

제12장

전자기학과 상대론

이번 장에서는 고전 전자기학이 가진
좀 더 깊은 의미를 살펴봅니다.
이것은 아인슈타인의
특수 상대성 이론special theory of relativity과 관련됩니다.

상대성relativity이란 무엇일까요?
이 질문을 이해하기 위해서
우리는 전자기학 과목을 시작하면서 했던 질문을
다시 기억할 필요가 있습니다.



우리는 자연에 존재하는 시각적, 기하학적, 또는 감각적 현상을
수로 표현하고자 합니다.



그런데 문제는 현상을 수로 대응시키는
유일한 방법은 존재하지 않는다는 것입니다.
현상과 수 사이의 관계는 좌표의 선택에 의존합니다.

대상/배경

object/background

힘/장

force/field

운동

motion

장 방정식
field equation

운동 방정식
equation of motion

그렇다면 자연의 법칙을 이해하는 과정도
주관적인 좌표의 설정에 의존을 하게 될까요?

우리는 객관적인 세계의 물리 현상은 주관적인 좌표의 설정에
무관해야 한다는 것을 확신을 가지고 말할 수 있습니다.

우리는 객관적인 세계의 물리 현상은 주관적인 좌표의 설정에
무관해야 한다는 것을 확신을 가지고 말할 수 있습니다.

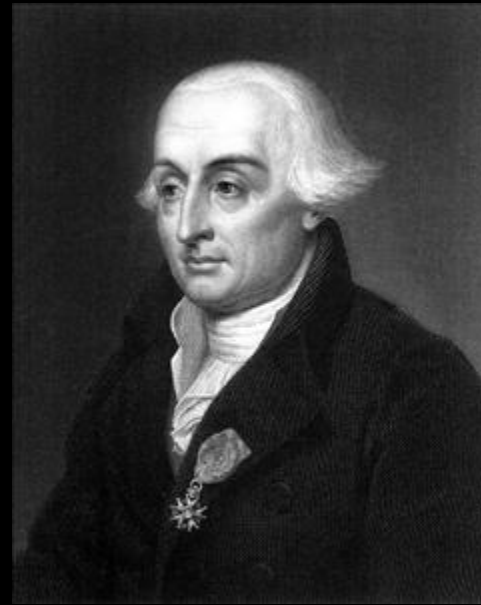
그렇다면 우리가 자연을 이해하는 방식,
즉 자연을 결정하는 방정식은
그 값 자체는 좌표의 설정에 의존하지만
수학적인 형태가 좌표의 설정과 무관하게,
즉 좌표 변환에 대해 일정한 방식으로
함께 변해야 한다는 것을
말할 수 있습니다.

이것을 공변성covariance이라고 합니다.

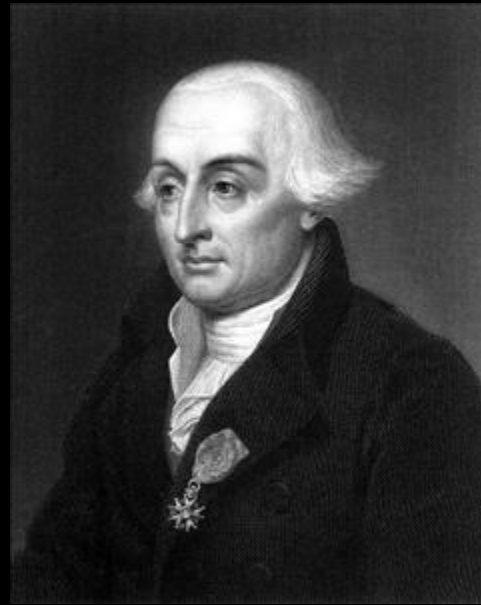
따라서 방정식을 구성하는 요소들은
공변성을 표현하기 쉬운 방식으로 표현되어야 합니다.
즉, 좌표변환에 대해서 일정한 패턴으로 변환하는 요소들을
기본적인 구성 요소building block로 삼아야 합니다.

즉, 상대성relativity이란
자연 법칙 또는 방정식이
좌표의 설정과는 무관하게
또는 좌표의 설정에 따라 적당히 공변적으로
기술되어야 한다는 것을 의미합니다.

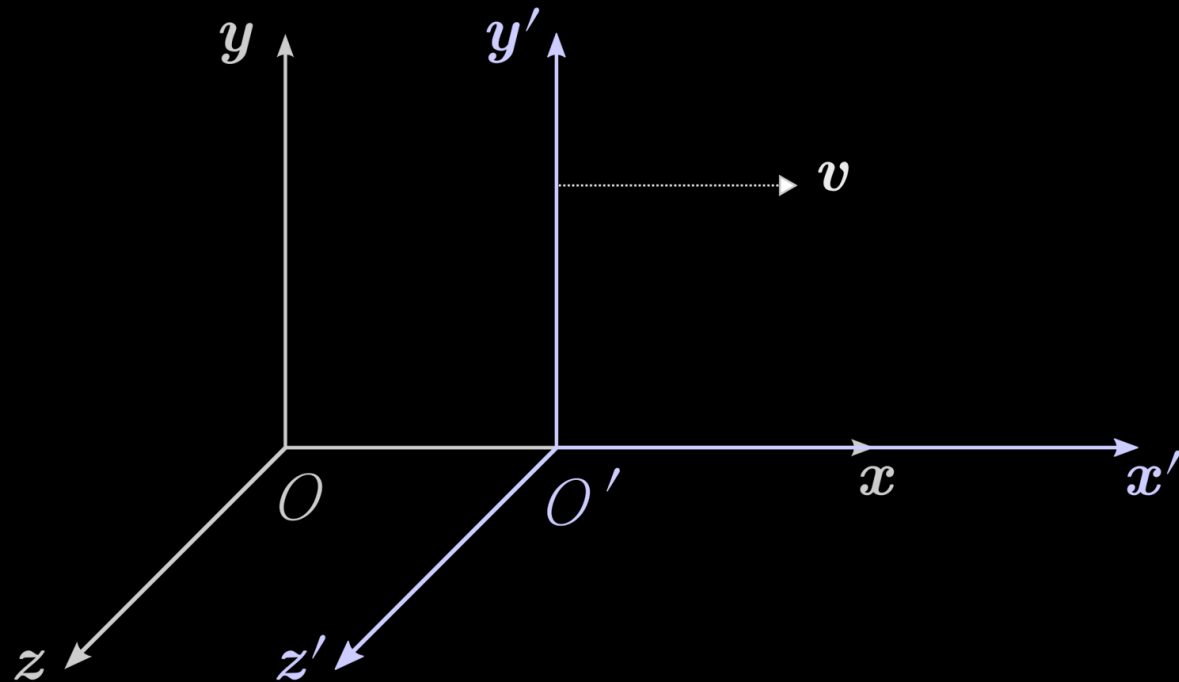
그러면 좌표의 설정에 있어서
우리가 고려해야 할 사항은
어떤 것이 있을까요?



예를 들어, 오일러와 라그랑주는
일반화 좌표계를 사용해서
운동 방정식을 일반화 좌표계의 선택과는 무관하게
기술하는 방법을 고안했습니다.



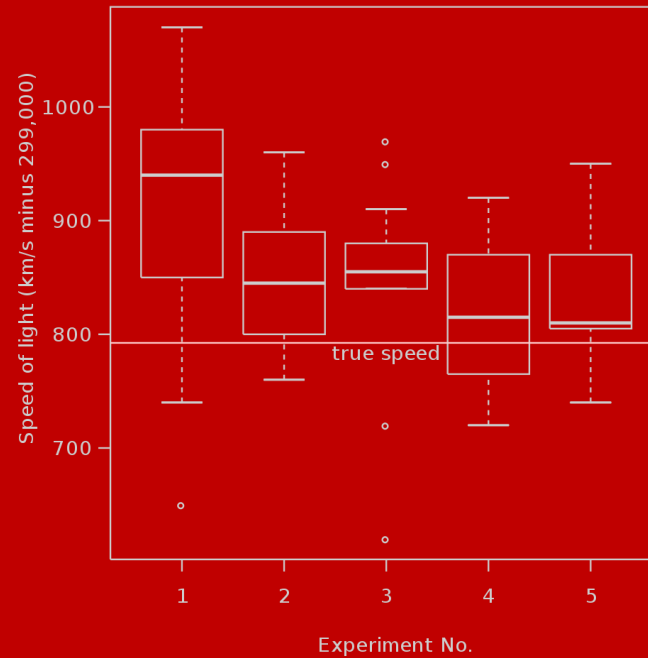
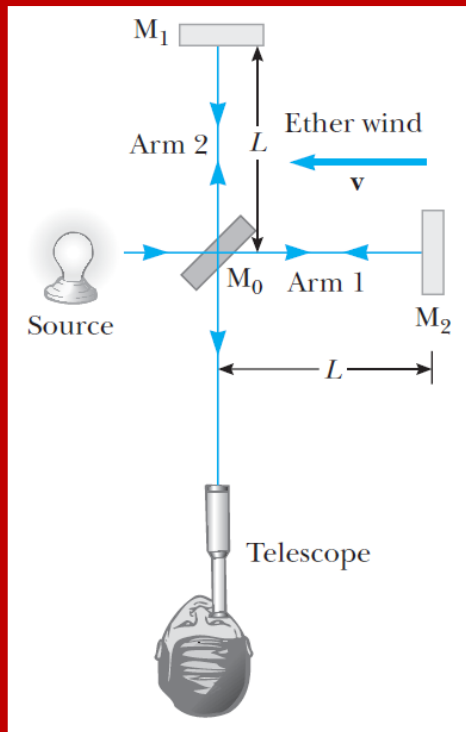
그러나 여기에는 좌표의 운동에 대한 정보는
반영되어 있지 않습니다.



