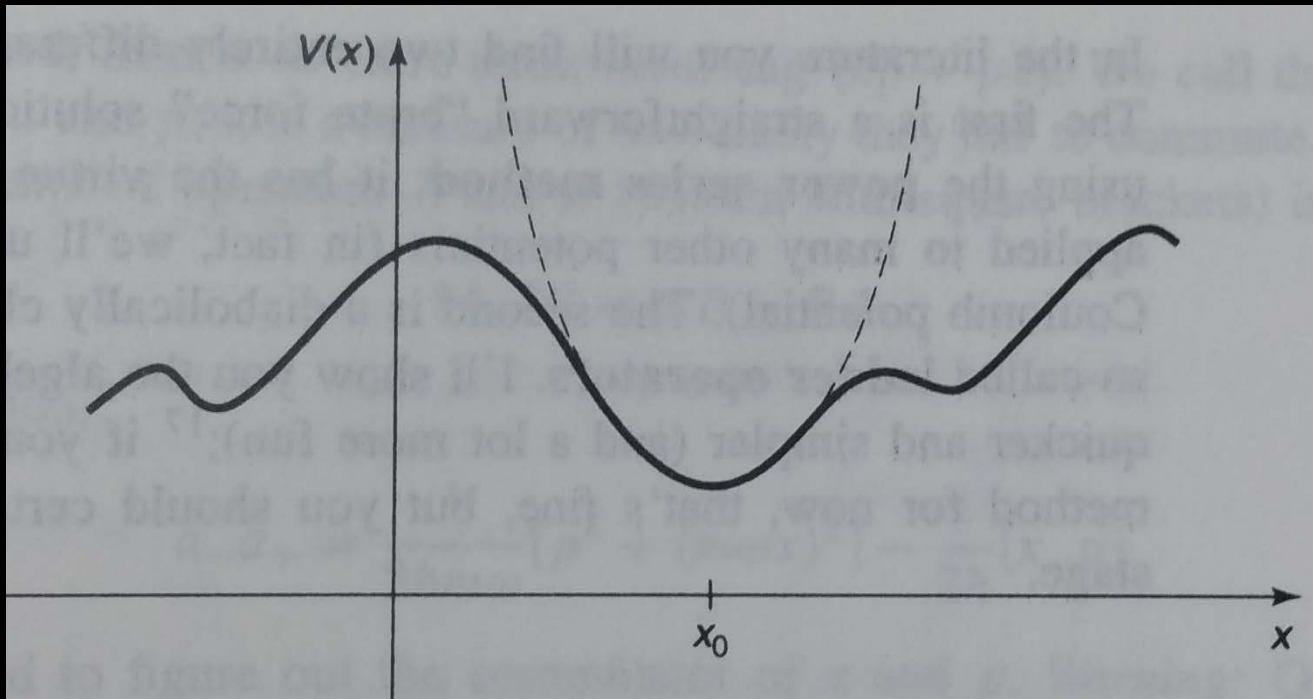


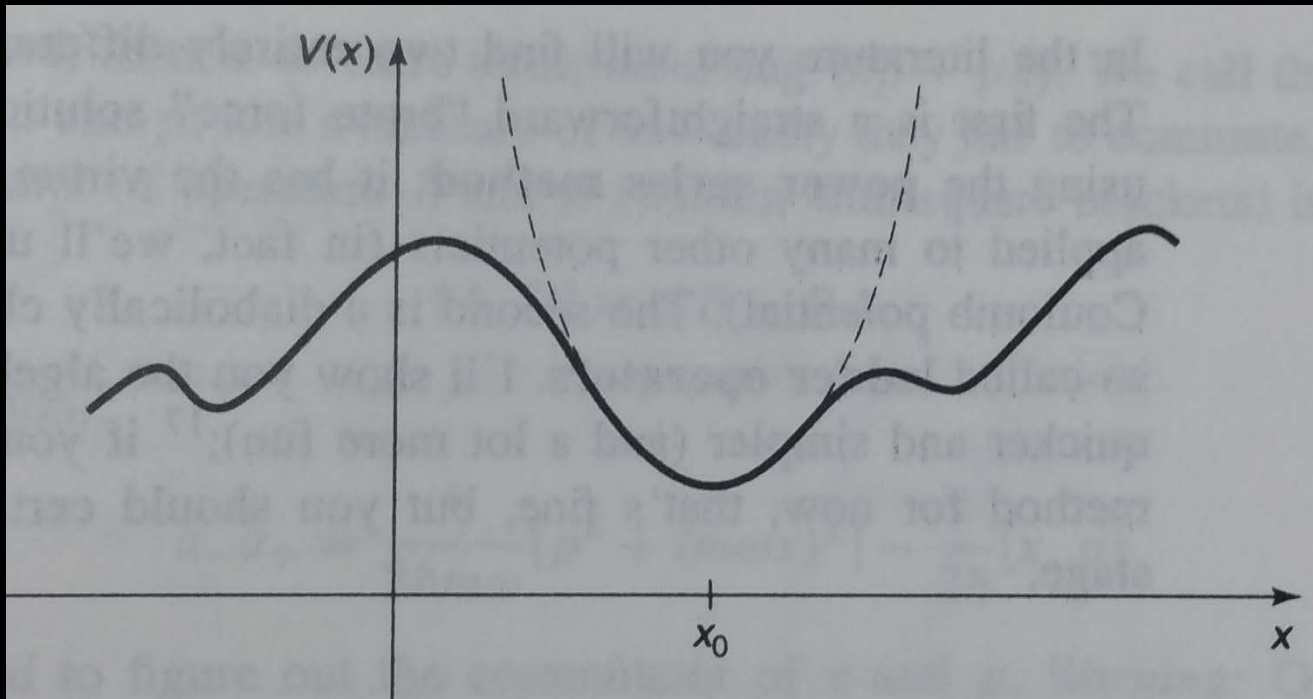
제12강

에너지 등분배

이제부터 미시 상태의 원리들을 이용해
거시 세계의 열역학적 양들을 설명하는
통계역학에 대해서
본격적으로 살펴보도록 합시다.



어떤 시스템의 입자들의 에너지가
위와 같은 퍼텐셜에 의해 주어진다고 합시다.



평형점 근처에서는 테일러 전개에 의해
단순조화운동으로 근사가 가능합니다.

$$V(x) = V_0 + \frac{1}{2}V''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots$$

평형점 근처에서는 테일러 전개에 의해
단순조화운동으로 근사가 가능합니다.

$$E = \sum_i \left(\frac{1}{2} m v_i^2 + \frac{1}{2} k x_i^2 + \frac{L_i^2}{2I_i} \right)$$

이 때 입자 하나의 에너지는 위와 같이 기술됩니다.

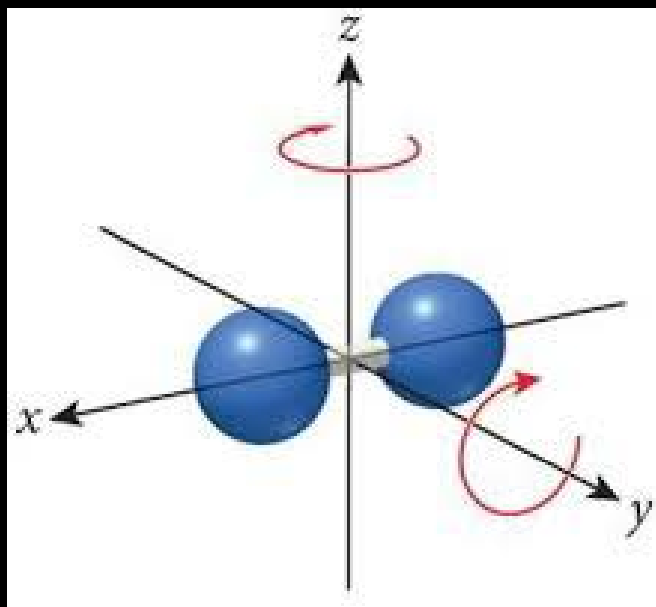
여기에서 v_i 는 질량중심의 병진운동,

x_i 는 질량중심 주변의 진동운동,

L_i 는 질량중심 주변의 회전운동에 대응됩니다.

$$E = \sum_i \left(\frac{1}{2} m v_i^2 + \frac{1}{2} k x_i^2 + \frac{L_i^2}{2I_i} \right)$$

따라서 일반적으로 v_i 는 세 방향 (x, y, z -축),
 x_i 는 연결된 용수철의 개수의 두 배 (각 용수철의 운동 및 퍼텐셜 에너지) 만큼,
 L_i 는 세 방향 (x, y, z -축)이 존재합니다.



단, 1원자 분자의 경우는 진동 및 회전이 없다고 볼 수 있고,
2원자 분자의 경우는 가능한 회전 방향이 두 방향이라고
볼 수 있습니다.

$$\langle \alpha x^2 \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (\alpha x^2) e^{-\alpha x^2 / kT} dx}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2 / kT} dx}$$

이제, 볼츠만 분포를 가정하고
각 운동에 대한 에너지의 기댓값을 구해봅시다.
여기에서 x^2 은 v^2 이나 L^2 으로 바뀌도 상관 없습니다.

