

제16강

광자

이번 장에서는 빛에 대한 통계역학을 살펴봅시다.

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

맥스웰 방정식에 의하면 빛도 전자기파의 일종이며
진공 중의 파동의 속도 c 는
진공의 유전율 ϵ_0 과 진공의 투자율 μ_0 에 의해 결정됩니다.

$$c = \nu \lambda = \frac{\omega}{k}$$

한편 빛은 파동이므로
빛의 속도는 진동수 ν 및 파장 λ 의 곱으로도 표현됩니다.

먼저 광자의 방출에 대해 열역학적 방법으로
어디까지 설명할 수 있는지 확인해봅시다.

$$p = \frac{1}{3}nm\langle c^2 \rangle$$

온도 T 및 부피 V 인 공동cavity에 광자 기체가 들어있다고 합시다.
 c 는 입자의 속도(빛의 속도)이고 n 은 광자의 밀도라고 하면,
기체분자운동론에 의해 입자가 가하는 압력 p 는 위와 같습니다.

$$p = \frac{1}{3}u$$

여기에서 빛은 질량이 없지만 mc^2 을 광자의 에너지로 해석하면
에너지 밀도 $u = n\hbar\omega$ 에 대해 위와 같은 식을 얻습니다.
이 식에 대한 좀 더 올바른 유도는 다음 시간에 이루어질 것입니다.

$$\Phi = \frac{(\text{분자의 수})}{(\text{면적}) \times (\text{시간})}$$

용기 벽면의 단위 넓이에 단위 시간 동안 부딪히는 광자의 개수,
즉 광자의 **선속** Φ 는 위와 같이 주어집니다.

$$\Phi = \int_0^{\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} v \cos \theta n f(v) dv \frac{\sin \theta}{2} d\theta$$

용기 벽면의 단위 넓이에 단위 시간 동안 부딪히는 광자의 개수,
즉 광자의 **선속** Φ 는 위와 같이 주어집니다.

$$\Phi = \frac{1}{4}nc$$

용기 벽면의 단위 넓이에 단위 시간 동안 부딪히는 광자의 개수,
즉 광자의 선속 Φ 는 위와 같이 주어집니다.

$$F = \hbar\omega\Phi = \frac{1}{4}uc$$

따라서 용기의 벽면에 대한 단위면적당 일률은 위와 같습니다.

이제 이 관계들을 사용해서
이른바 슈테판-볼츠만 법칙Stefan-Boltzmann law을 유도해 봅시다.

$$\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T = T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p$$

우리는 간단하게 위의 관계식을 유도할 수 있습니다.
여기에서 좌변은 에너지 밀도 u 이고,
우변의 압력 p 는 우리가 앞에서 구한 대로 $u/3$ 이 됩니다.

$$4u = T \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_v$$

정리해서 위의 관계를 얻습니다.

$$4 \frac{dT}{T} = \frac{du}{u}$$

정리해서 위의 관계를 얻습니다.

$$u = AT^4$$

이 방정식을 풀어서 슈테판-볼츠만 법칙을 얻습니다.

$$F = \frac{1}{4}uc = \sigma T^4$$

또는 단위 면적당 일률에 대한 위의 관계식을 얻습니다.

여기에서 σ 를 슈테판-볼츠만 상수라고 합니다.

양자역학에서는 이 상수를 다른 상수들로 표현할 수 있게 됩니다.

$$u = \int u_{\lambda} d\lambda$$

이제 이 에너지 밀도를 파장에 따라 나누어 봅시다.
이것을 위해 스펙트럼 에너지 밀도 spectral energy density u_{λ} 를
위와 같이 정의합니다.

$$\left(\frac{1}{4}cu_{\lambda}d\lambda\right)\alpha_{\lambda}$$

$$(d\lambda)e_{\lambda}$$

우리가 생각한 공동은 에너지를 파장에 따라
 흡수할 수도 있고 방출할 수도 있습니다.
 단위 면적당 흡수 및 방출되는 일률은 각각 위와 같습니다.

$$\left(\frac{1}{4}cu_{\lambda}d\lambda\right)\alpha_{\lambda}$$

$$(d\lambda)e_{\lambda}$$

여기에서 α_{λ} 는 스펙트럼 흡수율이고,
 e_{λ} 는 스펙트럼 방출능이라고 합니다.

$$\frac{e_{\lambda}}{\alpha_{\lambda}} = \frac{c}{4} u_{\lambda}$$

평형상태에서 흡수되는 일률과 방출되는 일률은 같아야 하므로
위의 관계식을 얻습니다.