등속 운동하는 좌표계에 대한 상대성을 다룬 것이
특수 상대성 이론이고,
좀 더 일반적인 좌표계에 대한 상대성을 다룬 것이
일반 상대성 이론입니다.

뉴턴의 운동 방정식은 갈릴레이 변환에 대해 공변합니다.
그러나 맥스웰 방정식은 그렇지 않습니다.

어쩌면 이것은 뉴턴 역학의 관점에서는
맥스웰 방정식을 기술하는 올바른 좌표계가 있다는 것,
또는 전자기파가 전달되는 어떤 매질이 있다는 것을
의미할 수도 있습니다.



그러나 전자기파를 매개하는 매질,
즉 **에테르**의 존재를 실험적으로 확인하는 것은
마이켈슨-몰리의 실험으로도
실패하고 맙니다.

그렇다면 맥스웰 방정식을
공변적이게 하는
맞춤형 변환은 무엇일까요?

3. Zur Elektrodynamik bewegter Körper;
von A. Einstein.

Daß die Elektrodynamik Maxwells — wie dieselbe gegenwärtig aufgefaßt zu werden pflegt — in ihrer Anwendung auf bewegte Körper zu Asymmetrien führt, welche den Phänomenen nicht anzuhafsten scheinen, ist bekannt. Man denke z. B. an die elektrodynamische Wechselwirkung zwischen einem Magneten und einem Leiter. Das beobachtbare Phänomen hängt hier nur ab von der Relativbewegung von Leiter und Magnet, während nach der üblichen Auffassung die beiden Fälle, daß der eine oder der andere dieser Körper der bewegte sei, streng voneinander zu trennen sind. Bewegt sich nämlich der Magnet und ruht der Leiter, so entsteht in der Umgebung des Magneten ein elektrisches Feld von gewissem Energiewerte, welches an den Orten, wo sich Teile des Leiters befinden, einen Strom erzeugt. Ruht aber der Magnet und bewegt sich der Leiter, so entsteht in der Umgebung des Magneten kein elektrisches Feld, dagegen im Leiter eine elektromotorische Kraft, welcher an sich keine Energie entspricht, die aber — Gleichheit der Relativbewegung bei den beiden ins Auge gefaßten Fällen vorausgesetzt — zu elektrischen Strömen von derselben Größe und demselben Verlaufe Veranlassung gibt, wie im ersten Falle die elektrischen Kräfte.

Beispiele ähnlicher Art, sowie die mißlungenen Versuche, eine Bewegung der Erde relativ zum „Lichtmedium“ zu konstatieren, führen zu der Vermutung, daß dem Begriffe der absoluten Ruhe nicht nur in der Mechanik, sondern auch in der Elektrodynamik keine Eigenschaften der Erscheinungen entsprechen, sondern daß vielmehr für alle Koordinatensysteme, für welche die mechanischen Gleichungen gelten, auch die gleichen elektrodynamischen und optischen Gesetze gelten, wie dies für die Größen erster Ordnung bereits erwiesen ist. Wir wollen diese Vermutung (deren Inhalt im folgenden „Prinzip der Relativität“ genannt werden wird) zur Voraussetzung erheben und außerdem die mit ihm nur scheinbar unverträgliche

움직이는 물체의 전기 동역학에 대하여
- 아인슈타인, 1905년

1905년 아인슈타인은 다음과 같은 두 가지 가정을 합니다.

1. 상대성 원리
2. 광속도 불변의 원리

1905년 아인슈타인은 다음과 같은 두 가지 가정을 합니다.

1. 상대성 원리
2. 광속도 불변의 원리

이 두 가지 가정에 추가로
좌표 변환이 연속적인 선형 변환이며
속력이 작을 때는 갈릴레이 변환이 된다고 한다면
수학적으로 다음과 같은 형태의 변환만이 허용됩니다.

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

이 변환을 로렌츠 변환 Lorentz transformation 이라고 합니다.

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

x 방향으로
등속 운동하는 좌표계

정지 좌표계

이 변환을 로렌츠 변환 Lorentz transformation 이라고 합니다.

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \beta \equiv \frac{v}{c}$$

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

x 방향으로
등속 운동하는 좌표계

정지 좌표계

이 변환을 로렌츠 변환 Lorentz transformation 이라고 합니다.

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$$

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

좀 더 추상적으로는 위와 같은 텐서로 표현이 가능합니다.

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$$

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

여기에 아인슈타인의 덧셈 규약 summation convention이
사용되었습니다.

$\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ 이고, 특히 0은 시간을 의미합니다.

$$x^\mu x_\mu = -c^2 t^2 + x^2 + y^2 + z^2$$

광속도 불변이라는 것은
위와 같은 조합이 상수라는 것을 의미합니다.
여기에서 시간 부분의 부호가 공간 부분의 부호와
다르다는 것이 중요합니다.

$$x^\mu x_\mu = -c^2 t^2 + x^2 + y^2 + z^2$$

$$x^\mu = (ct, \vec{x}) \quad \text{반변 벡터}$$

$$x_\mu = (-ct, \vec{x}) \quad \text{공변 벡터}$$

이 문제를 다루기 위해 허수를 도입할 수도 있지만,
반변contravariant 벡터와 공변covariant 벡터를 사용해서
표현하는 것이 좀 더 잘 알려진 방식입니다.

$$x^\mu x_\mu = -c^2 t^2 + x^2 + y^2 + z^2$$

$$x^\mu = (ct, \vec{x})$$

$$dx^\mu = (cdt, dx, dy, dz)$$

기본적으로 우리가 사용하는 위치 벡터,
그리고 이와 같은 차원의 벡터는
반변 벡터로 표현하는 것이 기본이라고 기억하면 됩니다.

$$x^\mu x_\mu = -c^2 t^2 + x^2 + y^2 + z^2$$

$$x^\mu = (ct, \vec{x})$$

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{c\partial t}, \nabla \right)$$

한 편, 위치 벡터의 차원에 해당하는 양이 분모로 들어가게 되면
공변 벡터의 형태가 기본이라고 생각하면 됩니다.

$$x^\mu x_\mu = -c^2 t^2 + x^2 + y^2 + z^2$$

$$x^\mu = (ct, \vec{x})$$

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu \quad g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

편의에 따라 공변 벡터와 반변 벡터를 바꾸어 줄 수 있는데,
이 변환에 해당하는 행렬을
민코프스키 메트릭이라고 합니다.

$$t' = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x \right)$$

$$x' = \gamma(x - vt)$$

이것을 정리하면 위와 같은 로렌츠 변환식을 얻습니다.

로렌츠 변환의 기본적인 결과들을 다음과 같이 정리해 봅시다.

1. 시간 지연 time dilation
2. 길이 수축 length contraction
3. 동시성 simultaneity
4. 속도 합성
5. 상대론적 에너지, 운동량, 힘

시간 지연, 길이 수축, 동시성을 이해하기 위해서는
로렌츠 변환에서 우리가 무엇과 무엇을 비교하는지를
이해해야 합니다.

	사건 1	사건 2
정지 좌표계	(ct_1, x_1)	(ct_2, x_2)
운동 좌표계	(ct'_1, x'_1)	(ct'_2, x'_2)

1. 시간 지연

	사건 1	사건 2
정지 좌표계	(ct_1, x_1)	(ct_2, x_2)
운동 좌표계	(ct'_1, x'_1)	(ct'_2, x'_1)

운동하는 좌표계에서의 시간을 측정하기 위해서는
운동하는 좌표계의 특정한 지점을 고정시켜야만 합니다.

1. 시간 지연

	사건 1	사건 2
정지 좌표계	(ct_1, x_1)	(ct_2, x_2)
운동 좌표계	(ct'_1, x'_1)	(ct'_2, x'_1)

운동하는 좌표계에서의 시간을 측정하기 위해서는

운동하는 좌표계의 특정한 지점을 고정시켜야만 합니다.

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1$$

운동하는 관찰자의 고유 시간 proper time

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

정지한 관찰자가 측정한 시간 간격

1. 시간 지연

	사건 1	사건 2
정지 좌표계	(ct_1, x_1)	(ct_2, x_2)
운동 좌표계	(ct'_1, x'_1)	(ct'_2, x'_1)

운동하는 좌표계에서의 시간을 측정하기 위해서는

운동하는 좌표계의 특정한 지점을 고정시켜야만 합니다.

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1$$

운동하는 관찰자의 고유 시간 proper time

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

정지한 관찰자가 측정한 시간 간격

로렌츠 변환을 통해 다음을 유도할 수 있습니다.

$$x_2 - x_1 = v(t_2 - t_1)$$

$$t'_2 - t'_1 = -\left(\frac{v\gamma}{c^2}\right)(x_2 - x_1) + \gamma(t_2 - t_1)$$

1. 시간 지연

	사건 1	사건 2
정지 좌표계	(ct_1, x_1)	(ct_2, x_2)
운동 좌표계	(ct'_1, x'_1)	(ct'_2, x'_1)

운동하는 좌표계에서의 시간을 측정하기 위해서는

운동하는 좌표계의 특정한 지점을 고정시켜야만 합니다.