$$\langle \alpha x^2 \rangle = \frac{1}{2} kT$$

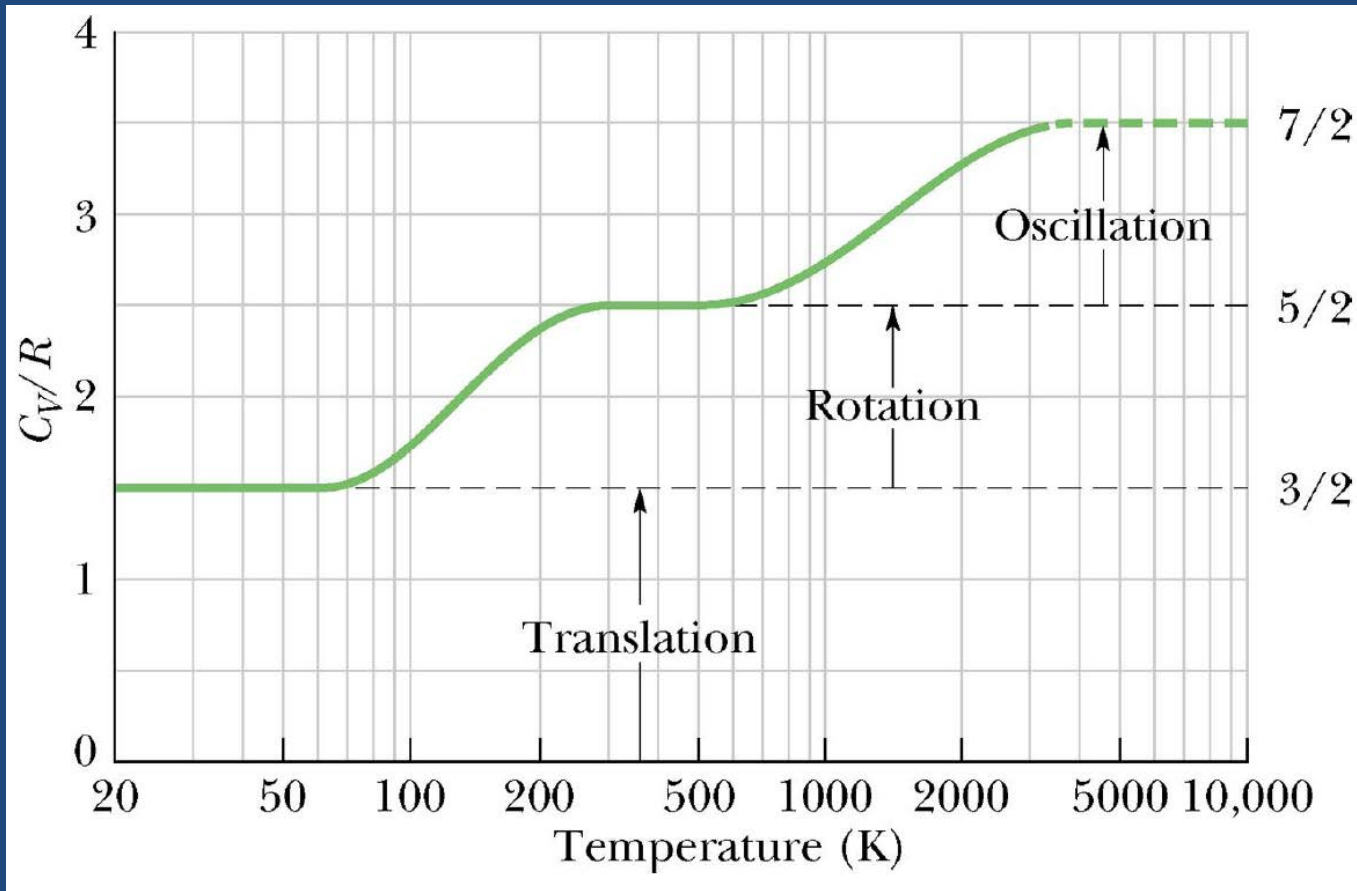
이 적분의 결과는 오직 온도에만 의존합니다.
그리고 이러한 항이 많아지면, 단순히 위의 항을
여러 번 더해주는 것과 같아집니다.

$$\langle E \rangle = \frac{n}{2} kT$$

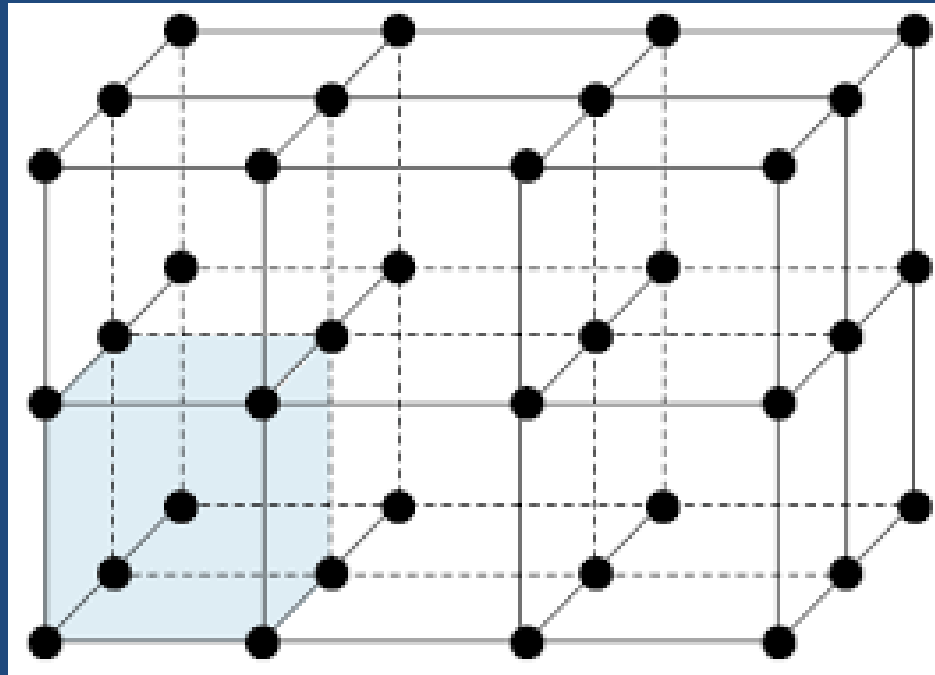
따라서 시스템의 자유도 n 에 대해,
에너지의 기댓값은 위와 같아집니다.
이것을 등분배 정리 equipartition theorem라고 합니다.

