

제2강

열과 확률

열heat이란 무엇인가?



우리는 일상적으로 열을 뜨거움 또는 온도와 연관시킵니다.



물리학에서 **열**이란 (거시적인 변수로 표현되는) **일** work 이외의 방법으로 에너지를 **전달하는 형태**를 이야기합니다.



물리학에서 **열**이란 (거시적인 변수로 표현되는) **일** work 이외의 방법으로 에너지를 **전달하는 형태**를 이야기합니다.



이렇게 전달된 에너지를 **열에너지** 혹은 **내부에너지**라고 합니다.
열이라는 개념 자체는 **전달되는 에너지**만을 의미합니다.

$$dQ = CdT$$

물체의 온도를 dT 만큼 올리는데 필요한 열의 양은
 $dQ = CdT$ 가 됩니다.

$$C = \frac{dQ}{dT}$$

열용량heat capacity은 dQ 와 dT 사이의 비율로 정의됩니다.
열용량은 물질의 양에 비례합니다.

$$c = \frac{C}{m}$$

비열specific heat capacity은 단위질량당 열용량입니다.
이것은 물질의 특성으로 생각할 수 있습니다.

$$C_V = \left(\frac{\partial Q}{\partial T} \right)_V \quad C_p = \left(\frac{\partial Q}{\partial T} \right)_p$$

열용량(heat capacity)을 실험적으로 결정할 때 구속조건이 필요합니다.
 부피가 일정하면 정적 열용량,
 압력이 일정하면 정압 열용량이라고 합니다.

$$C_p = C_v + Nk$$

정적 열용량과 정압 열용량은 대체로 위와 같은 관계를 가집니다.
여기에 대해서는 앞으로 설명할 것입니다.

확률을 사용하는 방법



페르마와 파스칼

서로 실력이 비슷한 철수와 영희가
각자 32만원을 걸고 주사위 게임을 했다.
세 번을 먼저 이기는 사람이 모든 돈을 가져가기로 했다.

현재 철수는 두 번, 영희는 한 번을 이긴 상황이고,
사정상 더는 게임을 할 수 없게 되었다.

그렇다면 철수와 영희에게 상금을 어떻게 분배해야 하는가?

영희의 주장:

앞으로 이루어질 경우의 수는 세 가지 이다.

철수 승

철수 패/철수 승

철수 패/철수 패

앞의 두 가지는 철수가 이기는 경우이고

세 번째는 영희가 이기는 경우이다.

따라서 상금은 2:1로 나누어야 한다.

철수의 주장:

앞으로 이루어질 경우의 수는 세 가지 이다.

철수 승

철수 패/철수 승

철수 패/철수 패

첫 번째의 확률은 $\frac{1}{2}$, 두 번째의 확률은 $\frac{1}{4}$, 세 번째의 확률은 $\frac{1}{4}$ 이다.

따라서 철수가 이길 확률은 $\frac{3}{4}$, 영희가 이길 확률은 $\frac{1}{4}$ 이다.

따라서 상금은 3:1로 나누어야 한다.



페르마와 파스칼은 후자의 주장이 맞다는 것을
확인해주었다고 합니다.

$$p_i = \frac{n_i}{N}$$

어떤 **사건**의 **확률**이란
그 사건이 일어날 경우의 수를
전체 경우의 수로 나눈 것을 말합니다.

$$p_i = \frac{n_i}{N}$$

어떤 사건의 확률이란
그 사건이 일어날 경우의 수를
전체 경우의 수로 나눈 것을 말합니다.

$$N = \sum_i n_i$$

전체 경우의 수는 각 사건의 경우의 수의 총 합입니다.

$$1 = \sum_i p_i$$

따라서 확률의 총 합은 1이 되어야 합니다.
이것을 **규격화 조건**이라고 합니다.

$$1 = \int p(x) dx$$

따라서 확률의 총 합은 1이 되어야 합니다.
이것을 **규격화 조건**이라고 합니다.

$$\langle f(x) \rangle = \int f(x)p(x)dx$$

기댓값 expectation value

$$\Delta x = \sqrt{\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle}$$

$$= \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$$

표준편차 standard deviation

정규Gaussian 분포

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}$$

여기에서 x_0 는 기댓값expectation value이고

σ 는 표준편차standard deviation가 됩니다.