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1$$

운동하는 관찰자의 고유 시간 proper time

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

정지한 관찰자가 측정한 시간 간격

로렌츠 변환을 통해 다음을 유도할 수 있습니다.

$$x_2 - x_1 = v(t_2 - t_1)$$

$$\begin{aligned} t'_2 - t'_1 &= -\left(\frac{v\gamma}{c^2}\right)(x_2 - x_1) + \gamma(t_2 - t_1) \\ &= -\left(\frac{v^2\gamma}{c^2}\right)(t_2 - t_1) + \gamma(t_2 - t_1) = \frac{t_2 - t_1}{\gamma} \end{aligned}$$

1. 시간 지연

	사건 1	사건 2
정지 좌표계	(ct_1, x_1)	(ct_2, x_2)
운동 좌표계	(ct'_1, x'_1)	(ct'_2, x'_1)

따라서 다음 결과를 얻습니다.

운동하는 물체의 시간을 정지 좌표계에서 보면,

시간이 **느리게** 가는 것처럼 보입니다.

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\gamma}$$

2. 길이 수축

	사건 1	사건 2
정지 좌표계	(ct_1, x_1)	(ct_1, x_2)
운동 좌표계	(ct'_1, x'_1)	(ct'_2, x'_2)

운동하는 좌표계에서의 거리를 정지 좌표계에서 측정하기 위해서는
정지 좌표계에서 특정한 시간을 고정시켜야만 합니다.

2. 길이 수축

	사건 1	사건 2
정지 좌표계	(ct_1, x_1)	(ct_1, x_2)
운동 좌표계	(ct'_1, x'_1)	(ct'_2, x'_2)

운동하는 좌표계에서의 거리를 정지 좌표계에서 측정하기 위해서는
정지 좌표계에서 특정한 시간을 고정시켜야만 합니다.

$$\Delta x' = x'_2 - x'_1$$

운동하는 관찰자의 고유 길이 proper length

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

정지한 관찰자가 측정한 길이 간격

2. 길이 수축

	사건 1	사건 2
정지 좌표계	(ct_1, x_1)	(ct_1, x_2)
운동 좌표계	(ct'_1, x'_1)	(ct'_2, x'_2)

운동하는 좌표계에서의 거리를 정지 좌표계에서 측정하기 위해서는
정지 좌표계에서 특정한 시간을 고정시켜야만 합니다.

$$\Delta x' = x'_2 - x'_1$$

운동하는 관찰자의 고유 길이 proper length

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

정지한 관찰자가 측정한 길이 간격

로렌츠 변환을 통해 다음을 유도할 수 있습니다.

$$x'_2 - x'_1 = \gamma(x_2 - x_1)$$

2. 길이 수축

	사건 1	사건 2
정지 좌표계	(ct_1, x_1)	(ct_1, x_2)
운동 좌표계	(ct'_1, x'_1)	(ct'_2, x'_2)

따라서 다음 결과를 얻습니다.

운동하는 물체를 정지 좌표계에서 보면,
길이가 **짧아진** 것처럼 보입니다.

$$\Delta x' = \gamma \Delta x$$

이것을 **로렌츠-피츠제럴드 수축**이라고도 합니다.

3. 동시성

	사건 1	사건 2
정지 좌표계	(ct_1, x_1)	(ct_2, x_2)
운동 좌표계	(ct'_1, x'_1)	(ct'_1, x'_2)

운동하는 좌표계의 동시 개념을 정지 좌표계에서 비교하기 위해서는
운동하는 좌표계의 특정한 시간을 고정시켜야만 합니다.

3. 동시성

	사건 1	사건 2
정지 좌표계	(ct_1, x_1)	(ct_2, x_2)
운동 좌표계	(ct'_1, x'_1)	(ct'_1, x'_2)

운동하는 좌표계의 동시 개념을 정지 좌표계에서 비교하기 위해서는
운동하는 좌표계의 특정한 시간을 고정시켜야만 합니다.

로렌츠 변환을 통해 다음을 유도할 수 있습니다.

$$\Delta x = x_2 - x_1 = \frac{c^2}{v}(t_2 - t_1) = \frac{c^2}{v}\Delta t$$

$$\Delta x' = x'_2 - x'_1 = \gamma(x_2 - x_1) - v\gamma(t_2 - t_1) = \frac{c^2}{v\gamma}(t_2 - t_1) = \frac{c^2}{v\gamma}\Delta t$$

3. 동시성

	사건 1	사건 2
정지 좌표계	(ct_1, x_1)	(ct_2, x_2)
운동 좌표계	(ct'_1, x'_1)	(ct'_1, x'_2)

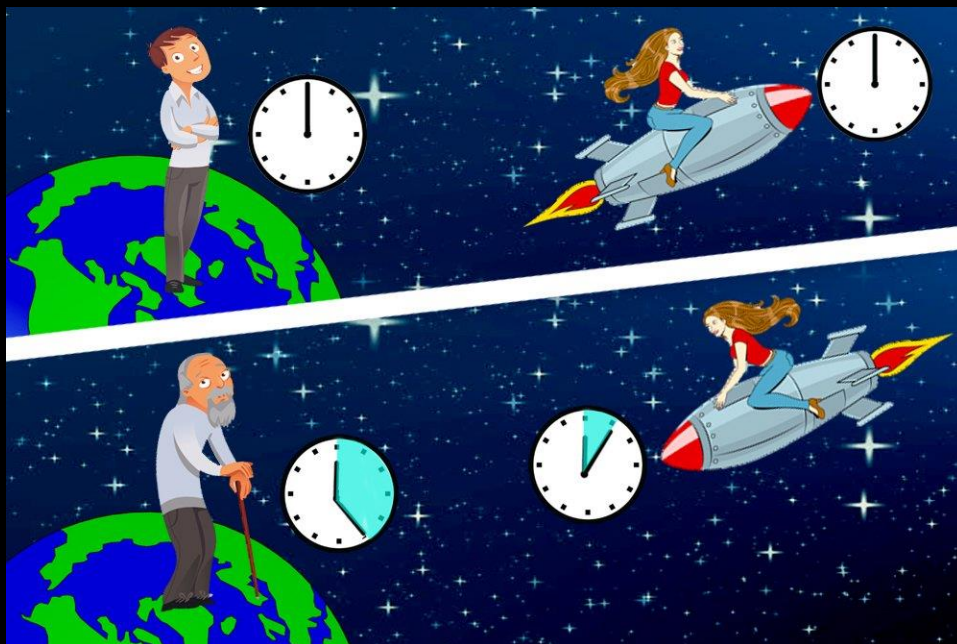
따라서 다음 결과를 얻습니다.

운동하는 물체의 동시 개념이

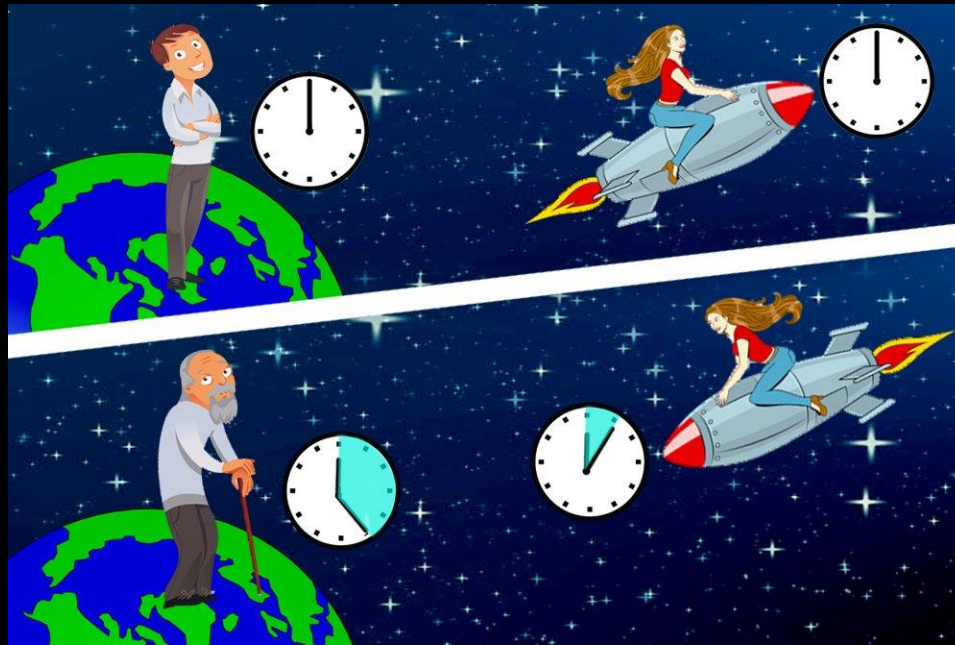
정지 좌표계에서의 동시 개념과 일반적으로 **같지 않습니다**.

