

제14강

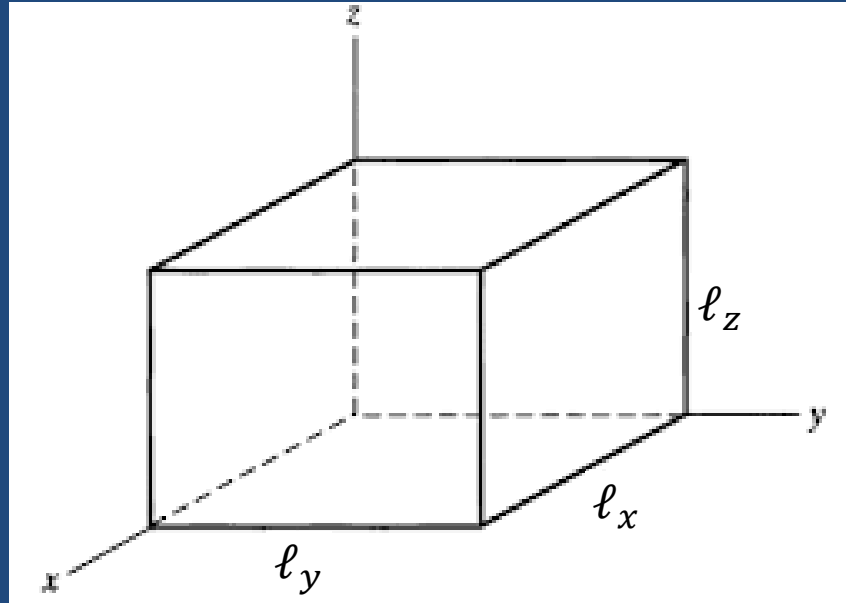
이상기체의 통계역학

단일 입자 분배 함수는
여러 개의 입자인 경우로 확대될 수 있습니다.
여기에서 중요한 것은 **중첩도**를 계산하는 것입니다.

우리는 이 과정에서 두 가지 단계를 필요로 합니다.

첫째는 입자 하나에 대한 **상태 밀도**를 계산하는 것이고,
둘째는 구별가능/불가능한 경우에 대한
다입자 분배 함수를 고려하는 것입니다.

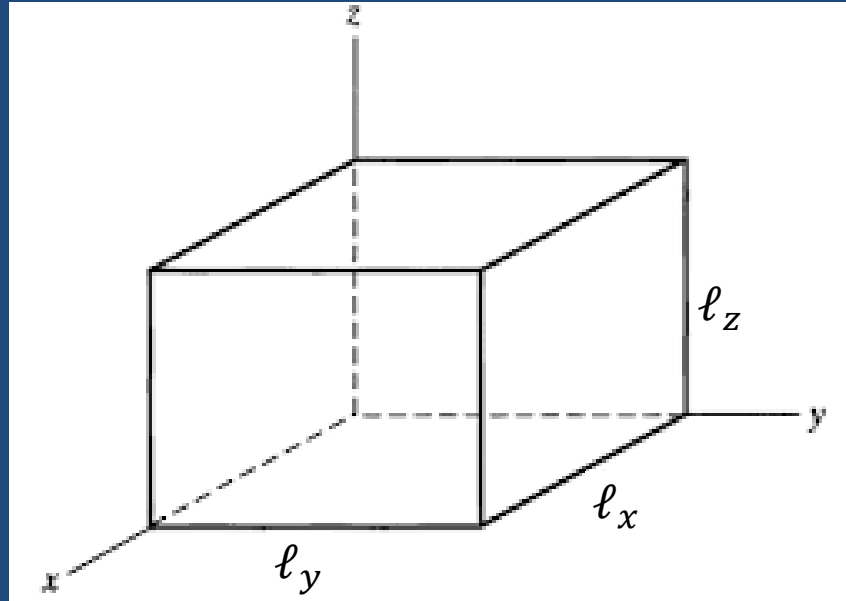
상자에 전자를 채우기



위와 같은 3차원 상자에 입자를 채운다고 합시다.
양자화 조건에 의해서, 다음 조건이 요구됩니다.

$$k_i \ell_i = n_i \pi$$

이제 k -공간에서 어떤 일이 일어나는지를 알아봅시다.



임의의 k 에 대해, 얼마나 많은 수의 상태가
중복되는지를 살펴보도록 합시다.

입자는 다음과 같은 규칙으로 k -공간을 채워나가게 됩니다.

$$(k - \text{공간의 부피}) = \frac{1}{\textcircled{8}} \left(\frac{4}{3} \pi k^3 \right)$$

k -공간에서 $k_i > 0$ 인 영역

운동량의 미소 변화에 대해 부피는 다음과 같게 됩니다.

$$\frac{1}{8} (4\pi k^2 dk)$$

따라서 k -공간의 구 껍질에서 각 k 에 대해 허용된 상태들의 개수는 다음과 같이 표현됩니다.

$$g(k)dk = \frac{k - \text{공간 구 껍질 8분원의 부피}}{k - \text{공간의 한 상태가 차지한 부피}} = \frac{\frac{1}{8} (4\pi k^2 dk)}{\pi^3 / \ell_x \ell_y \ell_z}$$

따라서 k -공간의 구 껍질에서 각 k 에 대해 허용된 상태들의 개수는 다음과 같이 표현됩니다.