그리고 $1/\sqrt{2\pi\sigma^2}$ 은 규격화normalization 상수가 됩니다.

$$p_u(u)du p_v(v)dv$$

두 변수가 서로 독립인 경우

$$\langle uv \rangle = \langle u \rangle \langle v \rangle$$

두 변수가 서로 독립인 경우

$$Y = \sum_{i=1}^n X_i$$

n 개의 독립적인 사건($X_1, X_2, \dots, X_n$)이 일어났을 때
위와 같이 정의된 Y 의 기댓값을 생각해봅시다.
각 X_i 의 기댓값 및 표준편차는 동일하게 $\langle X \rangle$ 및 ΔX 라고 합시다.

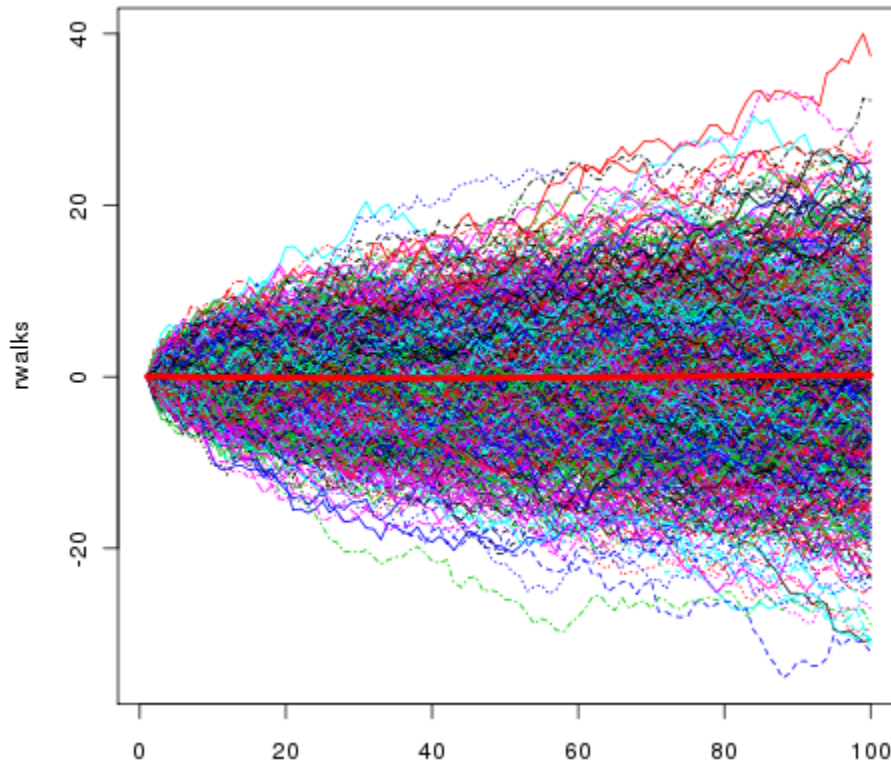
$$\langle Y \rangle = n \langle X \rangle$$

