 - e^{-\frac{T}{\tau}}\right) e^{+\frac{t}{\tau}} \\ 0 < t < T & \quad = \frac{F}{m} \left(1 - e^{+\frac{t-T}{\tau}}\right) \\ T < t & \quad = 0 \end{aligned}$$

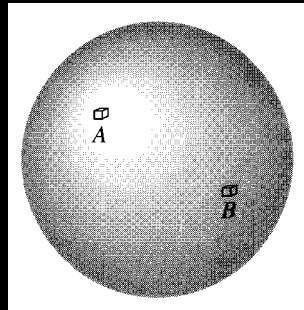
놀랍게도 이 해는 힘이 작용하기 전, 즉 $t < 0$ 인 영역에서 미리 가속해야 합니다.
이것은 인과율을 위반하는 것으로 보입니다.



이러한 현상을 어떻게 이해할 수 있을까요?

방사 반작용력이란 대체 어떤 물리적 의미를 가질까요?

아브라함-로렌츠 공식은
방사하는 전하의 자체 힘_{self-force}에서 비롯됩니다.



위와 같이 전하를 가정하고
각 부분들이 만들어 내는 힘들을 모두 더해서
전하의 자체 힘을 구한 뒤에,
전하의 크기를 0으로 보내면
아브라함-로렌츠 공식을 다시 얻을 수 있습니다.

이러한 아브라함-로렌츠 공식에
인과율의 문제가 발생한다는 것은
전하의 크기를 0으로 보낼 수 없다는 것을 의미할 수도 있습니다.

이 문제는 양자역학의 불확정성에 의해
해결될 수 있을 것으로 생각됩니다.
즉, 고전 전자기학의 모순점이
양자역학의 전조를 암시하는 것일 수도 있겠습니다.

감사합니다