$$\Delta t = \frac{v\gamma}{c^2} \Delta x'$$

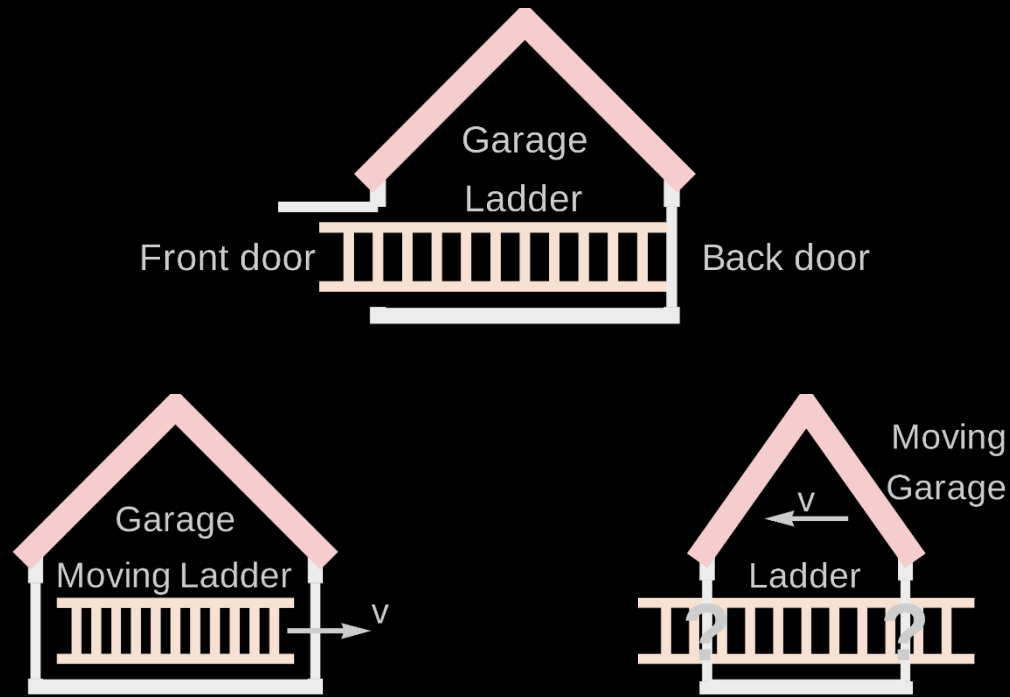
특수 상대성 이론은 시공간에 대한 우리의 개념을
바꾸어야 하는 것처럼 보입니다.
따라서 우리의 직관과 비교해 볼 때
몇 가지 개념적인 역설을 야기하는 것처럼 보입니다.



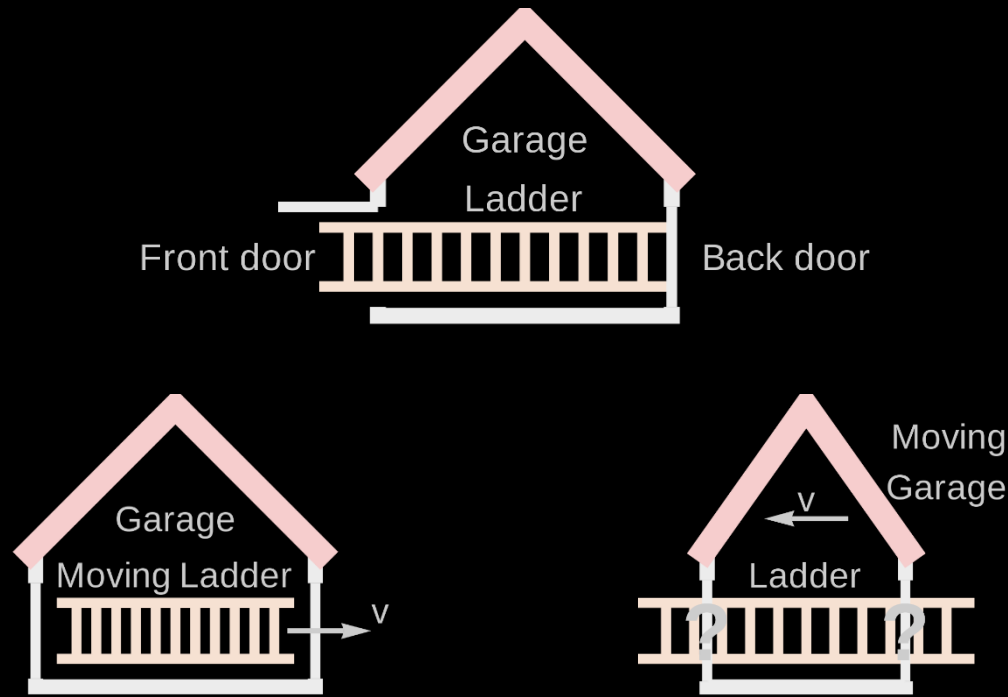
그 중에 하나는 시간 지연이 대칭적이라 할 때,
어느 쪽이 더 느리게 갈 것이냐 하는 질문,
즉 쌍둥이 역설twin paradox로 알려진 것입니다.



이 역설의 핵심은 우주 여행을 하는 쌍둥이는
관성계가 아니라 비관성계라는 것,
즉 두 관찰자는 대칭적이지 **않다**는 것에 있습니다.



헛간-사다리 역설은 로렌츠 수축이 대칭적이라 할 때, 사다리가 수축을 하는 것과 헛간이 수축을 하는 것이 개념적으로 모순을 일으키는 것처럼 보인다는 것입니다.



이 역설의 경우 로렌츠 수축 자체는 대칭적이지만
그와 함께 동시성의 상대성에 의해
헛간의 문을 닫는 사건이 동시적이지 않을 수 있다는 것을 통해
해결될 수 있습니다.

$$dx = \gamma(dx' + vdt')$$

$$dy = dy'$$

$$dt = \gamma\left(dt' + \frac{v}{c^2}dx'\right)$$

속도의 합성을 이해하기 위해
다음과 같은 미분을 생각합시다.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx' + v dt'}{dt' + \frac{v}{c^2} dx'} = \frac{\frac{dx'}{dt'} + v}{1 + \frac{v}{c^2} \frac{dx'}{dt'}} = \frac{u_x + v}{1 + \frac{v u_x}{c^2}}$$

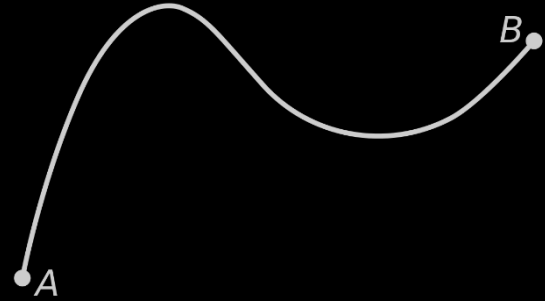
같은 방향의 경우 위와 같은 합성 공식을 얻게 됩니다.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{\gamma \left(dt' + \frac{v}{c^2} dx' \right)} = \frac{\frac{dy'}{dt'}}{\gamma} = \frac{1}{\gamma} u_y$$

$= 0$

수직 방향의 경우에도 시간 지연 효과에 의해
위와 같은 합성 공식을 얻게 됩니다.

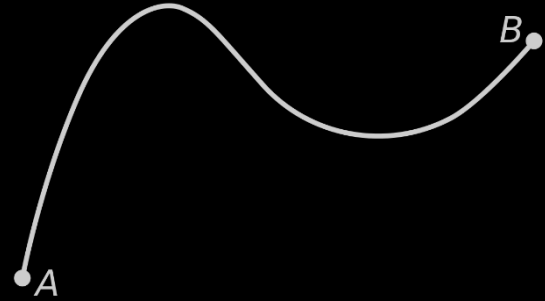
$$x^\mu(\tau) = (ct, \vec{x})$$



마지막으로 상대론적 역학에 대해 살펴봅시다.
상대론적인 관점에서는 입자의 위치는
시간의 함수가 아니라 **고유 시간의 함수**가 됩니다.

$$x^\mu(\tau) = (ct, \vec{x})$$

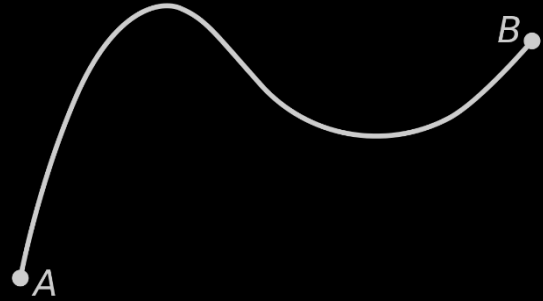
$$v^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau}$$



이 위치 벡터를 고유 시간으로 미분하면 **고유 속도**를 얻습니다.
 한 편, 이와 비교하기 위해 $\frac{d\vec{x}}{dt} \equiv \vec{v}$ 를 **보통 속도**라고 부릅니다.

$$x^\mu(\tau) = (ct, \vec{x})$$

$$v^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau}$$
$$= \left(c \frac{dt}{d\tau}, \frac{d\vec{x}}{d\tau} \right)$$

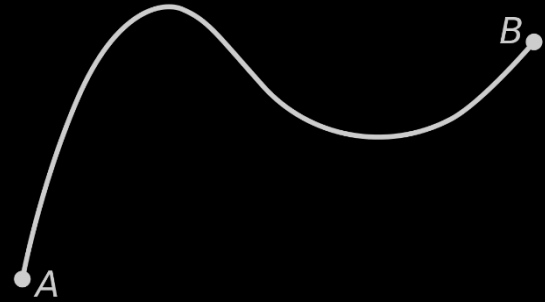


$$x^\mu(\tau) = (ct, \vec{x})$$

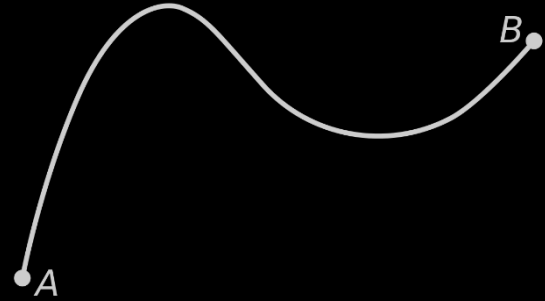
$$v^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

$$= \left(c \frac{dt}{d\tau}, \frac{d\vec{x}}{d\tau} \right)$$

$= \gamma$ 시간 지연



$$x^\mu(\tau) = (ct, \vec{x})$$

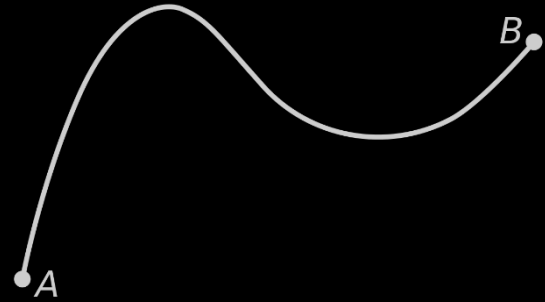


$$v^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

$$= \left(c \frac{dt}{d\tau}, \frac{d\vec{x}}{d\tau} \right) = \left(c\gamma, \frac{dt}{d\tau} \frac{d\vec{x}}{dt} \right)$$