$$\Delta Y = \sqrt{n} \Delta X$$

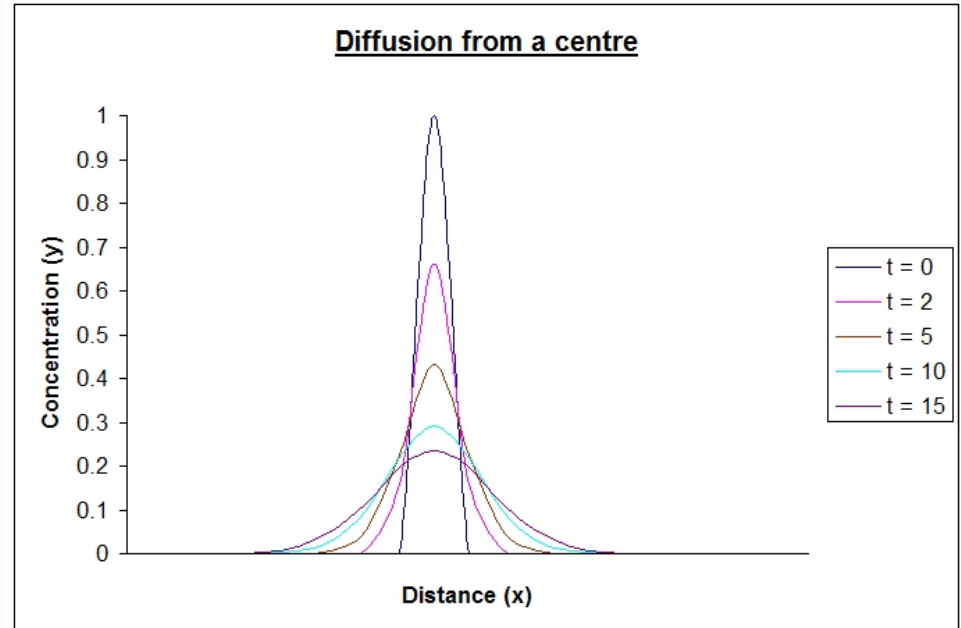
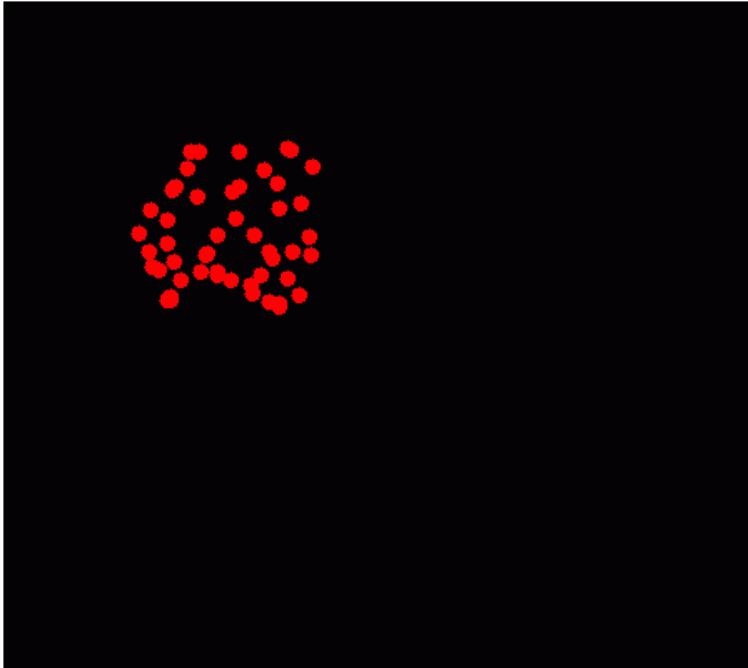
그러면 우리는 위와 같은 관계식을 증명할 수 있습니다.

$$\Delta Y = \sqrt{n} \Delta X$$

이 결과가 가지는 중요한 의미는 이렇습니다.
어떤 사람이 좌우로 무작위적으로 걸으면 random walking
평균적으로는 원점에 있어야 합니다.
그러나 시행 횟수가 늘어남에 따라 원점에서 벗어나게 되는 위치는
 $\sqrt{n}$ 에 비례해서 늘어나게 됩니다.



이 결과가 가지는 중요한 의미는 이렇습니다.
어떤 사람이 좌우로 무작위적으로 걸으면 random walking
평균적으로는 원점에 있어야 합니다.
그러나 시행 횟수가 늘어남에 따라 원점에서 벗어나게 되는 위치는
 $\sqrt{n}$ 에 비례해서 늘어나게 됩니다.