이것을 키르히호프 법칙Kirchhoff's law이라고 합니다.

$$\frac{e_{\lambda}}{\alpha_{\lambda}} = \frac{c}{4} u_{\lambda}$$

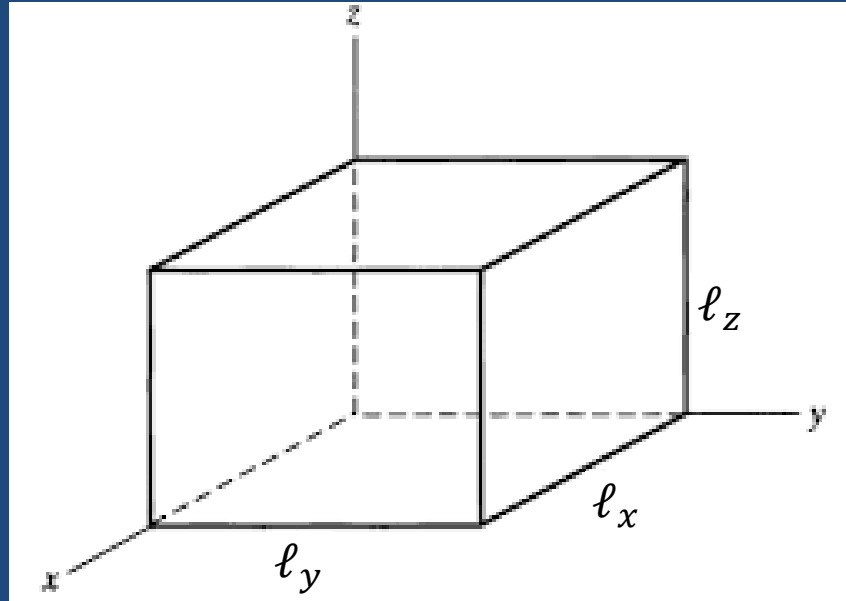
만일 모든 파장에 대해 $\alpha_{\lambda} = 1$ 이 된다면,
가장 이상적인 흡수체이자 방출체가 됩니다.
이것을 **흑체**black body라고 합니다.



흑체black body란 입사하는 모든 전자기 복사를 흡수하고,
열평형 상태에서는 온도에 따라 에너지를 방출하는
이상적인 물체입니다.

이제 흑체 복사를 통계역학적 방법으로 좀 더 조사해 봅시다.

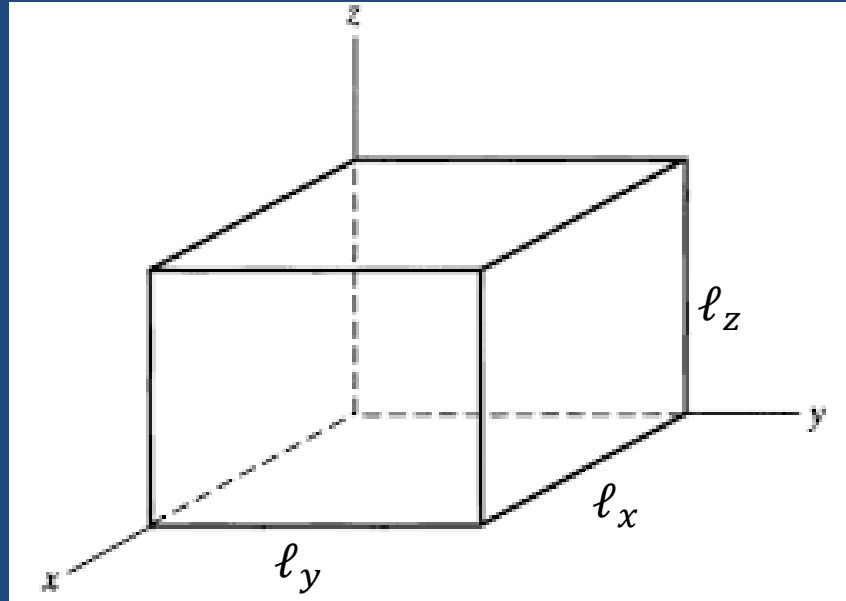
상자에 전자를 채우기



위와 같은 3차원 상자에 입자를 채운다고 합시다.
양자화 조건에 의해서, 다음 조건이 요구됩니다.

$$k_i \ell_i = n_i \pi$$

이제 k -공간에서 어떤 일이 일어나는지를 알아봅시다.