$= \gamma$ 시간 지연

$$x^\mu(\tau) = (ct, \vec{x})$$



$$v^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

$$= \left(c \frac{dt}{d\tau}, \frac{d\vec{x}}{d\tau} \right) = \left(c\gamma, \frac{dt}{d\tau} \frac{d\vec{x}}{dt} \right)$$

$= \gamma$ 시간 지연

$$= (c\gamma, \gamma \vec{v})$$

$$p^\mu \equiv m v^\mu = (mc\gamma, m\gamma\vec{v})$$

이것으로부터 상대론적 운동량을 위와 같이 정의할 수 있습니다.

$$p^\mu \equiv m v^\mu = (mc\gamma, m\gamma\vec{v})$$

$$p_\mu p^\mu = -m^2 c^2 \gamma^2 + m^2 \gamma^2 v^2 = -m^2 c^2$$

따라서 자연스럽게 위와 같은 조합은 로렌츠 스칼라,
즉 로렌츠 변환에 대한 불변량이 됩니다.

$$p^\mu \equiv mv^\mu = (mc\gamma, m\gamma\vec{v})$$

$$p_\mu p^\mu = -m^2 c^2 \gamma^2 + m^2 \gamma^2 v^2 = -m^2 c^2$$

$$cp^0 = \gamma mc^2 \simeq mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3mv^4}{8c^2} + \dots$$

한 편, $cp^0 = \gamma mc^2$ 는 에너지로 해석할 수 있습니다.

$$p^\mu \equiv mv^\mu = (mc\gamma, m\gamma\vec{v})$$

$$p_\mu p^\mu = -m^2 c^2 \gamma^2 + m^2 \gamma^2 v^2 = -m^2 c^2$$

$$cp^0 = \gamma mc^2 \simeq \underbrace{mc^2}_{\text{정지 에너지}} + \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{\text{운동 에너지}} + \frac{3mv^4}{8c^2} + \dots$$

한 편, $cp^0 = \gamma mc^2$ 는 에너지로 해석할 수 있습니다.

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right)$$

즉, 다음과 같은 조합이 상대론적 벡터가 된다는 것을 의미합니다.

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right)$$

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2 c^2$$

그리고 다음과 같은 상대론적 불변량의 관계가 성립합니다.

$$a^\mu \equiv \frac{dv^\mu}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} (c\gamma, \gamma \vec{v})$$

좀 더 나아가서 고유 가속도를 구해보시다.

$$a^\mu \equiv \frac{dv^\mu}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} (c\gamma, \gamma \vec{v})$$

$$= \left(c \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \frac{v}{c^2} \frac{dv}{d\tau}, \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \frac{v}{c^2} \frac{dv}{d\tau} \vec{v} + \gamma \frac{d\vec{v}}{d\tau} \right)$$

$$a^\mu \equiv \frac{dv^\mu}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} (c\gamma, \gamma \vec{v})$$

$$= \left(c \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \frac{v}{c^2} \frac{dv}{d\tau}, \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \frac{v}{c^2} \frac{dv}{d\tau} \vec{v} + \gamma \frac{d\vec{v}}{d\tau} \right)$$

$$= \left(\gamma^3 \frac{v}{c} \frac{dv}{dt} \frac{dt}{d\tau}, \gamma^3 \frac{v}{c^2} \frac{dv}{dt} \frac{dt}{d\tau} \vec{v} + \gamma \frac{d\vec{v}}{dt} \frac{dt}{d\tau} \right)$$

$$a^\mu \equiv \frac{dv^\mu}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} (c\gamma, \gamma \vec{v})$$

$$= \left(c \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \frac{v}{c^2} \frac{dv}{d\tau}, \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \frac{v}{c^2} \frac{dv}{d\tau} \vec{v} + \gamma \frac{d\vec{v}}{d\tau} \right)$$

$$= \left(\gamma^3 \frac{v}{c} \frac{dv}{dt} \frac{dt}{d\tau}, \gamma^3 \frac{v}{c^2} \frac{dv}{dt} \frac{dt}{d\tau} \vec{v} + \gamma \frac{d\vec{v}}{dt} \frac{dt}{d\tau} \right)$$

$$= \left(\gamma^3 \frac{v}{c} a_\gamma, \gamma^3 \frac{v}{c^2} a_\gamma \vec{v} + \gamma \vec{a}_\gamma \right)$$

$$\begin{aligned}
a^\mu &\equiv \frac{dv^\mu}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} (c\gamma, \gamma \vec{v}) \\
&= \left(\gamma^3 \frac{v}{c} a_\gamma, \gamma^3 \frac{v}{c^2} a_\gamma \vec{v} + \gamma \vec{a}_\gamma \right) \\
&= \left(\gamma^4 \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c}, \gamma^2 \left(\vec{a} + \frac{(\vec{a} \cdot \vec{v}) \vec{v}}{c^2 - v^2} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a^\mu &\equiv \frac{dv^\mu}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} (c\gamma, \gamma \vec{v}) \\
&= \left(\gamma^3 \frac{v}{c} a_\gamma, \gamma^3 \frac{v}{c^2} a_\gamma \vec{v} + \gamma \vec{a}_\gamma \right) \\
&= \left(\gamma^4 \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c}, \gamma^2 \left(\vec{a} + \frac{(\vec{a} \cdot \vec{v}) \vec{v}}{c^2 - v^2} \right) \right) \\
&\quad = \frac{d}{d\tau} (\gamma \vec{v}) = \frac{1}{m} \frac{d\vec{p}}{d\tau} = \frac{1}{m} \gamma \frac{d\vec{p}}{dt}
\end{aligned}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(\vec{a} + \frac{(\vec{a} \cdot \vec{v})\vec{v}}{c^2 - v^2} \right)$$

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = F^\mu = m \left(\gamma^4 \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c}, \gamma^2 \left(\vec{a} + \frac{(\vec{a} \cdot \vec{v})\vec{v}}{c^2 - v^2} \right) \right)$$

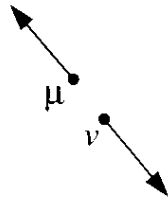
따라서 우리는 힘에 대한 두 가지 정의를 얻습니다.
 하나는 운동량의 시간 미분, 즉 **보통 힘**이고,
 다른 하나는 상대론적 운동량의 고유 시간 미분,
 즉, **민코프스키 힘**이라고 불리는 것입니다.

예: 뮤온-중성미자 붕괴

정지해 있던 입자가 뮤온과 중성미자로 붕괴하는 과정을 생각해 봅시다.

• π

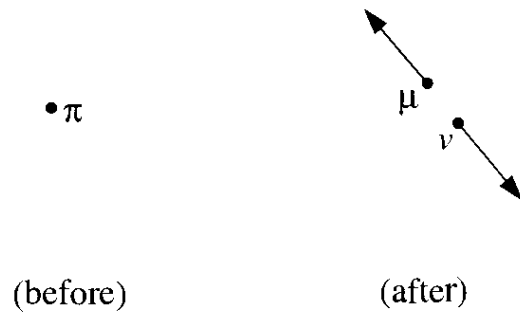
(before)



(after)

예: 뮤온-중성미자 붕괴

정지해 있던 입자가 뮤온과 중성미자로 붕괴하는 과정을 생각해 봅시다.



이 과정은 에너지 및 운동량 보존에 의해 설명됩니다.

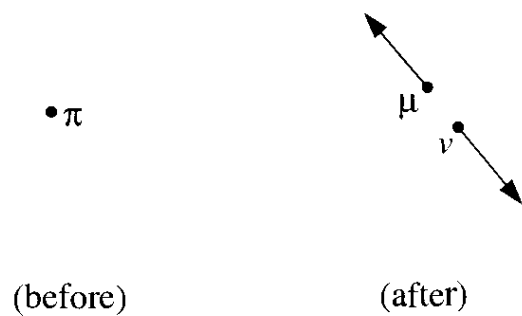
붕괴 전

$$E_i = m_\pi c^2$$

$$\vec{p}_i = 0$$

예: 뮤온-중성미자 붕괴

정지해 있던 입자가 뮤온과 중성미자로 붕괴하는 과정을 생각해 봅시다.



이 과정은 에너지 및 운동량 보존에 의해 설명됩니다.

붕괴 전

$$E_i = m_\pi c^2$$

$$\vec{p}_i = 0$$

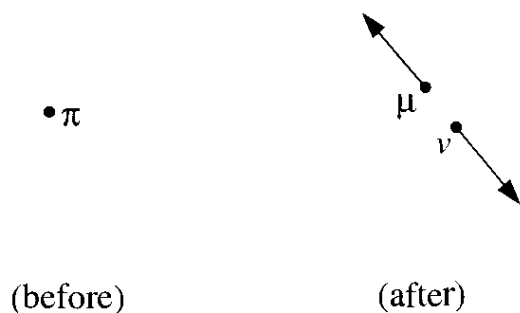
붕괴 후

$$E_f = E_\mu + E_\nu$$

$$\vec{p}_f = \vec{p}_\mu + \vec{p}_\nu$$

예: 뮤온-중성미자 붕괴

정지해 있던 입자가 뮤온과 중성미자로 붕괴하는 과정을 생각해 봅시다.