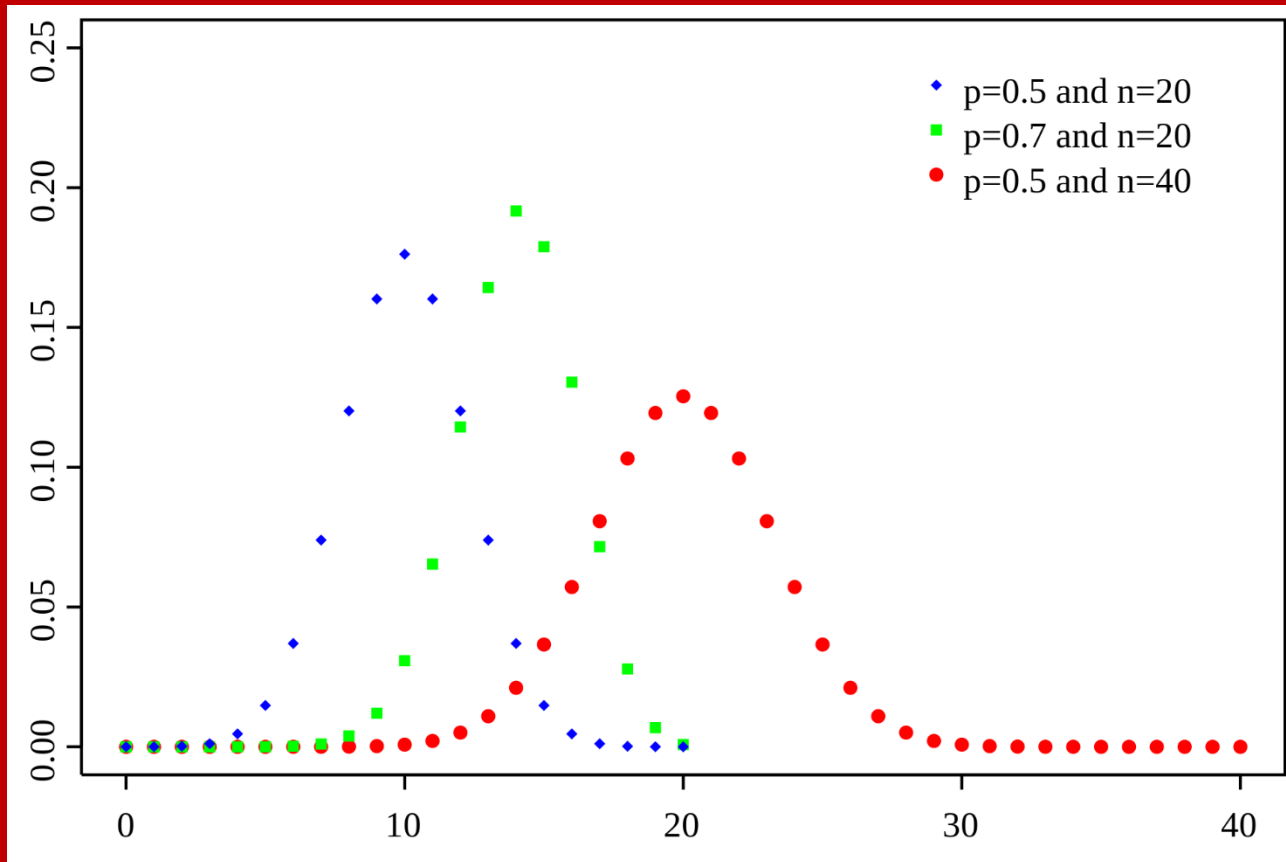
스텝 수가 시간에 비례한다고 하면,
표준편차가 시간에 따라 증가하는 것으로 볼 수 있습니다.
이것을 통해서 확산diffusion을 설명할 수 있습니다.