임의의 k 에 대해, 얼마나 많은 수의 상태가
중복되는지를 살펴보도록 합시다.

입자는 다음과 같은 규칙으로 k -공간을 채워나가게 됩니다.

$$(k - \text{공간의 부피}) = \frac{1}{\textcircled{8}} \left(\frac{4}{3} \pi k^3 \right)$$

k -공간에서 $k_i > 0$ 인 영역

운동량의 미소 변화에 대해 부피는 다음과 같게 됩니다.

$$\frac{1}{8} (4\pi k^2 dk)$$

따라서 k -공간의 구 껍질에서 각 k 에 대해 허용된 상태들의 개수는 다음과 같이 표현됩니다.

$$g(k)dk = \frac{k - \text{공간 구 껍질 8분원의 부피}}{k - \text{공간의 한 상태가 차지한 부피}} = \frac{\frac{1}{8} (4\pi k^2 dk)}{\pi^3 / \ell_x \ell_y \ell_z}$$

따라서 k -공간의 구 껍질에서 각 k 에 대해 허용된 상태들의 개수는 다음과 같이 표현됩니다.

$$g(k)dk = \frac{V k^2 dk}{2\pi^2}$$

광자의 경우에는 두 개의 편광이 존재하므로 이 값을
두 배로 해 주어야 합니다.

$$g(k)dk = \frac{V k^2 dk}{\pi^2}$$

각진동수 ω 에 대해서 표현하면 아래와 같이 됩니다.

$$g(\omega)d\omega = \frac{V\omega^2 d\omega}{\pi^2 c^3}$$

$$E = \int_0^{\infty} g(\omega) d\omega \hbar \omega \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\hbar \omega / kT} - 1} \right)$$

광자 기체를 **단순조화진동자**로 생각하면
광자의 에너지는 위와 같이 됩니다.

$$E = \left(\frac{V \pi^2 k^4}{15 c^3 \hbar^3} \right) T^4$$

발산하는 진공의 에너지 부분을 제외하면
내부 에너지는 적분해서 위와 같이 됩니다.

$$u = \frac{4}{c} \left(\frac{\pi^2 k^4}{60 c^2 \hbar^3} \right) T^4$$

따라서 다시 한 번 슈테판-볼츠만 법칙과
슈테판-볼츠만 상수를 유도하게 됩니다.

$$u = \int_0^{\infty} \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} d\omega$$

