

제8강

정보이론

오늘날 물리학자들은 지금까지 살펴본
열역학적 엔트로피와 볼츠만 엔트로피를
정보의 관점에서 근본적으로 다시 정의하고자 합니다.

이러한 엔트로피의 정의는 더 깊이 들어가면
양자역학의 파동함수와 맞닿아 있습니다.

양자역학에서 통계역학으로

밀도 행렬

$$\hat{\rho} \equiv |\Psi\rangle\langle\Psi| = \sum_{n=1}^N |c_n|^2 |n\rangle\langle n| = \sum_{n=1}^N p_n |n\rangle\langle n|$$

$$|\Psi\rangle = \sum_n c_n |n\rangle$$

밀도 행렬

$$\hat{\rho} \equiv |\Psi\rangle\langle\Psi| = \sum_{n=1}^N |c_n|^2 |n\rangle\langle n| = \sum_{n=1}^N p_n |n\rangle\langle n|$$

그러면 일반적으로 다음이 성립합니다.

$$\text{tr } \hat{\rho} \hat{Q} = \langle \hat{Q} \rangle$$

$$|\Psi\rangle = \sum_n c_n |n\rangle$$

폰 노이만 엔트로피 von Neumann entropy

폰 노이만은 다음과 같은 방법으로 엔트로피를 정의했습니다.

$$S_{vN} \equiv -\text{tr} \hat{\rho} \ln \hat{\rho} = - \sum_{n=1}^N p_n \ln p_n$$

$$|\Psi\rangle = \sum_n c_n |n\rangle$$

폰 노이만 엔트로피 von Neumann entropy

폰 노이만은 다음과 같은 방법으로 엔트로피를 정의했습니다.

$$S_{vN} \equiv -\text{tr} \hat{\rho} \ln \hat{\rho} = - \sum_{n=1}^N p_n \ln p_n$$

이것은 새넨Shannon이 정의한 정보information의 기댓값과도 같습니다.

$$I_n \equiv -\ln p_n$$

$$|\Psi\rangle = \sum_n c_n |n\rangle$$



존 폰 노이만



클로드 새넨

정보란?

$$I_n \equiv -\ln p_n$$

확률이 낮을 수록 정보의 양도 증가합니다.

새년의 무잡음 채널 코딩 정리

정보는 엔트로피의 양보다 손실없이 더 작게 압축될 수는 없다.



즉, 엔트로피는 정보의 용량이라고 생각할 수 있습니다.
우리는 어떤 시스템에 엔트로피 이상의 정보를 기록할 수 없습니다.

양자역학에서 통계역학으로

폰 노이만 엔트로피의 최대값은 모든 상태가 같은 확률을 가질 때 얻어진다는 것을 보일 수 있습니다.

즉, $p_n = 1/N$ 을 요청합니다. 이 때 우리는 최대의 엔트로피, 즉 볼츠만 엔트로피 Boltzmann entropy를 얻게 됩니다.

$$-\sum_{n=1}^N p_n \ln p_n = \ln N \equiv S_B$$

양자역학에서 통계역학으로

폰 노이만 엔트로피의 최대값은 모든 상태가 같은 확률을 가질 때 얻어진다는 것을 보일 수 있습니다.

즉, $p_n = 1/N$ 을 요청합니다. 이 때 우리는 최대의 엔트로피, 즉 볼츠만 엔트로피 Boltzmann entropy를 얻게 됩니다.

$$-\sum_{n=1}^N p_n \ln p_n = \ln N \equiv S_B$$

통계역학 및 열역학의 이론적 기초가
여기에서부터 시작됩니다.

열역학thermodynamics과 통계역학statistical mechanics의
차이는 무엇일까요?

열역학은 측정 가능한 양들 사이의 관계에 대한 것입니다.

$$dE = TdS - pdV$$

$$pV = NkT$$

$$E = \frac{3}{2}NkT$$

열역학은 측정 가능한 양들 사이의 관계에 대한 것입니다.

$$dE = TdS - pdV$$

$$pV = NkT$$

$$E = \frac{3}{2}NkT$$

여기에는 아직 **확률**에 대한 이야기는 없습니다.