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r! (n - r)!}$$

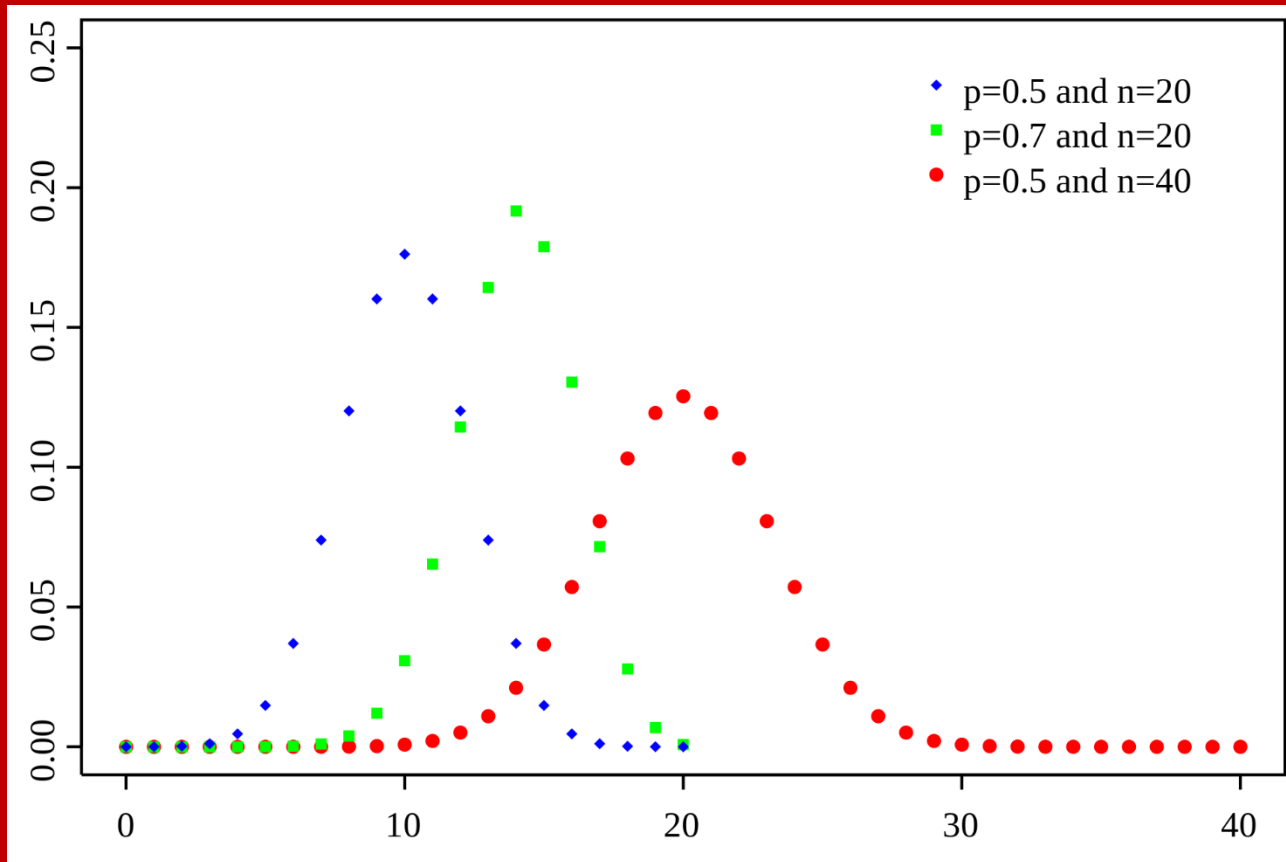
n 가지 가능성 중에서 r 개를
순서를 생각하지 않고 선택하는 경우의 수