이 과정은 에너지 및 운동량 보존에 의해 설명됩니다.

붕괴 전

$$E_i = m_\pi c^2$$

$$\vec{p}_i = 0$$

붕괴 후

$$E_f = E_\mu + E_\nu$$

$$\vec{p}_f = \vec{p}_\mu + \vec{p}_\nu$$

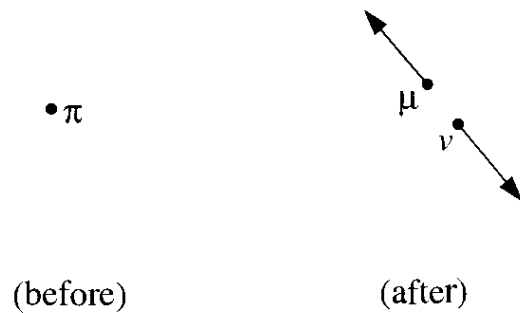
$$\vec{p}_\mu = -\vec{p}_\nu$$

$$E_\mu + E_\nu = m_\pi c^2 = E_\mu + |\vec{p}_\nu|c$$

(중성미자는 질량이 없는 입자로 가정합니다.)

예: 뮤온-중성미자 붕괴

정지해 있던 입자가 뮤온과 중성미자로 붕괴하는 과정을 생각해 봅시다.



여기에서 다음과 같은 관계가 있습니다.

$$|\vec{p}_\nu|c = |\vec{p}_\mu|c = \sqrt{E_\mu^2 - m_\mu^2 c^4}$$

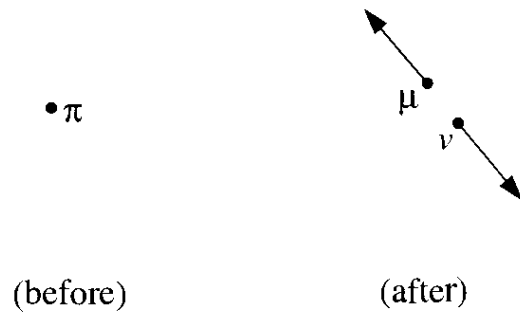
$$\vec{p}_\mu = -\vec{p}_\nu$$

$$E_\mu + E_\nu = m_\pi c^2 = E_\mu + |\vec{p}_\nu|c$$

(중성미자는 질량이 없는 입자로 가정합니다.)

예: 뮤온-중성미자 붕괴

정지해 있던 입자가 뮤온과 중성미자로 붕괴하는 과정을 생각해 봅시다.



여기에서 다음과 같은 관계가 있습니다.

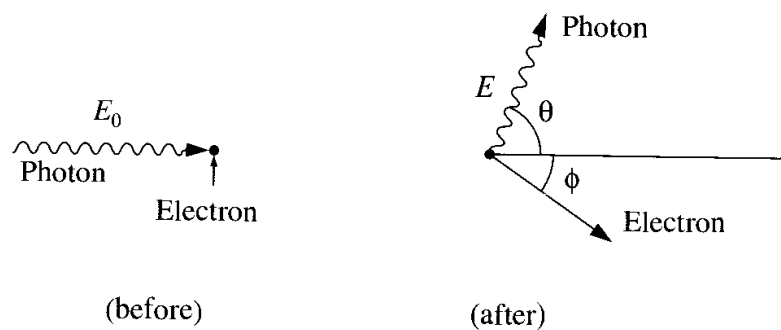
$$|\vec{p}_\nu|c = |\vec{p}_\mu|c = \sqrt{E_\mu^2 - m_\mu^2 c^4}$$

대입하면 다음을 얻습니다.

$$E_\mu = \frac{(m_\pi^2 + m_\mu^2)c^2}{2m_\pi}$$

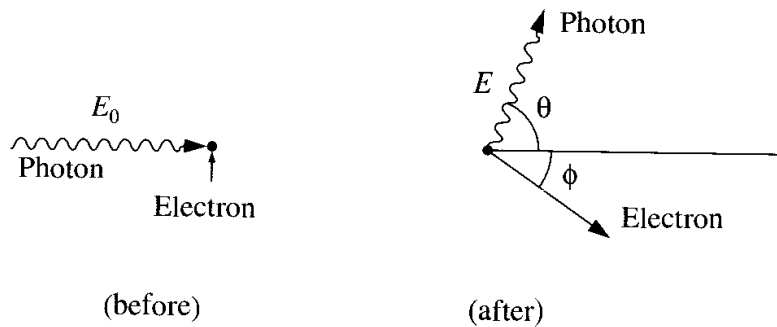
예: 콤프턴 산란

정지해 있던 전자가 광자와 충돌하는 과정을 생각해 봅시다.



예: 콤프턴 산란

정지해 있던 전자가 광자와 충돌하는 과정을 생각해 봅시다.

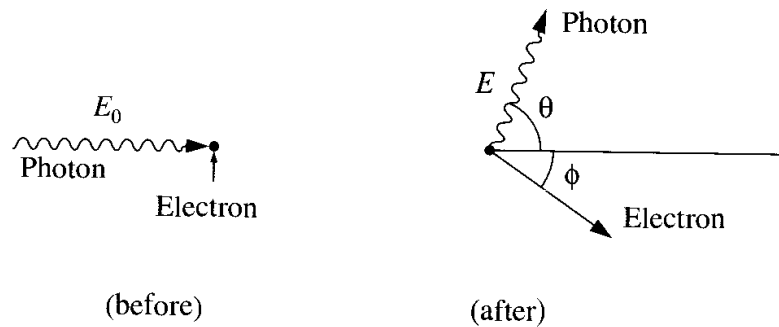


이 과정도 에너지 및 운동량 보존에 의해 설명됩니다.

수직 방향 운동량 보존 $p_e \sin \phi = \frac{E}{c} \sin \theta$

예: 콤프턴 산란

정지해 있던 전자가 광자와 충돌하는 과정을 생각해 봅시다.



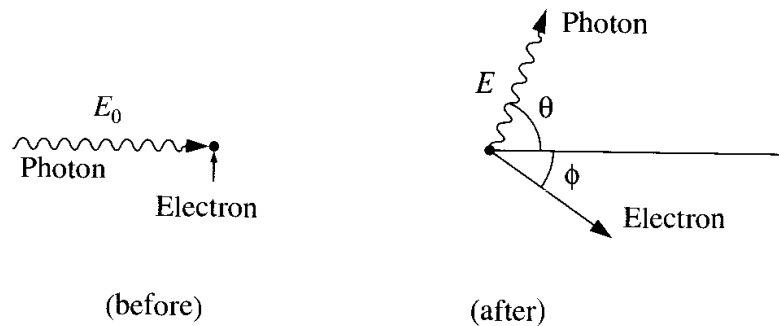
이 과정도 에너지 및 운동량 보존에 의해 설명됩니다.

수직 방향 운동량 보존 $p_e \sin \phi = \frac{E}{c} \sin \theta$

수평 방향 운동량 보존 $\frac{E_0}{c} = \frac{E}{c} \cos \theta + p_e \cos \phi = \frac{E}{c} \cos \theta + p_e \sqrt{1 - \left(\frac{E}{p_e c} \sin \theta \right)^2}$

예: 콤프턴 산란

정지해 있던 전자가 광자와 충돌하는 과정을 생각해 봅시다.



이 과정도 에너지 및 운동량 보존에 의해 설명됩니다.

수직 방향 운동량 보존

$$p_e \sin \phi = \frac{E}{c} \sin \theta$$

수평 방향 운동량 보존

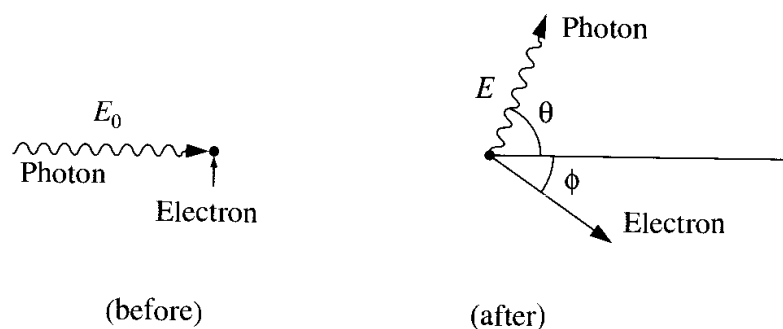
$$\frac{E_0}{c} = \frac{E}{c} \cos \theta + p_e \cos \phi = \frac{E}{c} \cos \theta + p_e \sqrt{1 - \left(\frac{E}{p_e c} \sin \theta \right)^2}$$

에너지 보존

$$E_0 + mc^2 = E + \sqrt{m^2 c^4 + p_e^2 c^2}$$

예: 콤프턴 산란

정지해 있던 전자가 광자와 충돌하는 과정을 생각해 봅시다.



식들을 연립해서 다음을 얻습니다.

$$E = \frac{1}{\left(\frac{1}{E_0}\right) + \frac{1 - \cos \theta}{mc^2}}$$

이 과정도 에너지 및 운동량 보존에 의해 설명됩니다.