특정 상태가 선호되기 위해서는 그 상태에 해당하는
경우의 수가 많아야 합니다.

특정 상태가 선호되기 위해서는 그 상태에 해당하는
경우의 수가 많아야 합니다.

가장 무작위적일 때
경우의 수가 가장 많다는 것이 알려져 있습니다.

특정 상태가 선호되기 위해서는 그 상태에 해당하는
경우의 수가 많아야 합니다.

가장 무작위적일 때
경우의 수가 가장 많다는 것이 알려져 있습니다.

이것은 엔트로피가 최대가 되어야 한다는
것과 같은 말이 됩니다.

양자역학에서 통계역학으로

폰 노이만 엔트로피의 최대값은 모든 상태가 같은 확률을 가질 때 얻어진다는 것을 보일 수 있습니다.

즉, $p_n = 1/N$ 을 요청합니다. 이 때 우리는 최대의 엔트로피, 즉 볼츠만 엔트로피 Boltzmann entropy를 얻게 됩니다.

$$-\sum_{n=1}^N p_n \ln p_n = \ln N \equiv S_B$$

양자역학에서 통계역학으로

폰 노이만 엔트로피의 최대값은 모든 상태가 같은 확률을 가질 때 얻어진다는 것을 보일 수 있습니다.

즉, $p_n = 1/N$ 을 요청합니다. 이 때 우리는 최대의 엔트로피, 즉 볼츠만 엔트로피 Boltzmann entropy를 얻게 됩니다.

$$-\sum_{n=1}^N p_n \ln p_n = \ln N \equiv S_B$$

확률을 이렇게 할당한 통계적 표본들을 작은바른틀 앙상블 microcanonical ensemble이라고 합니다.

바른틀 앙상블 canonical ensemble

우리는 여기에 좀 더 구속조건을 줄 수 있습니다.

바른틀 앙상블 canonical ensemble

우리는 여기에 좀 더 구속조건을 줄 수 있습니다.
예를 들어, 시스템이 큰 열원^{heat bath} 안에 놓여있다면,
에너지는 변할 수 있지만 에너지의 기댓값은 변하지 않습니다.

$$\langle H \rangle = \text{const}$$

바른틀 앙상블 canonical ensemble

우리는 여기에 좀 더 구속조건을 줄 수 있습니다.
예를 들어, 시스템이 큰 열원^{heat bath} 안에 놓여있다면,
에너지는 변할 수 있지만 에너지의 기댓값은 변하지 않습니다.

$$\langle H \rangle = \text{const}$$

폰 노이만 엔트로피를 이러한 구속조건 하에서 최대화 하게 되면,
라그랑주 승수^{Lagrange multiplier}에 의해 온도가 도입됩니다.

바른틀 앙상블 canonical ensemble

우리는 여기에 좀 더 구속조건을 줄 수 있습니다.
예를 들어, 시스템이 큰 열원^{heat bath} 안에 놓여있다면,
에너지는 변할 수 있지만 에너지의 기댓값은 변하지 않습니다.

$$\langle H \rangle = \text{const}$$

폰 노이만 엔트로피를 이러한 구속조건 하에서 최대화 하게 되면,
라그랑주 승수^{Lagrange multiplier}에 의해 온도가 도입됩니다.
이 때의 확률분포는 볼츠만 인자^{Boltzmann factor}를 따르게 됩니다.

$$\frac{S}{k} - \alpha \left(\sum p_i - 1 \right) - \beta \left(\sum p_i E_i - E \right)$$

바른틀 앙상블에서 엔트로피를 최대화하기 위해서는
라그랑주 승수법에 따라 위의 값에 대한 최대값을 찾으면 됩니다.

$$\frac{S}{k} - \alpha \left(\sum p_i - 1 \right) - \beta \left(\sum p_i E_i - E \right)$$

α 와 β 는 라그랑주 승수이고,
괄호 안에 있는 식들은 우리가 부여하는 구속조건입니다.