$$g(k)dk = \frac{V k^2 dk}{2\pi^2}$$

이제 이것을 사용해서 이상기체의
단일 입자 분배 함수를 구해봅시다.

$$Z_1 = \int_0^{\infty} e^{-\beta E(k)} g(k) dk$$

$$E(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

$$g(k) = \frac{V k^2}{2\pi^2}$$

이제 이것을 사용해서 이상기체의
단일 입자 분배 함수를 구해봅시다.

$$Z_1 = \frac{V}{h^3} \left(\frac{mkT}{2\pi} \right)^{3/2} \equiv V n_Q$$

이제 이것을 사용해서 이상기체의
단일 입자 분배 함수를 구해봅시다.

$$Z_1 = \frac{V}{h^3} \left(\frac{mkT}{2\pi} \right)^{3/2} \equiv V n_Q$$

여기에서 n_Q 를 양자 농도quantum concentration라 하고,
 $\lambda_{th} = n_Q^{-1/3}$ 을 열 파장thermal wavelength이라고 합니다.

$$Z_N = (Z_1)^N$$

이러한 입자들이 구별 가능distinguishable하다면
 N -입자의 분배 함수는 위와 같습니다.

$$Z_N = \frac{(Z_1)^N}{N!}$$

그러나 이러한 입자들이 구별 불가능(indistinguishable)하다면
 N -입자의 분배 함수는 위와 같아야 합니다.

$$n \ll n_Q$$

입자들이 띄엄띄엄하다면 구별 가능하다는 근사가 잘 맞게 됩니다.
반면에, 가능한 양자 상태의 수가 입자의 수보다 많다면
구별 불가능하다고 생각을 해야 합니다.

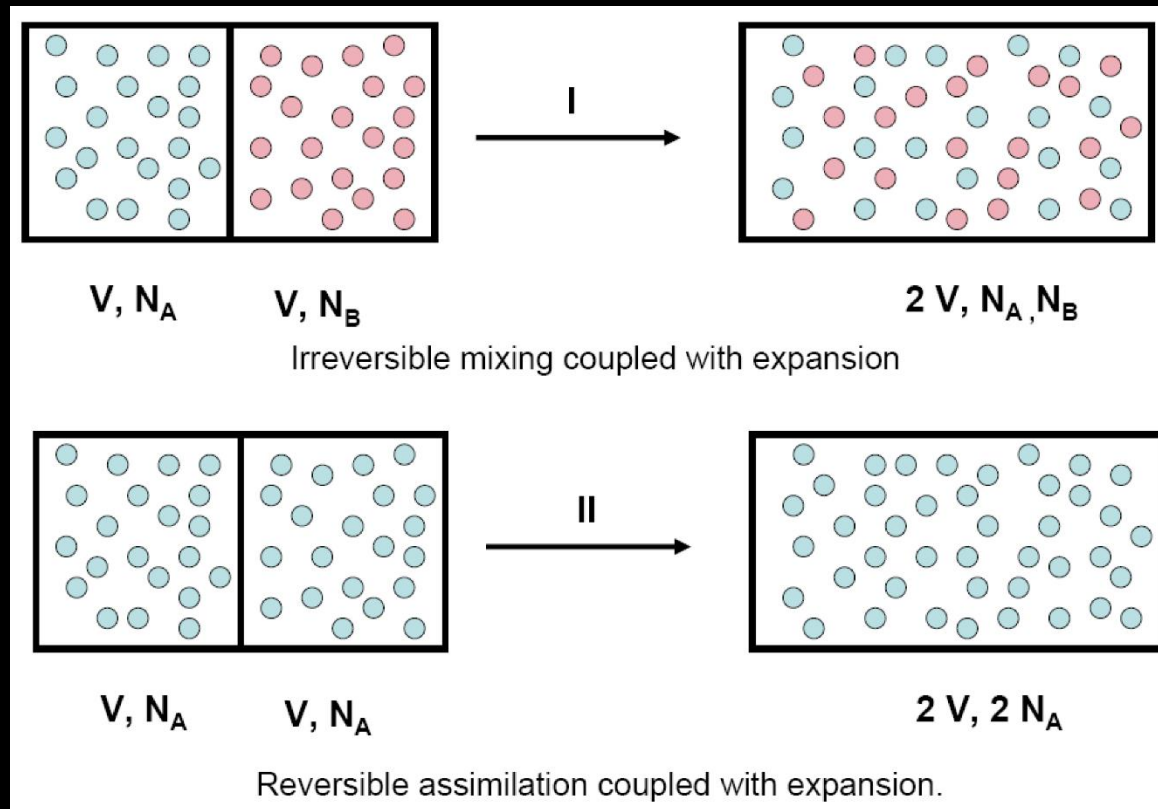
이제 이상기체에 대한 다양한 관계들을
통계역학적으로 정당화할 수 있게 됩니다.

$$E = \frac{3}{2}NkT \quad p = \frac{NkT}{V}$$

이제 위의 관계를 다시 증명할 수 있습니다.

$$S \simeq Nk \left(\frac{5}{2} - \ln \frac{n}{n_Q} \right)$$

자쿠어-테트로드 방정식 Sackur-Tetrode equation



구별 불가능성에 대한 가정이
 깁스 패러독스 Gibbs paradox를 해결할 수 있게 합니다.

감사합니다