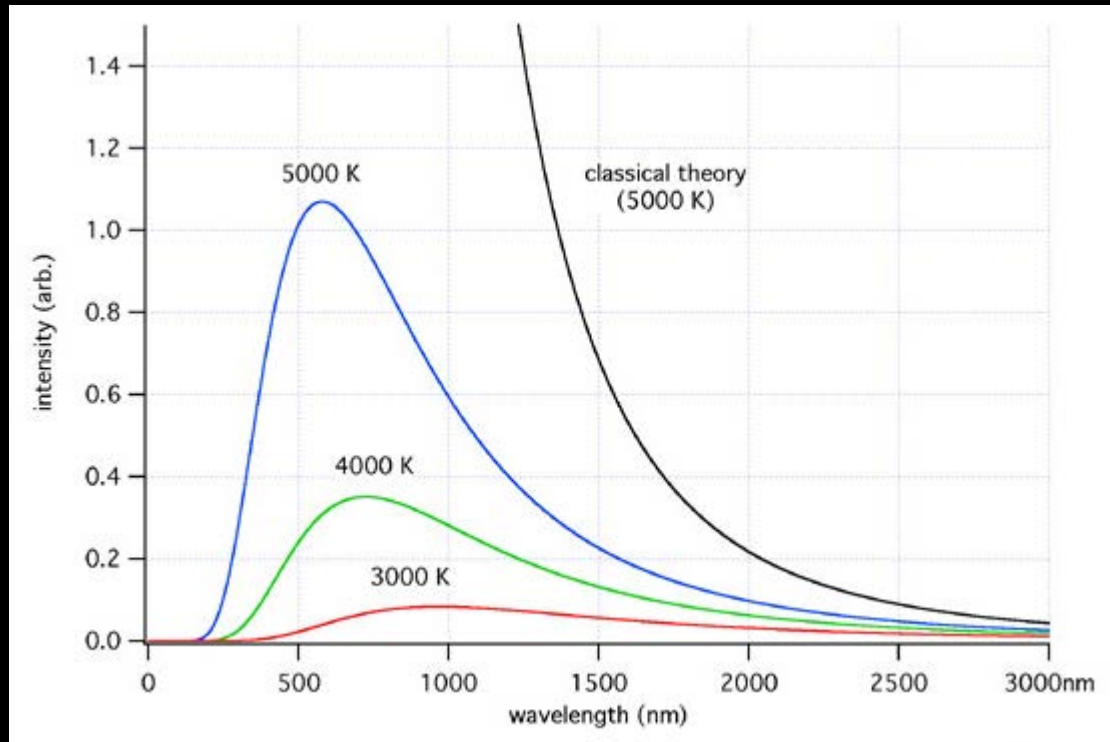
에너지 밀도를 다시 적분식으로 쓰면 위와 같습니다.

$$u_{\omega} = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}$$

따라서 스펙트럼당 에너지 밀도는 위와 같습니다.

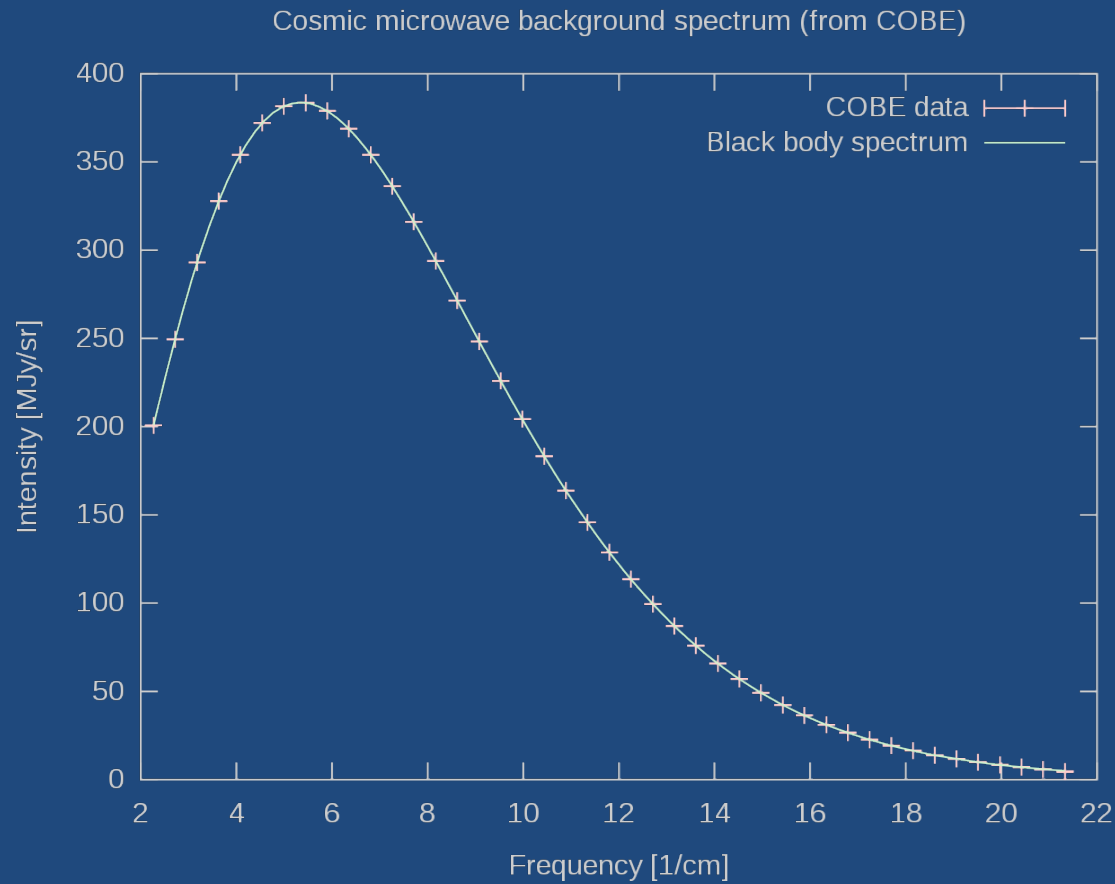
$$u_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