$$\frac{S}{k} - \alpha \left(\sum p_i - 1 \right) - \beta \left(\sum p_i E_i - E \right)$$

여기에서 엔트로피는 $S = -\sum p_i \ln p_i$ 로 표현됩니다.

$$-\ln p_j - 1 - \alpha - \beta E_j = 0$$

위의 식을 p_j 에 대해서 미분하고 0이 되는 조건을 구합니다.

$$p_j = \frac{e^{-\beta E_j}}{e^{1+\alpha}} \equiv \frac{e^{-\beta E_j}}{Z}$$

따라서 p_j 는 위와 같습니다.
이 식에서 α 는 규격화를 위해 도입되는 상수 Z 와
같은 역할을 합니다.

$$p_j = \frac{e^{-\beta E_j}}{e^{1+\alpha}} \equiv \frac{e^{-\beta E_j}}{Z}$$

이제 우리는 앞장에서 논의한 열평형 상태의 확률분포와 비교해서
라그랑주 승수의 해석이 $\beta \equiv 1/kT$ 가 되어야 한다는 것을
알 수 있습니다.

$$p_j = \frac{e^{-\beta E_j}}{e^{1+\alpha}} \equiv \frac{e^{-\beta E_j}}{Z}$$

우리는 이렇게 **볼츠만 분포**를 유도하게 됩니다.

큰 그림: 통계역학에서 열역학으로

엔트로피 최대 원리 + 구속조건
constraints/ensembles

큰 그림: 통계역학에서 열역학으로

엔트로피 최대 원리 + 구속조건
constraints/ensembles



볼츠만 인자 $p_j \propto e^{-E_j/kT}$
Boltzmann factor

큰 그림: 통계역학에서 열역학으로

엔트로피 최대 원리 + 구속조건
constraints/ensembles



볼츠만 인자 $p_j \propto e^{-E_j/kT}$
Boltzmann factor



분배 함수 $Z = \sum p_j = e^{-F/kT}$
partition function

큰 그림: 통계역학에서 열역학으로

엔트로피 최대 원리 + 구속조건
constraints/ensembles



볼츠만 인자 $p_j \propto e^{-E_j/kT}$
Boltzmann factor



분배 함수 $Z = \sum p_j = e^{-F/kT}$
partition function



에너지 함수 $F = E - ST$
energy function

따라서 통계역학에서는
미시적 원리 또는 양자역학적 원리에 의해
확률을 부여하고,
이러한 확률들을 통해 분배함수를 적고,
최종적으로 열역학적 양을 구해서
현상을 성공적으로 설명할 수 있기를 바랍니다.

큰 그림: 엔트로피의 서로 다른 정의들

양자역학: 폰 노이만 엔트로피

$$S = -\text{Tr} \rho \ln \rho$$

큰 그림: 엔트로피의 서로 다른 정의들

양자역학: 폰 노이만 엔트로피

$$S = -\text{Tr} \rho \ln \rho$$



엔트로피 = 정보용량

정보이론: 섀넌 엔트로피

$$S = \langle I \rangle = -\sum p_i \ln p_i$$

큰 그림: 엔트로피의 서로 다른 정의들

양자역학: 폰 노이만 엔트로피

$$S = -\text{Tr} \rho \ln \rho$$



엔트로피=정보용량

정보이론: 섀넌 엔트로피

$$S = \langle I \rangle = -\sum p_i \ln p_i$$



구속조건

통계역학: 볼츠만 엔트로피

$$S = k \ln \Omega$$

큰 그림: 엔트로피의 서로 다른 정의들

양자역학: 폰 노이만 엔트로피

$$S = -\text{Tr} \rho \ln \rho$$



엔트로피 = 정보용량

정보이론: 섀넌 엔트로피

$$S = \langle I \rangle = -\sum p_i \ln p_i$$



구속조건

통계역학: 볼츠만 엔트로피

$$S = k \ln \Omega$$



거시 변수 표현

열역학: 열역학적 엔트로피

$$S = \int dQ/T$$

얽힘 entanglement 이란?