등분배 정리

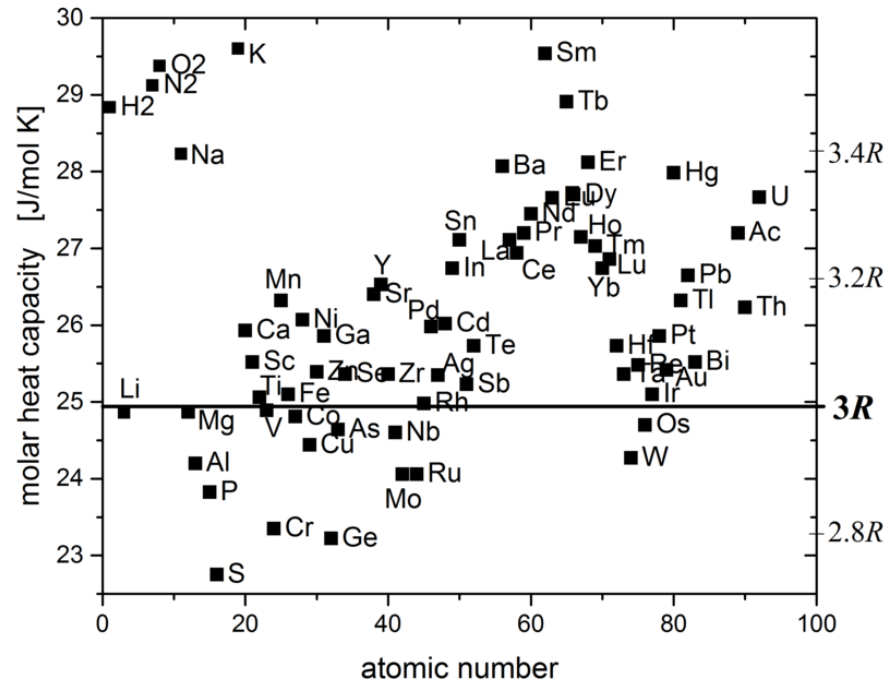
고전적 시스템의 에너지가 n 개의 제곱 모드의 합으로 이루어져 있고
시스템이 온도 T 의 열원에 접해 있다면
시스템의 평균 에너지는 $n \times kT/2$ 이다.



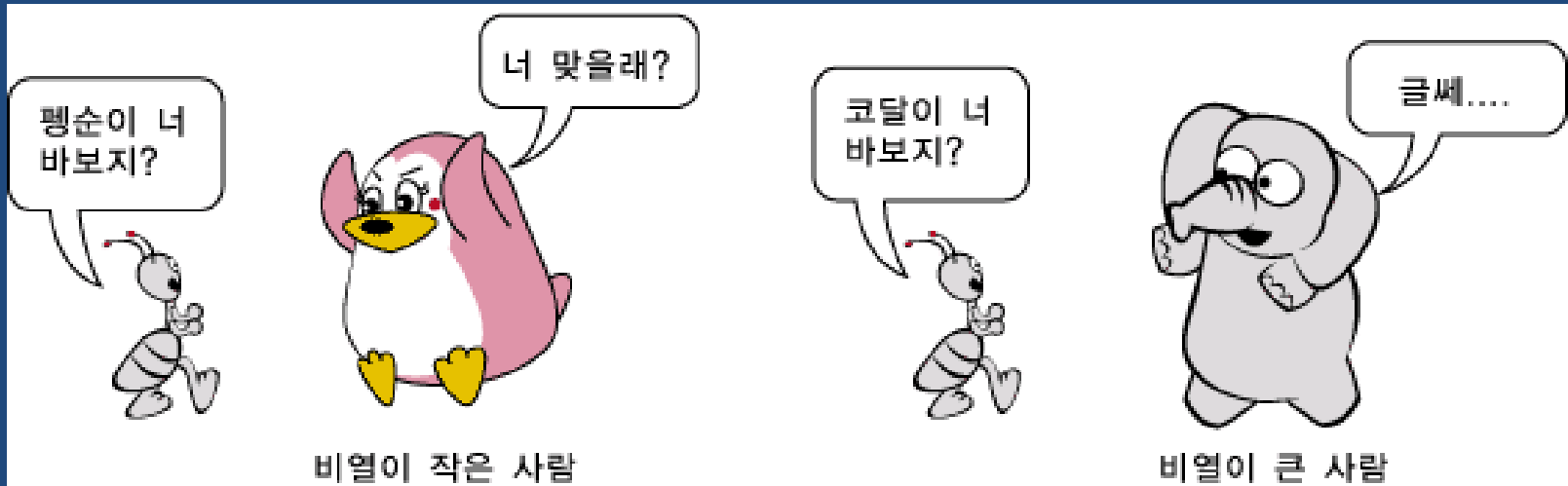
2원자 분자의 경우, 온도에 따라서
병진, 회전, 진동 운동이 순차적으로 활성화됩니다.