$$p(n, k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

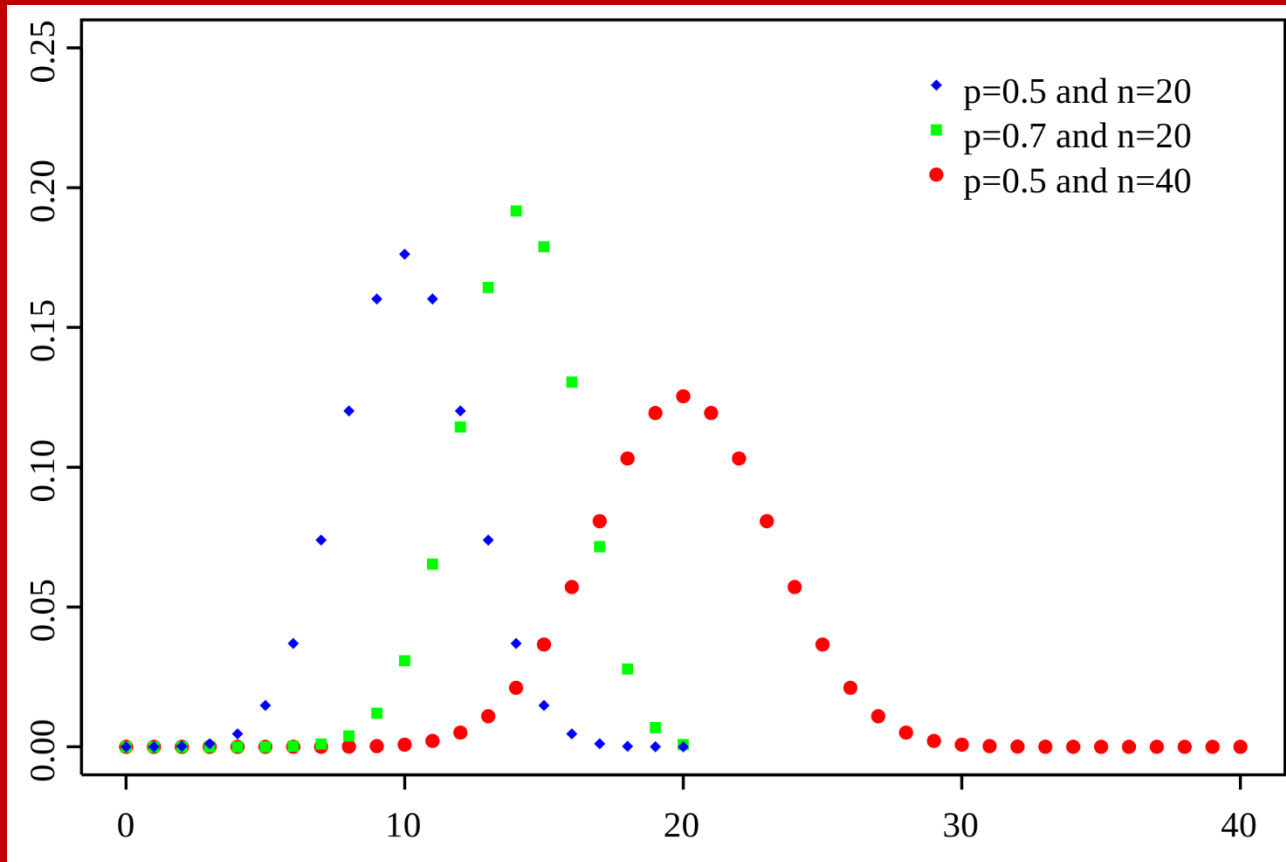
이제 하나를 선택하는데 성공할 확률을 p 라고 합시다.
그러면 n 번 시도해서 순서를 생각하지 않고 k 번 성공하는 것에 대한
확률분포는 위와 같이 됩니다.



이것을 이항분포라고 합니다.



이항분포에서의 기댓값은 $\langle k \rangle = np$ 이고
표준편차는 $\Delta k = \sqrt{np(1-p)}$ 가 됩니다.



따라서 시행횟수가 늘어날수록 분포가 뽕족해지면서
기댓값이 더 중요해집니다.
그리고 표준편차가 $\sqrt{n}$ 에 비례한다는 것도 다시 확인할 수 있습니다.

감사합니다