스핀의 얽힘 entanglement

다음과 같은 경우 한 쪽 스핀이 **업**이면 다른 쪽은 **다운**이고,
그 역도 성립합니다.

즉, 한 스핀의 측정이 다른 스핀의 상태를 결정하게 됩니다.

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$$

스핀의 얽힘 entanglement

이 때 두 입자는 얽혀있다^{entangled}고 합니다.

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$$

스핀의 얽힘 entanglement



스핀의 얽힘 entanglement



스핀의 얽힘과 관련한 개념적 역설로
EPR (Einstein-Podolsky-Rosen) 패러독스라는 것이 알려져 있습니다.
그러나 실제로 정보가 빛의 속도보다 빠르게 이동하거나
양자역학적 얽힘을 부정하는 현상은
실험적으로 알려져 있지 않습니다.

스핀의 얽힘 entanglement



밀도 행렬의 예

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle)$$

$$|\psi\rangle\langle\psi| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

입자 2에 대한 정보만 알고 싶다면?

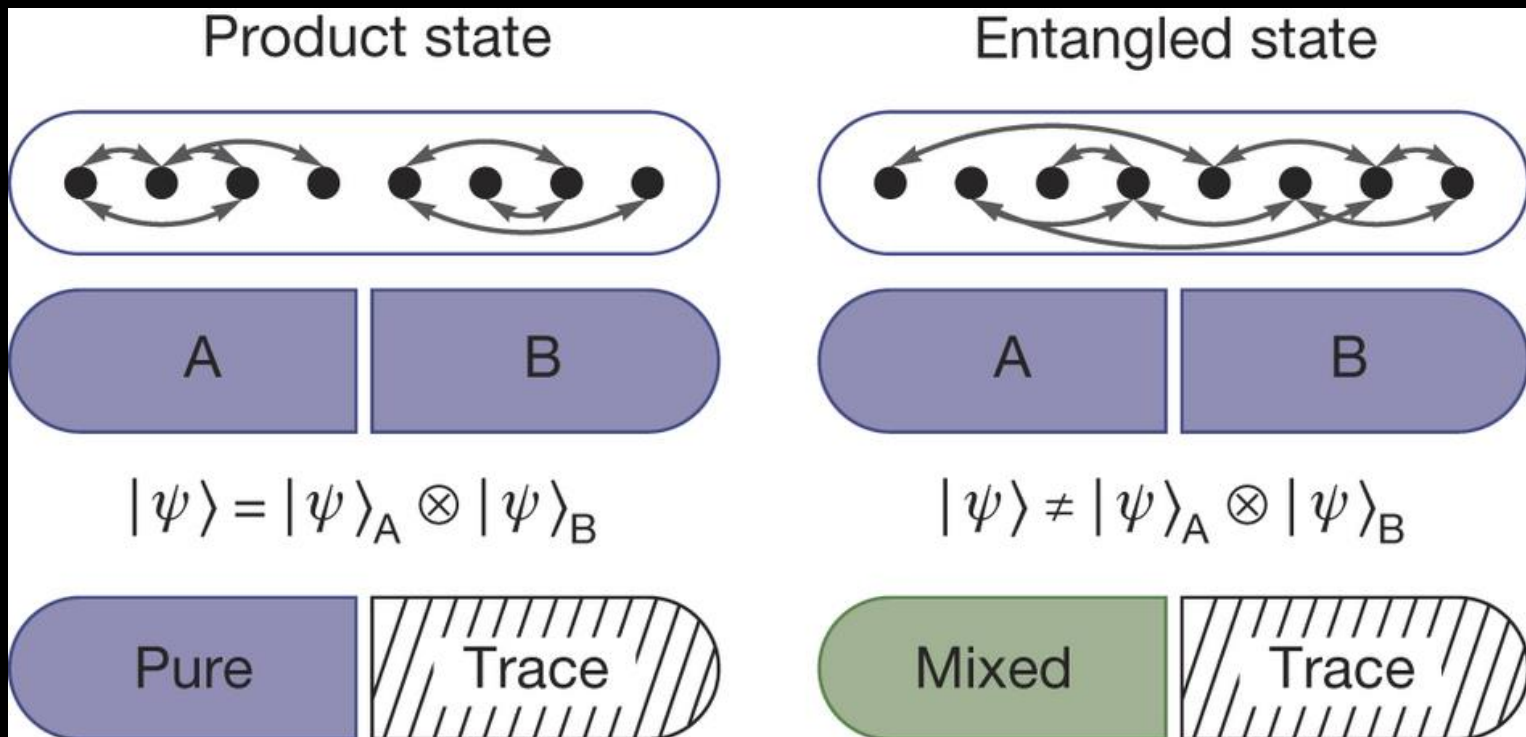
$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle)$$