3차원 고체 격자의 경우, 병진 및 회전운동은 없으며
진동은 세 축으로 가능합니다.
따라서 $3 \times 2 = 6$ 의 자유도를 가지게 됩니다.
(딜롱-프티 Dulong-Petit 규칙)



3차원 고체 격자의 경우, 병진 및 회전운동은 없으며
진동은 세 축으로 가능합니다.
따라서 $3 \times 2 = 6$ 의 자유도를 가지게 됩니다.
(딜롱-프티 Dulong-Petit 규칙)



에너지 등분배 법칙은 물질의 비열을 측정함으로써
정량적으로 검토될 수 있으며,
그 실험적인 한계 또한 알려져 있습니다.

등분배 정리

고전적 시스템의 에너지가 n 개의 제곱 모드들의 합으로 이루어져 있고
시스템이 온도 T 의 열원에 접해 있다면
시스템의 평균 에너지는 $n \times kT/2$ 이다.

1. 우리는 먼저 **고전적 시스템**을 가정합니다.
양자역학적 시스템의 경우에는 연속적인 적분이 아니라
불연속적인 적분이어야 합니다.
따라서 에너지 준위의 차이보다 온도가 **높은** 경우에만
등분배 정리가 옳게 됩니다.

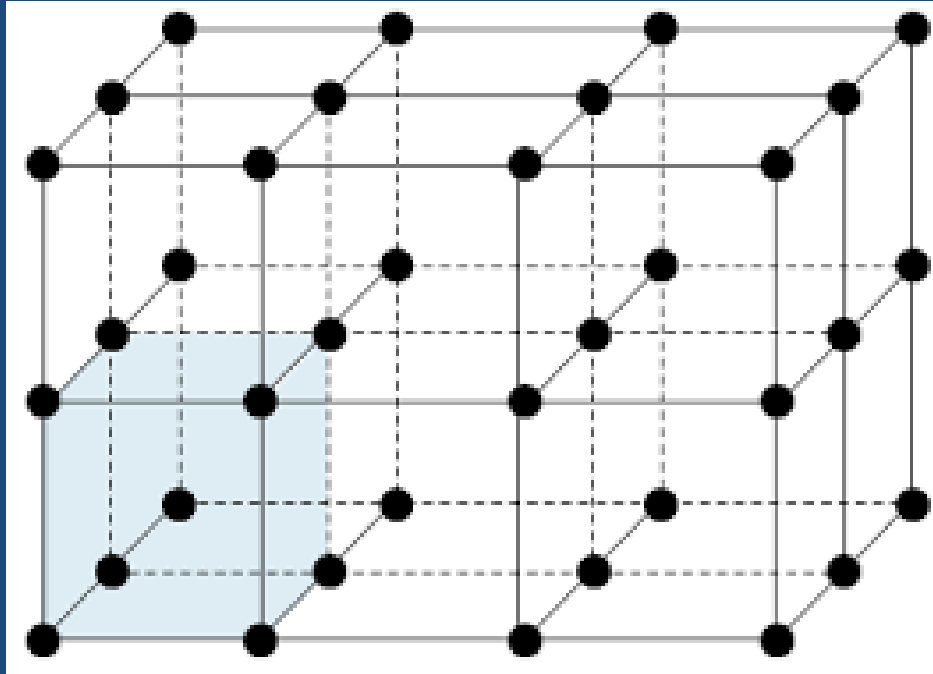
고전적 시스템의 에너지가 n 개의 제공 모드의 합으로 이루어져 있고
시스템이 온도 T 의 열원에 접해 있다면
시스템의 평균 에너지는 $n \times kT/2$ 이다.

2. 에너지를 **제공 모드**로 기술한다는 것은
평형점 근처에서의 테일러 전개를 가정합니다.
테일러 전개의 근사 범위를 넘어가지 않을 정도로
온도가 **낮은** 영역에서
등분배 정리가 옳게 됩니다.

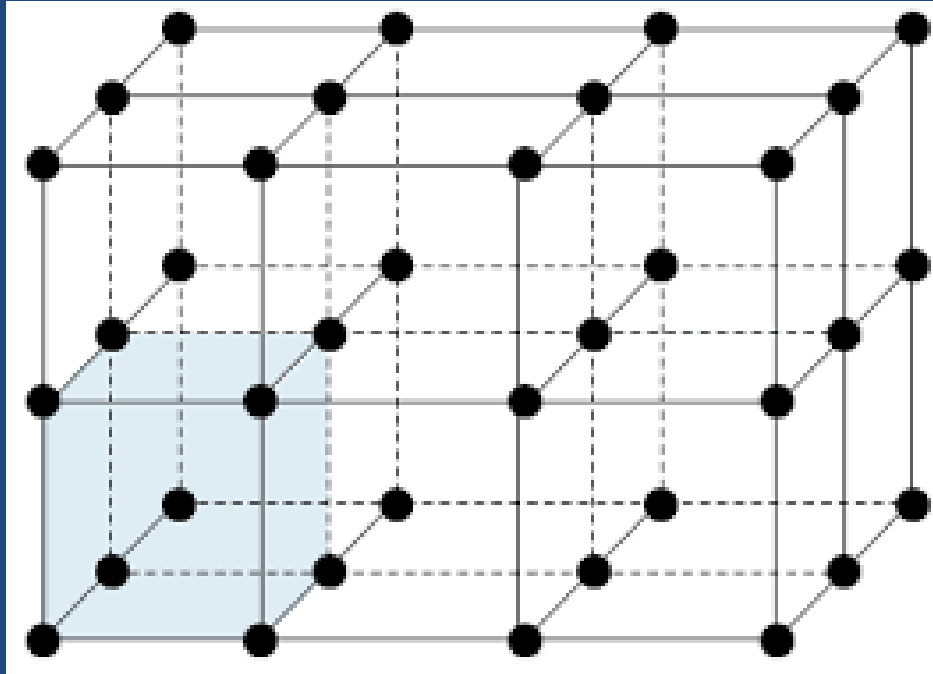
고전적 시스템의 에너지가 n 개의 **제공 모드**의 합으로 이루어져 있고
시스템이 온도 T 의 열원에 접해 있다면
시스템의 평균 에너지는 $n \times kT/2$ 이다.