수직 방향 운동량 보존

$$p_e \sin \phi = \frac{E}{c} \sin \theta$$

수평 방향 운동량 보존

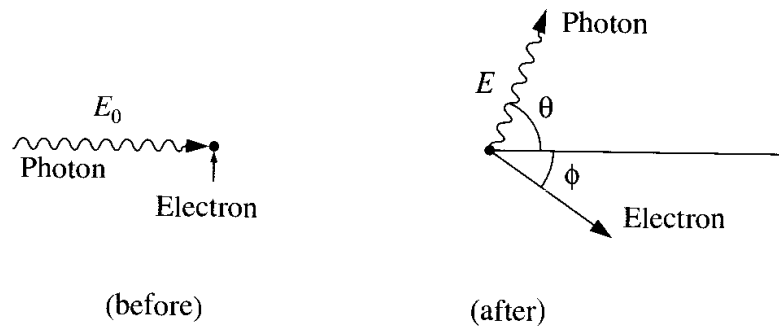
$$\frac{E_0}{c} = \frac{E}{c} \cos \theta + p_e \cos \phi = \frac{E}{c} \cos \theta + p_e \sqrt{1 - \left(\frac{E}{p_e c} \sin \theta\right)^2}$$

에너지 보존

$$E_0 + mc^2 = E + \sqrt{m^2 c^4 + p_e^2 c^2}$$

예: 콤프턴 산란

정지해 있던 전자가 광자와 충돌하는 과정을 생각해 봅시다.



식들을 연립해서 다음을 얻습니다.

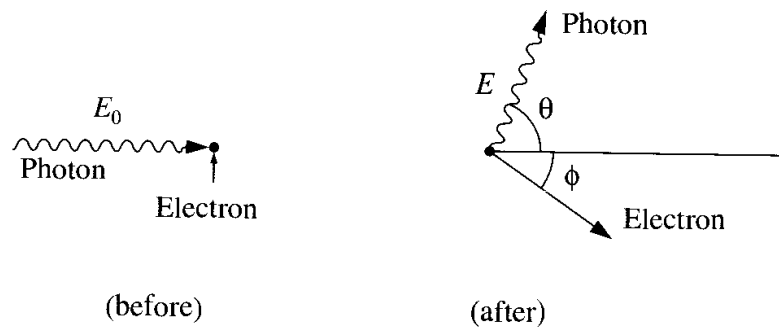
$$E = \frac{1}{\left(\frac{1}{E_0}\right) + \frac{1 - \cos \theta}{mc^2}}$$

또는 파장으로 표현하면 다음과 같은 식을 얻습니다.

$$\Delta\lambda \equiv \lambda - \lambda_0 = \frac{h}{mc}(1 - \cos \theta)$$

예: 콤프턴 산란

정지해 있던 전자가 광자와 충돌하는 과정을 생각해 봅시다.



식들을 연립해서 다음을 얻습니다.

$$E = \frac{1}{\left(\frac{1}{E_0}\right) + \frac{1 - \cos \theta}{mc^2}}$$

또는 파장으로 표현하면 다음과 같은 식을 얻습니다.

$$\Delta\lambda \equiv \lambda - \lambda_0 = \frac{h}{mc}(1 - \cos \theta)$$

콤프턴 파장

여기까지는 특수 상대성 이론의 일반론이었습니다.
특수 상대성 이론은
전자기학과 무슨 관계가 있을까요?

전자기학을 특수 상대성 이론으로 다시 살펴보기 위해
다음과 같은 과정을 따라가 보도록 하겠습니다.

$$x^\mu = (ct, \vec{x})$$

$$\partial_\mu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right)$$

먼저 위와 같은 조합은 로렌츠 벡터가 됩니다.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0$$

한편 우리는 원천에 대해 위와 같은 연속 방정식을 알고 있습니다.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0$$

$$\partial_{\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right)$$

이 방정식을 아래와 같은 미분 연산자로 표현할 수 있을까요?

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0$$

$$\partial_\mu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right) \quad J^\mu = (c\rho, \vec{J})$$

우리가 새로운 로렌츠 벡터를 위와 같이 정의하면
 원천에 대한 연속 방정식을
 로렌츠 벡터들 사이의 연산으로 정의할 수 있습니다.

$$\partial_{\mu} J^{\mu} = 0$$

$$\partial_{\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right) \quad J^{\mu} = (c\rho, \vec{J})$$

즉, 연속 방정식을 위와 같이 적을 수 있습니다.

$$\partial_{\mu} J^{\mu} = 0$$

$$\partial_{\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right) \quad J^{\mu} = (c\rho, \vec{J})$$

물론 원천에 대한 로렌츠 벡터 표현이 실제로
로렌츠 벡터가 되는지에 대해서는 설명이 필요합니다.
다만, 원천이란 전하의 양과 전하의 변화를 표현하므로
이 조합이 로렌츠 벡터가 된다는 것이 이상하지는 않습니다.

$$\partial_{\mu} J^{\mu} = 0$$

$$\partial_{\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right) \quad J^{\mu} = (c\rho, \vec{J})$$

이제부터는 원천 전하 밀도와 원천 전류 밀도를 묶어서
로렌츠 벡터로 다루도록 하겠습니다.

$$\left(\nabla^2 V - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \right) + \frac{\partial \left(\nabla \cdot \vec{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial V}{\partial t} \right)}{\partial t} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\left(\nabla^2 \vec{A} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \right) - \nabla \left(\nabla \cdot \vec{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial V}{\partial t} \right) = -\mu_0 \vec{J}$$

이제 이번에는 전위에 대한 방정식을 생각해 봅시다.
이것은 맥스웰 방정식과 동등한 의미를 담고 있습니다.

$$\frac{1}{c} \left(\nabla^2 V - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \right) + \frac{\partial \left(\nabla \cdot \vec{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial V}{\partial t} \right)}{c \partial t} = - \frac{\rho}{c \epsilon_0}$$

$$\left(\nabla^2 \vec{A} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \right) - \nabla \left(\nabla \cdot \vec{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial V}{\partial t} \right) = - \mu_0 \vec{J}$$

그런데 이 두 방정식을 잘 정리해서 묶어 보면
우변을 $-\mu_0 J^\mu$ 로 적을 수 있는 것처럼 보입니다.

$$\frac{1}{c} \left(\nabla^2 V - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \right) + \frac{\partial \left(\nabla \cdot \vec{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial V}{\partial t} \right)}{c \partial t} = - \frac{\rho}{c \epsilon_0}$$

$$\left(\nabla^2 \vec{A} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \right) - \nabla \left(\nabla \cdot \vec{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial V}{\partial t} \right) = - \mu_0 \vec{J}$$

이것은 좌변에 대해서도 로렌츠 벡터의 조합으로 적을 수 있는 방법이 있으리라는 것을 의미합니다.

$$\frac{1}{c} \left(\nabla^2 V - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \right) + \frac{\partial \left(\nabla \cdot \vec{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial V}{\partial t} \right)}{c \partial t} = - \frac{\rho}{c \epsilon_0}$$

$$\left(\nabla^2 \vec{A} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \right) - \nabla \left(\nabla \cdot \vec{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial V}{\partial t} \right) = - \mu_0 \vec{J}$$

이것을 위해 수학적 센스를 발휘해서 다음과 같은 것을 정의합시다.

$$A^\mu \equiv \left(\frac{V}{c}, \vec{A} \right)$$

$$\partial^\nu \partial_\nu A^\mu$$

$$\boxed{\frac{1}{c} \left(\nabla^2 V - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \right)} + \frac{\partial \left(\nabla \cdot \vec{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial V}{\partial t} \right)}{c \partial t} = -\frac{\rho}{c \epsilon_0}$$

$$\boxed{\left(\nabla^2 \vec{A} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \right)} - \nabla \left(\nabla \cdot \vec{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial V}{\partial t} \right) = -\mu_0 \vec{J}$$

이것을 위해 수학적 센스를 발휘해서 다음과 같은 것을 정의합시다.

$$A^\mu \equiv \left(\frac{V}{c}, \vec{A} \right)$$

$$\partial^\nu \partial_\nu A^\mu$$

$$-\partial^\mu \partial_\nu A^\nu$$

$$\boxed{\frac{1}{c} \left(\nabla^2 V - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \right)} + \frac{\partial \left(\nabla \cdot \vec{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial V}{\partial t} \right)}{c \partial t} = -\frac{\rho}{c \epsilon_0}$$

$$\boxed{\left(\nabla^2 \vec{A} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \right)} - \nabla \left(\nabla \cdot \vec{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial V}{\partial t} \right) = -\mu_0 \vec{J}$$

이것을 위해 수학적 센스를 발휘해서 다음과 같은 것을 정의합시다.

$$A^\mu \equiv \left(\frac{V}{c}, \vec{A} \right)$$

$$\partial^\nu \partial_\nu A^\mu$$

$$-\partial^\mu \partial_\nu A^\nu$$

$$-\mu_0 J^\mu$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \left(\nabla^2 V - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \right) + \frac{\partial \left(\nabla \cdot \vec{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial V}{\partial t} \right)}{c \partial t} &= -\frac{\rho}{c \epsilon_0} \\ \left(\nabla^2 \vec{A} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \right) - \nabla \left(\nabla \cdot \vec{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial V}{\partial t} \right) &= -\mu_0 \vec{J} \end{aligned}$$

이것을 위해 수학적 센스를 발휘해서 다음과 같은 것을 정의합시다.

$$A^\mu \equiv \left(\frac{V}{c}, \vec{A} \right)$$

$$\partial_{\mu}(\partial^{\mu}A^{\nu} - \partial^{\nu}A^{\mu}) = -\mu_0 J^{\nu}$$

즉, 맥스웰 방정식은 로렌츠 벡터로 일반화된 전위에 대해
위와 같이 표현됩니다.

$$\partial_{\mu}(\partial^{\mu}A^{\nu} - \partial^{\nu}A^{\mu}) = -\mu_0 J^{\nu}$$

그러면 로렌츠 게이지 조건은 간단하게
 $\partial_{\mu}A^{\mu} = 0$ 으로 표현될 수 있습니다.

$$\partial_{\mu}(\partial^{\mu}A^{\nu} - \partial^{\nu}A^{\mu}) = -\mu_0 J^{\nu}$$

이 방정식은 전위에 대해서 표현되었습니다.
그렇다면, 전기장과 자기장은 어디에 있을까요?

$$\partial_{\mu}(\partial^{\mu}A^{\nu} - \partial^{\nu}A^{\mu}) = -\mu_0 J^{\nu}$$

전기장과 자기장이 전위의 미분이라는 것을 기억하면
전기장과 자기장은 위와 같은 조합 속에 들어있음을 알게 됩니다.

$$\partial_{\mu}(\partial^{\mu}A^{\nu} - \partial^{\nu}A^{\mu}) = -\mu_0 J^{\nu}$$
$$\equiv F^{\mu\nu}$$

이것을 장 텐서field tensor라고 부릅니다.