$$\rho_2 \equiv \text{Tr}_1 |\psi\rangle\langle\psi| = \text{Tr}_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

얽힘 엔트로피 entanglement entropy

$$S(2|1) = -\text{Tr}_2 \rho_2 \ln \rho_2$$

$$= \ln 2 > 0$$



두 시스템이 얽혀 있는 경우에 어느 한 부분의 대각합을 취하면 나머지 부분은 혼합된 mixed 상태가 됩니다.



이사를 하면 한 쪽 집에 있던 정보가 먼저 트럭으로 옮겨가고,
나중에는 이사 가는 집에 완전히 옮겨가게 됩니다.



이런 현상을 물리학적으로 어떻게 기술할 수 있을까요?



볼츠만 엔트로피와 얽힘 엔트로피를 사용해서
둘로 나뉜 시스템에서의 정보의 흐름에 대해 살펴봅시다.

열역학적 깊이 thermodynamic depth

$$I = S_B - S_{ent}$$

로이드Lloyd와 페이지스Pagels는 **정보의 열역학적 깊이**를
위와 같이 정의합니다.

어떤 부분적인 시스템이 열적 평형상태에 있다면
위의 값은 0이 될 것입니다.

열역학적 깊이 thermodynamic depth

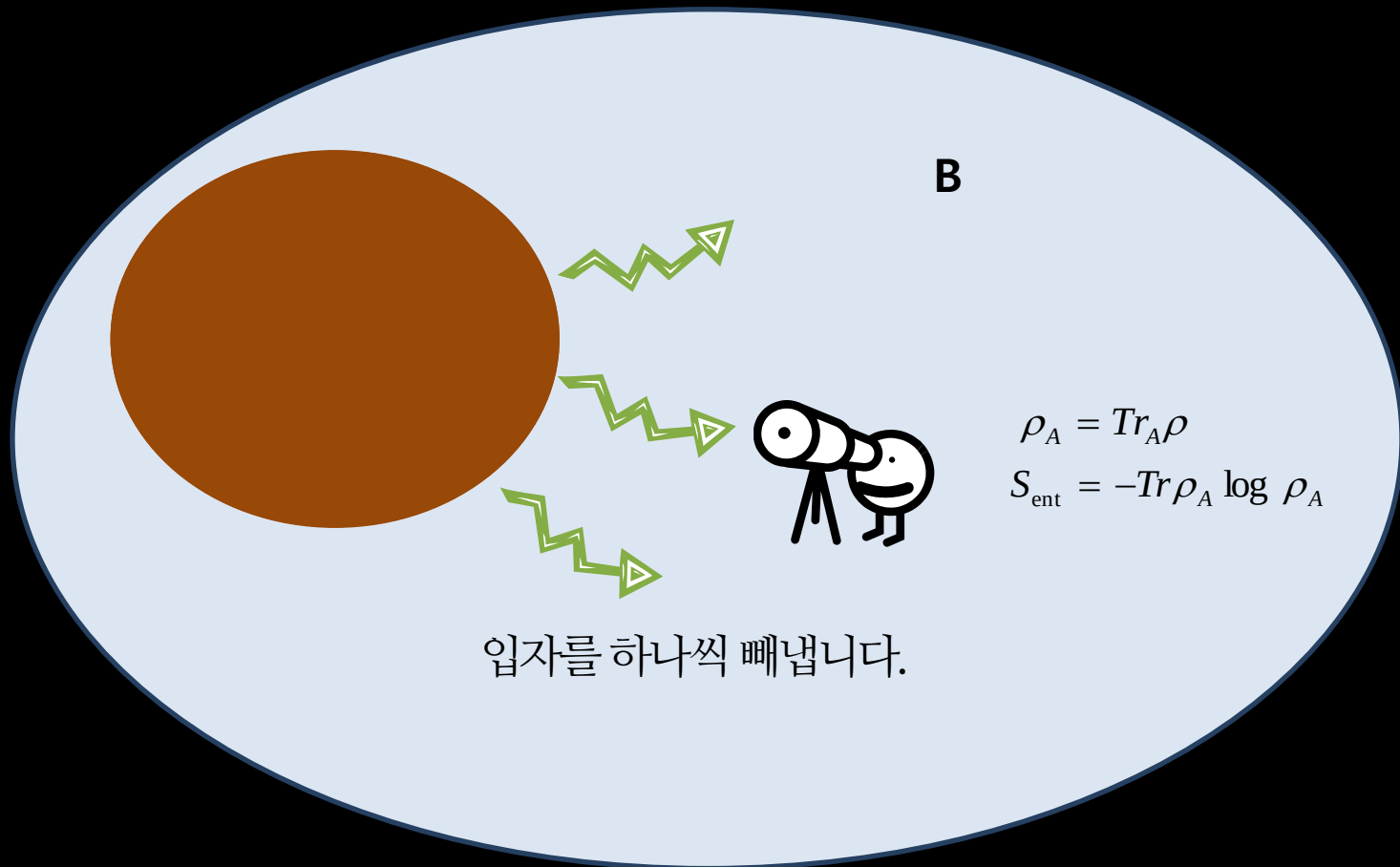
$$I = S_B - S_{ent}$$

그러나 이 값이 0보다 커진다면
우리는 이 부분이 열적 평형상태로부터 벗어나 있다는 것을
원리적으로 측정할 수 있게 됩니다.

열역학적 깊이 thermodynamic depth

$$I = S_B - S_{ent}$$

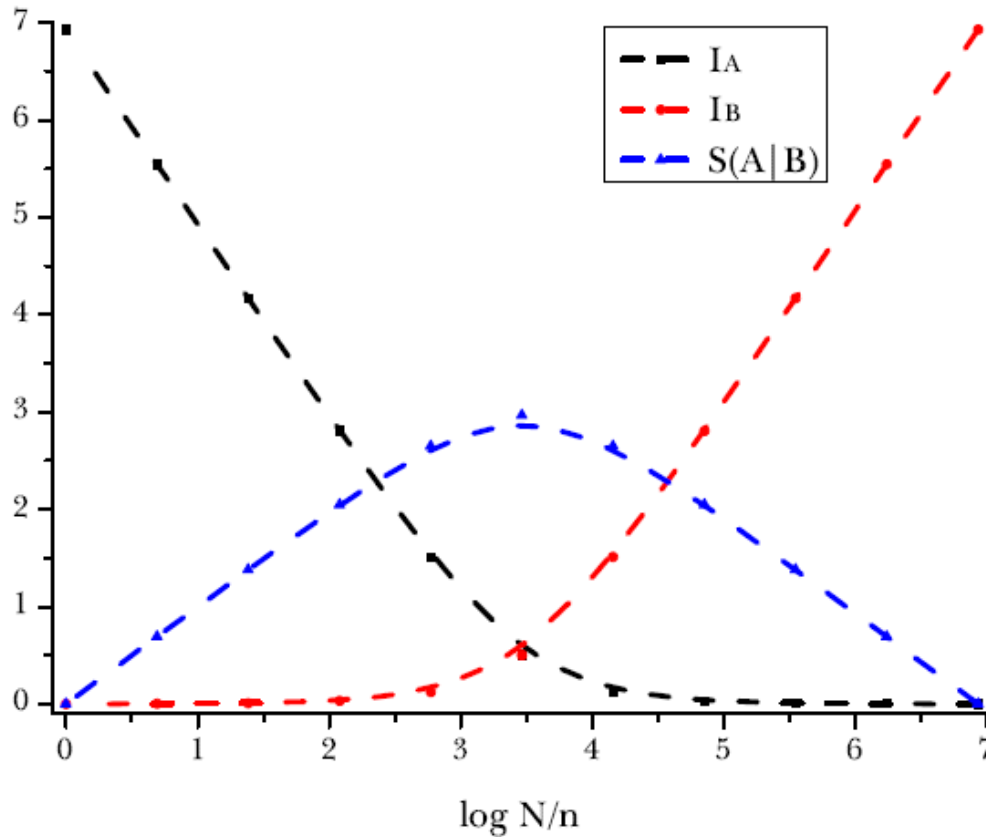
따라서 이 부분적인 시스템에 **정보가 담겨있다**는 것을 알게 됩니다.
이 개념은 정보가 한 쪽에서 다른 쪽으로 넘어오는 과정을 기술할 때
중요한 역할을 합니다.