또는 진동수에 대해 다음과 같이 표현할 수 있습니다.
이것이 바로 흑체 복사에 대한 **플랑크 분포**입니다.



플랑크 분포는 고전 이론(레일리-진즈)의 자외선 파탄을 극복하며 실험결과를 잘 설명해 줍니다.

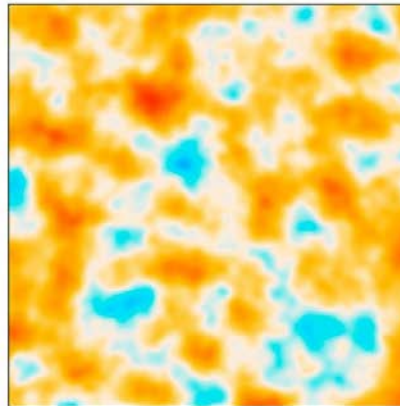
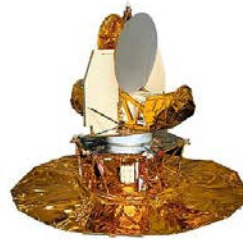
이러한 흑체 복사는 자연의 다양한 곳에서 확인할 수 있습니다.
그 중의 하나는 우리 우주의 전 공간에 퍼져 있는
우주배경복사cosmic microwave background radiation라는 것입니다.



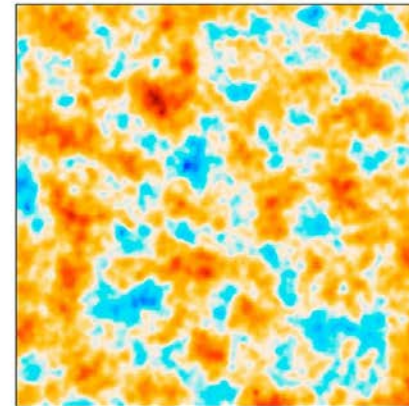
우주배경복사는 거의 완벽하게 흑체복사의 법칙을 따릅니다.
또한 우주의 전 방향으로 거의 고르게 isotropic 분포하고 있습니다.