3. 온도 T 의 열원에 접해 있다는 것은
확률을 바른틀 앙상블,
즉 볼츠만 분포로 기술할 수 있다는 것을
의미합니다.

고전적 시스템의 에너지가 n 개의 제공 모드의 합으로 이루어져 있고
시스템이 온도 T 의 열원에 접해 있다면
시스템의 평균 에너지는 $n \times kT/2$ 이다.

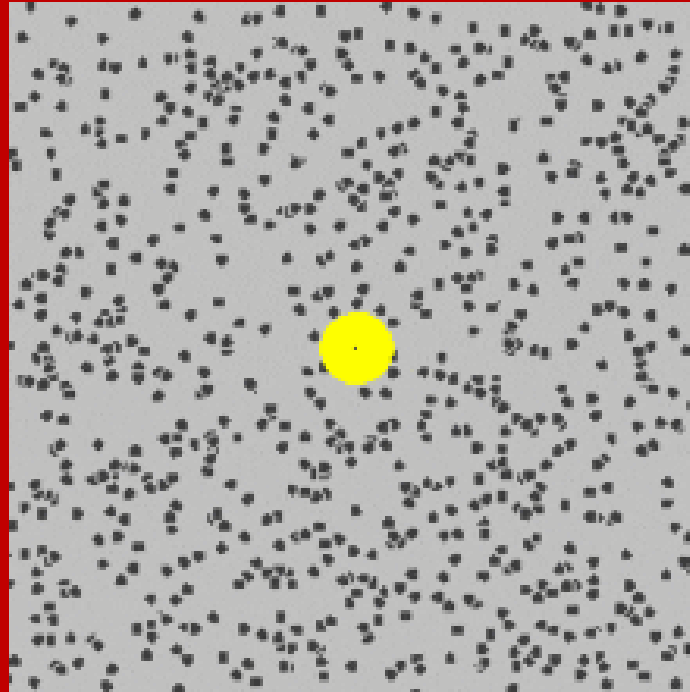


예를 들어, 3차원 고체 격자의 경우, 저온인 경우에는
에너지가 격자 사이에 양자화 되어 저장될 수 있습니다.
이것을 **포논**phonon 모드라고 합니다.

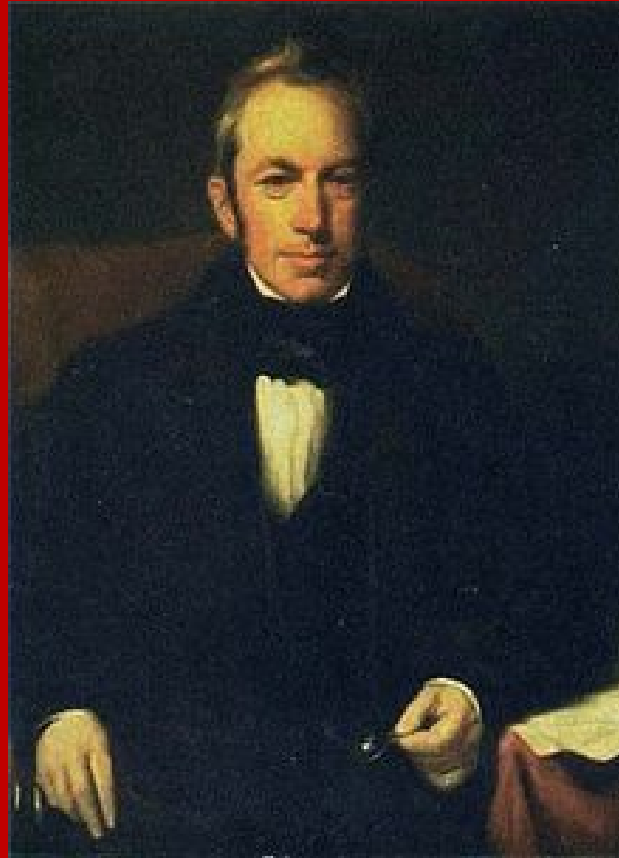


포논phonon에 대한 통계역학적 방법을 사용해서
저온에서 고체 격자의 비열에 대해 기술할 수 있게 됩니다.

등분배 정리가 적용되는 흥미로운 예로서
브라운 운동Brownian motion을 생각해 봅시다.



브라운 운동은 액체나 기체 속에서
꽃가루와 같은 작은 입자들이
불규칙하게 운동하는 현상을 말합니다.