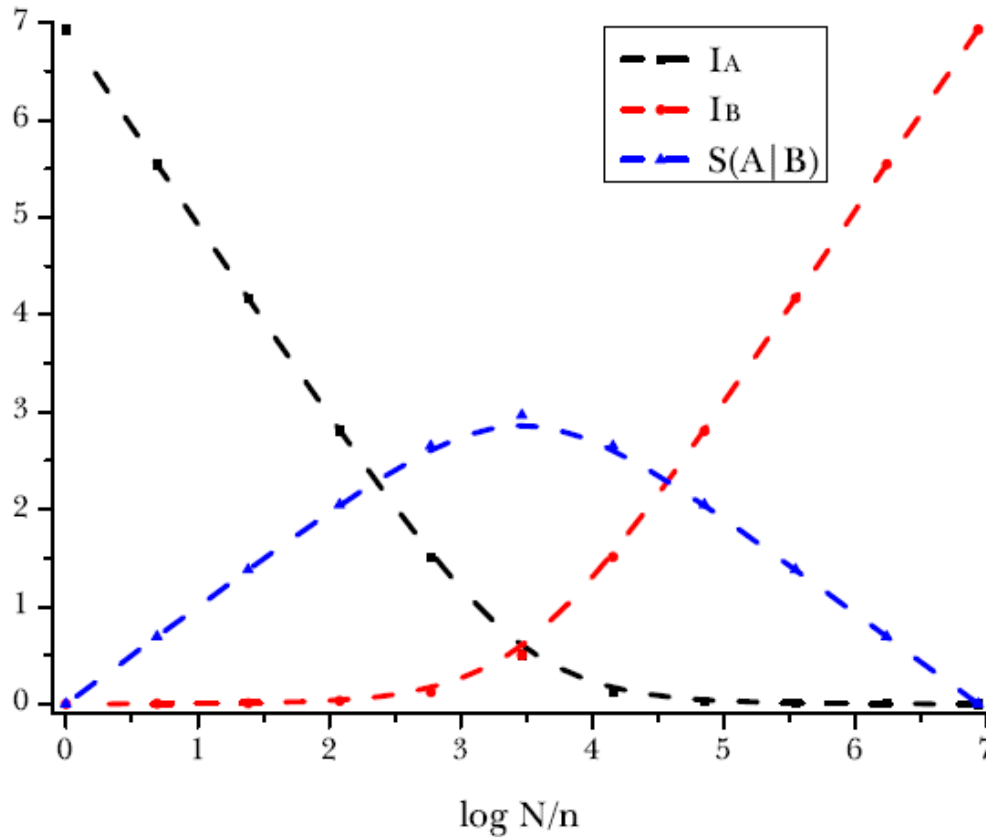
$$\rho_A = \text{Tr}_A \rho$$
$$S_{\text{ent}} = -\text{Tr} \rho_A \log \rho_A$$

입자를 하나씩 빼냅니다.