COBE

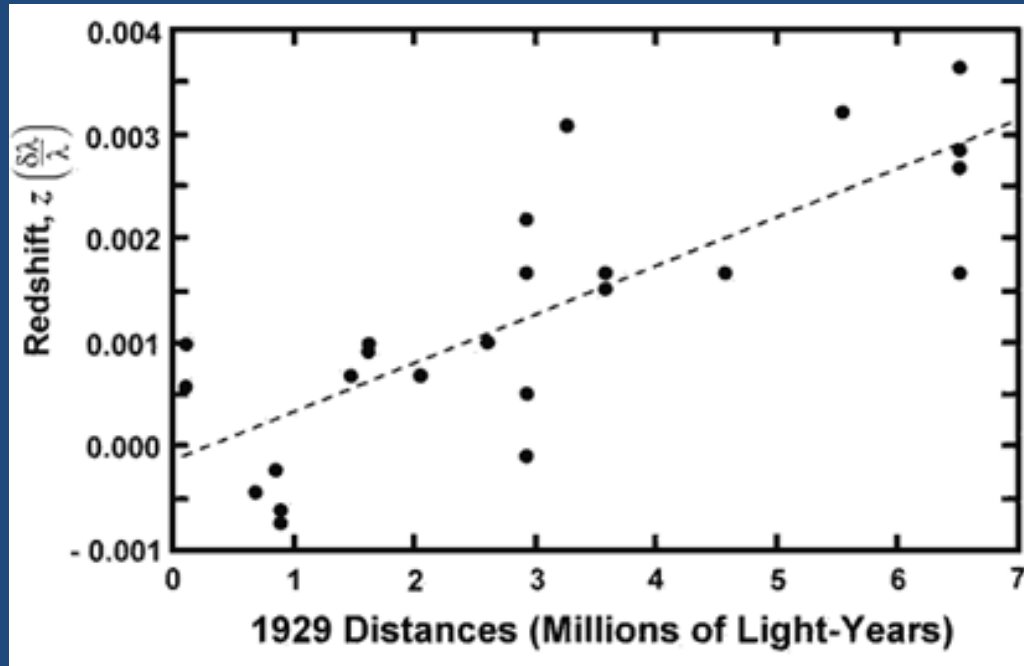


WMAP



Planck

우주배경복사의 미세한 **비등방성**anisotropy이 1990년대 이래
인공위성(COBE/WMAP/Planck)을 통해 측정되었습니다.