로버트 브라운은 이 현상이 꽃가루의 생명력 때문이 아니며,
생명이 없는 다른 가루들도 비슷한 방식으로
운동한다는 것을 발견했습니다.

*5. Über die von der molekularkinetischen Theorie
der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden
Flüssigkeiten suspendierten Teilchen;
von A. Einstein.*

In dieser Arbeit soll gezeigt werden, daß nach der molekularkinetischen Theorie der Wärme in Flüssigkeiten suspendierte Körper von mikroskopisch sichtbarer Größe infolge der Molekularbewegung der Wärme Bewegungen von solcher Größe ausführen müssen, daß diese Bewegungen leicht mit dem Mikroskop nachgewiesen werden können. Es ist möglich, daß die hier zu behandelnden Bewegungen mit der sogenannten

1905년 아인슈타인은 브라운 운동이
유체에 떠 있는 입자가 유체를 구성하는 입자들과
무작위적으로 충돌하면서 발생하는 현상이라고 생각했습니다.

$$\frac{1}{2}m\langle v^2 \rangle = \frac{3}{2}kT$$

등분배 정리에 의하면,
유체에 놓인 입자는 열적 효과에 의해
위와 같이 진동할 수 있습니다.

$$m\dot{v} = -\alpha v + F(t)$$

이 현상을 좀 더 자세히 기술하기 위해
위와 같은 **랑제방 방정식** Langevin equation을 풀어봅시다.
여기에서 α 는 **감쇠상수**이고,
 $F(t)$ 는 유체에 의한 **무작위적 힘**(긴 시간 평균이 0이 되는)입니다.

$$\langle x \dot{x} \rangle = \frac{kT}{\alpha} \left(1 - e^{-\frac{\alpha t}{m}} \right)$$

$\langle F(t) \rangle = 0$ 이고 $m\langle v^2 \rangle/2 = kT/2$ (1차원의 경우)라는 성질을 사용해서 위의 관계식을 얻습니다.

$$\langle x^2 \rangle = \frac{2kT}{\alpha} \left(t - \frac{m}{\alpha} e^{-\frac{\alpha t}{m}} \right)$$

양 변을 적분해서 다시 위의 식을 얻습니다.

$$\sqrt{\langle x^2 \rangle} = \sqrt{\frac{2kT}{\alpha}} t$$

따라서 시간이 충분히 흘렀을 때,
입자가 이동한 거리의 기댓값은 위와 같습니다.

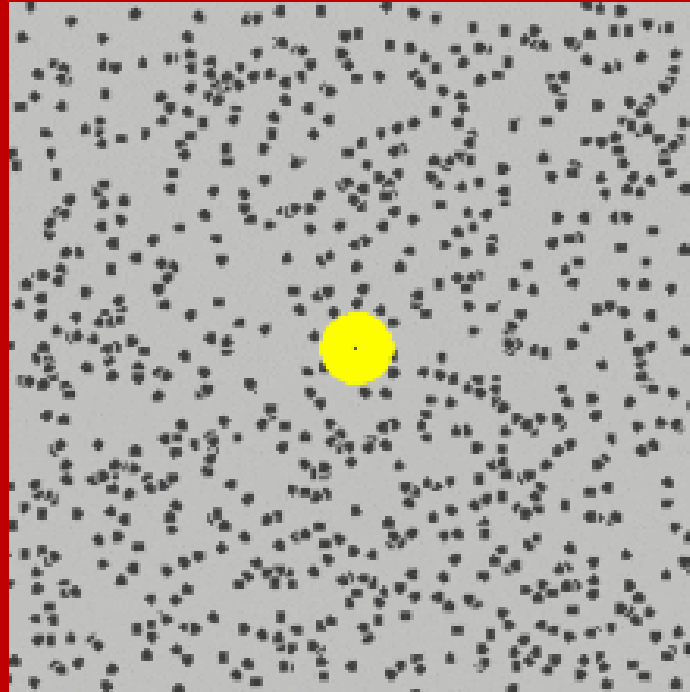
$$\sqrt{\langle x^2 \rangle} = \sqrt{\frac{2kT}{\alpha} t}$$

무작위적 걷기에서와 같이, 시행횟수에 비례하는 **시간**에 대해 $\sqrt{t}$ 에 비례해서 이동거리가 증가합니다.

*5. Über die von der molekularkinetischen Theorie
der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden
Flüssigkeiten suspendierten Teilchen;
von A. Einstein.*

In dieser Arbeit soll gezeigt werden, daß nach der molekularkinetischen Theorie der Wärme in Flüssigkeiten suspendierte Körper von mikroskopisch sichtbarer Größe infolge der Molekularbewegung der Wärme Bewegungen von solcher Größe ausführen müssen, daß diese Bewegungen leicht mit dem Mikroskop nachgewiesen werden können. Es ist möglich, daß die hier zu behandelnden Bewegungen mit der sogenannten

아인슈타인의 이러한 예측은 추후에 실험으로 증명됩니다.