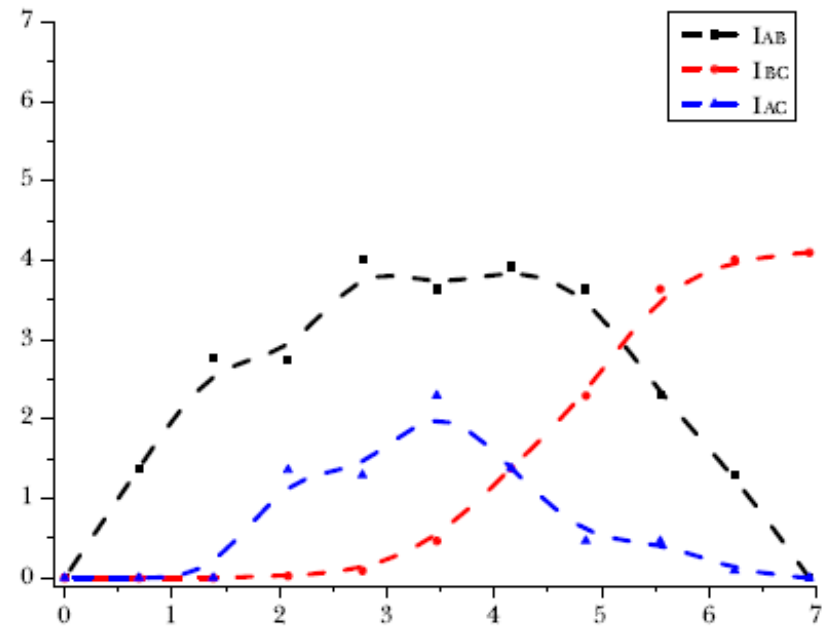
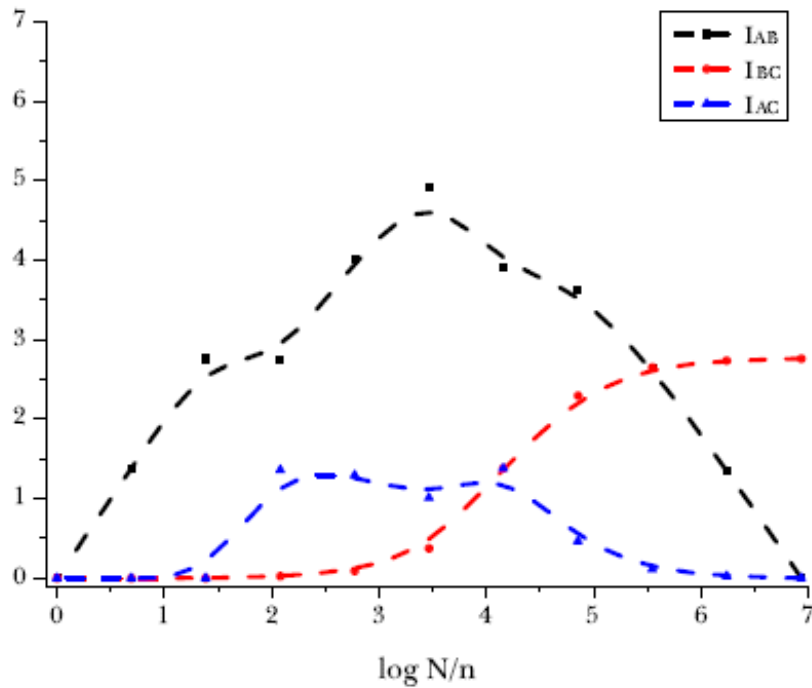
수치적인 실험을 해보면, 2분된 시스템에 대해 페이지Page가 얻은 가장 일반적인 기댓값의 변화와 일치합니다.



정보는 처음에는 시스템 A에 있다가,
업힘에 의해 상호의존정보mutual information의 형태로 전환되고,
최종적으로는 시스템 B로 전달됩니다.



두 개 뿐만 아니라 세 개의 시스템 사이의
얽힘 엔트로피도 계산할 수 있습니다.



감사합니다