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

장 텐서를 성분별로 적어보면 위와 같이 표현됩니다.
이 텐서는 반대칭입니다.

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\mu$$

따라서 맥스웰 방정식의 $\nabla \cdot \vec{E}$ 및 $\nabla \times \vec{B}$ 부분은 위의 방정식으로 표현됩니다.

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\mu$$

맥스웰 방정식의 나머지 두 부분은 어떻게 될까요?
물론 이 식은 전위로부터 유도되었으므로,
 $\nabla \times \vec{E}$ 부분과 $\nabla \cdot \vec{B}$ 부분은 자동적으로 만족되어야 할 것 같습니다.

$$\partial_\lambda F_{\rho\sigma} + \partial_\rho F_{\sigma\lambda} + \partial_\sigma F_{\lambda\rho} = 0$$

이것을 확인하기 위해 먼저 위와 같은 관계식은
항등식이라는 것을 기억해 봅시다.

$$\frac{1}{2} \partial_\nu \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} = 0$$

같은 식을 일반화된 레비-치비타 기호를 사용해서
위와 같이 적을 수도 있습니다.

$$\partial_\nu G^{\mu\nu} = 0$$

또는 $\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma} \equiv G^{\mu\nu}$ 라는
 짝 텐서dual tensor를 도입할 수도 있습니다.

$$G^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & -E_z/c & E_y/c \\ -B_y & E_z/c & 0 & -E_x/c \\ -B_z & -E_y/c & E_x/c & 0 \end{pmatrix}$$

짝 텐서는 위와 같은 성분으로 구성되어 있습니다.
 따라서 여기에 ∂_μ 를 내적한 것이
 $\nabla \times \vec{E}$ 부분과 $\nabla \cdot \vec{B}$ 부분에 대응한다는 것을 알 수 있습니다.

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\mu$$

$$\frac{1}{2} \partial_\nu \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} = 0$$

최종적으로 위의 두 방정식은 맥스웰 방정식과 같으며
 이 중에서 두 번째 방정식은
 정의상 자동적으로 성립하는 항등식입니다.

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\mu$$

$$\frac{1}{2} \partial_\nu \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} = 0$$

이제 모든 방정식이 로렌츠 벡터 및 텐서의 형태로 표현되었으므로,
맥스웰 방정식은 로렌츠 변환에 대해 공변적임을 알 수 있습니다.

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}_{\rho} F^{\rho\sigma} \Lambda^{\nu}_{\sigma}$$

따라서 장 텐서 또는 전기장 및 자기장을
다른 관성계에서 보면
위와 같은 방식으로 로렌츠 변환해야 합니다.

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\rho F^{\rho\sigma} \Lambda_\sigma^\nu$$

관성 좌표계를 잘 선택하면 전하가 정지한 것처럼 볼 수 있습니다.
이 경우에는 전기장만 존재합니다.

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\rho F^{\rho\sigma} \Lambda_\sigma^\nu$$

그런데 같은 현상을 다른 좌표계에서 보게 되면,
로렌츠 변환에 의해 자연스럽게 자기장이 생기게 됩니다.

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}_{\rho} F^{\rho\sigma} \Lambda^{\nu}_{\sigma}$$

정지한 전하가 만들어낸 전기장을 운동 좌표계로 옮기는 것과 같은 속도로 전하가 운동하면서 자기장을 만들어내는 것은 특수 상대론에서 완벽하게 동등한 것입니다.

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}_{\rho} F^{\rho\sigma} \Lambda^{\nu}_{\sigma}$$

이러한 의미에서 자기장은 상대론적 효과입니다.

$$F^\mu = q v_\nu F^{\mu\nu}$$

마지막으로 로렌츠 힘 법칙도 위와 같이
텐서의 형태로 적을 수 있습니다.
여기에서 좌변은 **민코프스키 힘**이고
우변에는 **장 텐서**가 있습니다.

$$S = \int L dt = \int d^4x \mathcal{L}$$

라그랑지안 밀도

전자기학 전체를 마무리하며 마지막으로 에너지를 살펴봅시다.
그에 앞서, 전자기장을 기술하는
올바른 라그랑지안이 무엇인지 생각해 봅시다.

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + A_\mu J^\mu$$

올바른 맥스웰 방정식을 주는 라그랑지안은
위와 같이 적을 수 있습니다.

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + A_\mu J^\mu$$

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = 0 \quad \longrightarrow \quad \partial_\mu F^{\nu\mu} = \mu_0 J^\nu$$

물론 이것은 오일러-라그랑주 방정식을 통해 확인하면 됩니다.

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + A_\mu J^\mu \\ &= -\frac{1}{2\mu_0} \left(B^2 - \frac{E^2}{c^2} \right) + A_\mu J^\mu\end{aligned}$$

이 라그랑지안 밀도를 전기장과 자기장으로 명시적으로 적으면
위와 같이 됩니다.

$$\mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\nu)} (\partial_0 A_\nu) - \mathcal{L}$$

$$= -\frac{1}{\mu_0} \frac{\vec{E} \cdot \dot{\vec{A}}}{c^2} + \frac{1}{2\mu_0} \left(B^2 - \frac{E^2}{c^2} \right)$$

원천이 없는 경우,
 라그랑지안 밀도로부터 해밀토니안 밀도를 유도해 봅시다.

$$\mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\nu)} (\partial_0 A_\nu) - \mathcal{L}$$

$$= -\frac{1}{\mu_0} \frac{\vec{E} \cdot \dot{\vec{A}}}{c^2} + \frac{1}{2\mu_0} \left(B^2 - \frac{E^2}{c^2} \right)$$

$$= \epsilon_0 \vec{E} \cdot \left(\vec{E} + \nabla V \right) + \frac{B^2}{2\mu_0} - \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

$$\vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\nu)} (\partial_0 A_\nu) - \mathcal{L}$$

$$= \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0} + \epsilon_0 (\vec{E} \cdot \nabla) V + \epsilon_0 (\nabla \cdot \vec{E}) V$$

$= 0$

$$\mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\nu)} (\partial_0 A_\nu) - \mathcal{L}$$

$$= \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0} + \underbrace{\epsilon_0 (\vec{E} \cdot \nabla) V + \epsilon_0 (\nabla \cdot \vec{E}) V}_{= 0}$$

$$= \epsilon_0 \nabla \cdot (V \vec{E})$$

이 부분은 가우스 정리에 의해
경계에서의 적분으로 바뀌게 되고,
무한대에서의 경계조건에 의해
0으로 보낼 수 있습니다.

$$\mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\nu)} (\partial_0 A_\nu) - \mathcal{L}$$

$$= \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0} + \underbrace{\epsilon_0 (\vec{E} \cdot \nabla) V + \epsilon_0 (\nabla \cdot \vec{E}) V}_{= 0}$$

$$= \epsilon_0 \nabla \cdot (V \vec{E})$$

이 부분은 가우스 정리에 의해
경계에서의 적분으로 바뀌게 되고,
무한대에서의 경계조건에 의해
0으로 보낼 수 있습니다.

$$= \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0}$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + A_\mu J^\mu$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0}$$

즉, 우리가 잘 알고 있는 에너지 밀도를 얻게 됩니다.

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi} (i\gamma^\mu \underset{= \partial_\mu - ieA_\mu}{D_\mu} - m) \psi$$

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} + \dots$$

이러한 라그랑지안을 일반화하면
 현대 입자 물리학의 다양한 이론들을 기술할 수 있게 됩니다.
 많은 경우 게이지 장들은 전자기학을 일반화한 것이 되며,
 원천을 만들어내는 물질들도 대칭성에 의해 주어지게 됩니다.

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi} (i\gamma^\mu \underset{= \partial_\mu - ieA_\mu}{D_\mu} - m) \psi$$

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} + \dots$$

그래서 자연을 설명하는 라그랑지안은
게이지 대칭성과 이것을 붕괴시키는 메커니즘에 의해 기술됩니다.
그리고 이것을 양자화할 필요가 있습니다.

그러나 모든 것의 출발은
바로 전자기학을 상대론적으로 이해해서
로렌츠 벡터 및 텐서로 기술하는 것으로부터 비롯됩니다.
고전 전자기학에 대한 공부는
현대 입자 물리학과 아주 밀접하게 맞닿아 있습니다.

감사합니다