따라서 아인슈타인의 몇 가지 혁신적인 가정이 증명되게 됩니다.
그것은 원자/분자의 존재를 가정한 것과
그들의 무작위적 요동을 가정한 것입니다.

$$p(x) \propto e^{-\frac{(x-\langle x \rangle)^2}{2\langle x^2 \rangle}}$$

브라운 운동에 의해 주어지는 입자의 위치에 대한 확률은
대략 위와 같이 될 것입니다.

$$\frac{\partial}{\partial t} p(x, t|x_0) = -\frac{\partial}{\partial x} [a(x)p(x, t|x_0)] + D \frac{\partial^2}{\partial x^2} p(x, t|x_0)$$

이 확률을 결정하는 방정식을
포커-플랑크 방정식 Fokker-Planck equation 이라고 합니다.
이 경우 $a(x)$ 는 고전적인 힘과 관련한 함수,
 D 는 요동의 크기와 관련되는 상수입니다.

$$-\frac{\partial}{\partial t} p(x, t|x_0) = \left(-D \frac{\partial^2}{\partial x^2} + U(x) \right) p(x, t|x_0)$$

포커-플랑크 방정식은 유클리드 시간의 슈뢰딩거 방정식과 형태적으로 동일해진다는 것이 알려져 있습니다.

$$p(x, t|x_0) \propto e^{-V(x)}$$

따라서 시간이 충분히 지나게 되면,
슈뢰딩거 방정식의 **기저상태**ground state에 대응되게 됩니다.

랑제방 방정식: 위치
Langevin equation



포커-플랑크 방정식: 확률 분포
Fokker-Planck equation



유클리드 슈뢰딩거 방정식
Euclidean Schrodinger equation



기저 상태: 정상 상태
ground state

이와 같은 일은 열적 요동과 마찰이 있는 시스템에서는 언제나 성립합니다.

랑제방 방정식: 위치
Langevin equation



포커-플랑크 방정식: 확률 분포
Fokker-Planck equation



유클리드 슈뢰딩거 방정식
Euclidean Schrodinger equation



기저 상태: 정상 상태
ground state

예를 들어, 우주에서 인플라톤 장이 호킹 온도에 의해 요동할 수 있습니다.

랑제방 방정식: 위치
Langevin equation



포커-플랑크 방정식: 확률 분포
Fokker-Planck equation



유클리드 휠러-드위트 방정식
Euclidean Wheeler-DeWitt equation



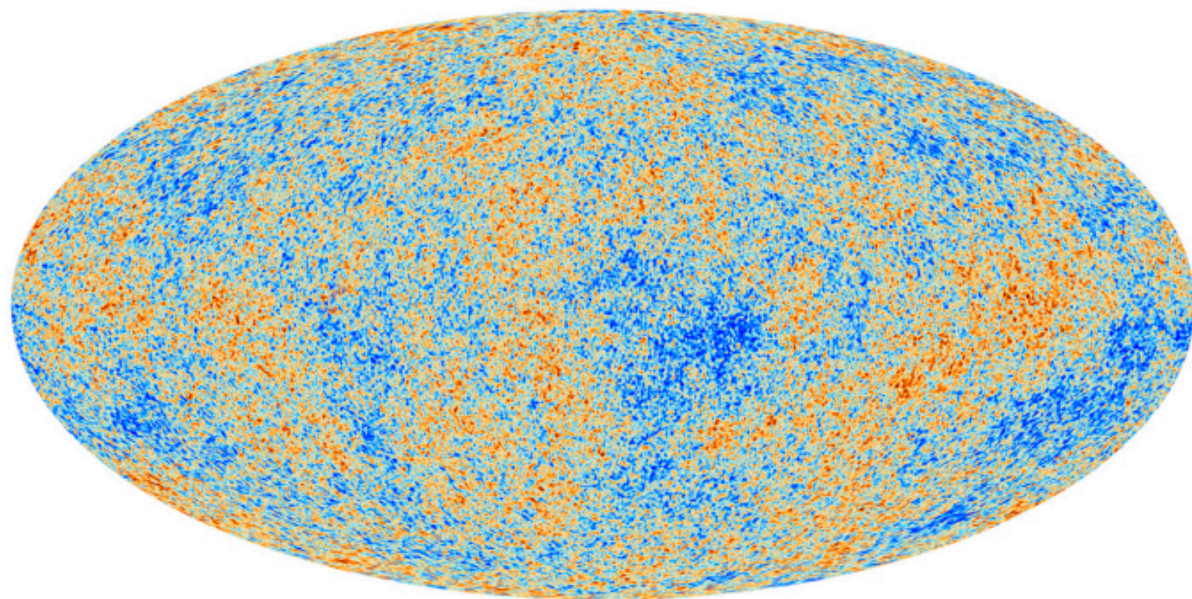
하틀-호킹 상태: 정상 상태
Hartle-Hawking state



기본적으로 장의 이러한 우주적 요동은
우리가 볼 수 없는 지평선 밖,
즉 **다중우주**에 존재하는 것입니다.



그런데 단 한번, 우리는 다중우주를 볼 기회가 있었습니다.
우리 우주의 지평선이 갑자기 커지는 사건이 있었기 때문입니다.



인플레이션이 끝나면서, 이전까지는 다중우주에 속했던 요동들이
우리 지평선 안에 보이게 됩니다.
이것이 우리 우주의 불균일성의 기원이 됩니다.

감사합니다