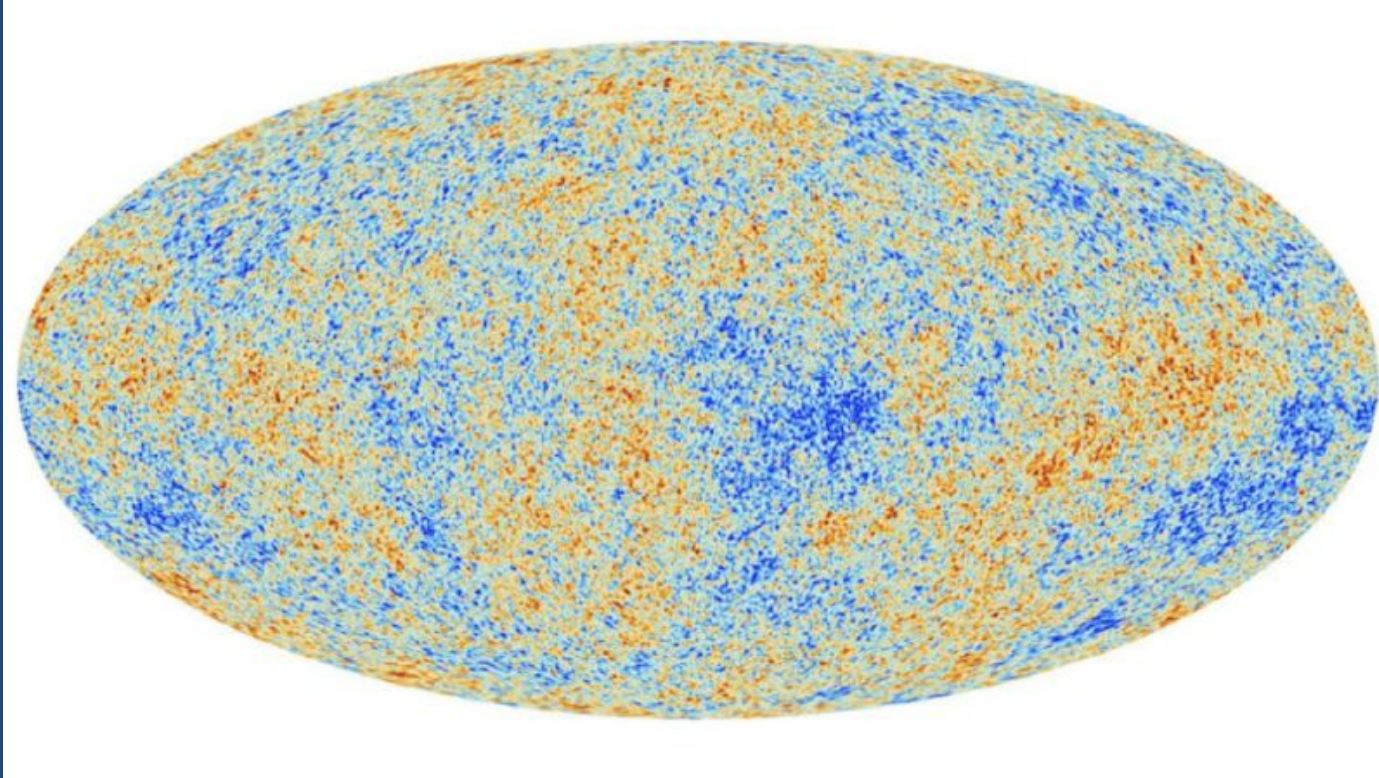


허블이 은하들의 적색편이를 측정한 이래,
우리는 우리 우주가 팽창하고 있다는 것을 알고 있습니다.
따라서 우리 우주에 온도가 존재한다는 것은
우리 우주가 과거에는 뜨거웠다는 것을 의미합니다.

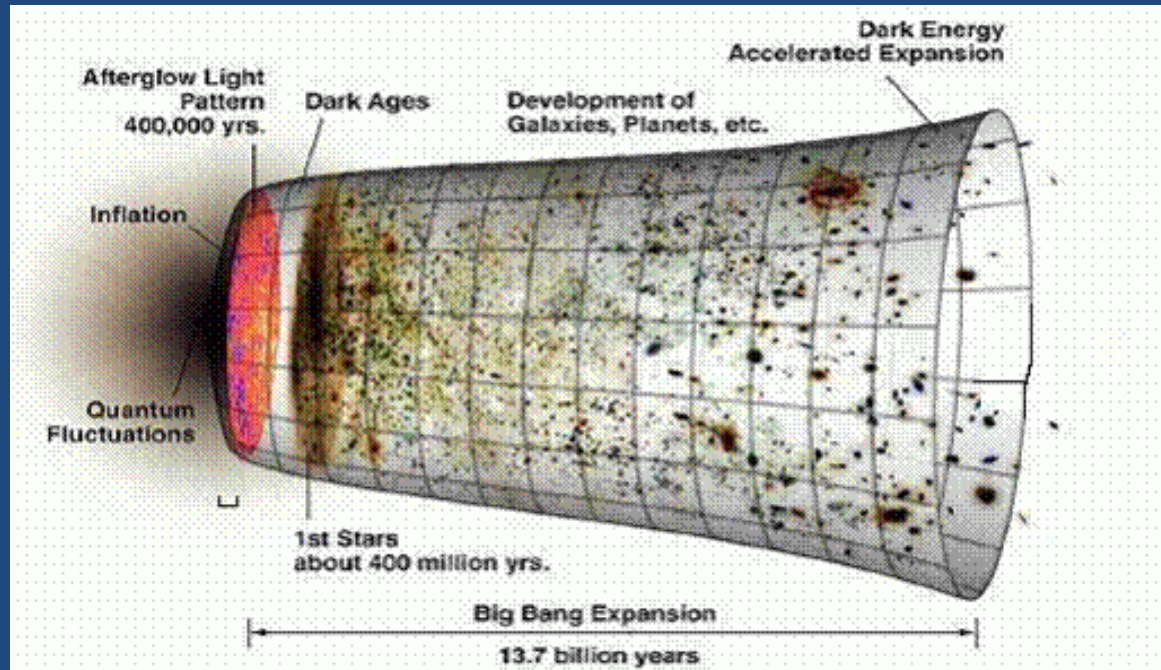


따라서 상대성이론에 따라 과거로의 움직임을 추정해보면
우리 우주는 아주 **높은 온도**의 **특이점**에서 출발해야 한다는 것을
확인할 수 있습니다.

이것을 **빅뱅 big bang 우주론**이라고 합니다.



우주배경복사가 플랑크 분포를 가진다는 것은
초기 우주가 고온이었다고 가정하면 설명이 됩니다.
그러면 왜 아주 작지만 미세한 비등방성을 가지고 있을까요?



여기에 대해 현재까지 알려진 가장 좋은 설명은 초기 우주에 급팽창inflation을 가정하는 것입니다.

우리는 인플라톤 장이 호킹 온도에 의해 요동할 수 있다는 것을 이야기 했습니다.

랑제방 방정식: 위치

Langevin equation



포커-플랑크 방정식: 확률 분포

Fokker-Planck equation



유클리드 휠러-드위트 방정식

Euclidean Wheeler-DeWitt equation



하틀-호킹 상태: 정상 상태

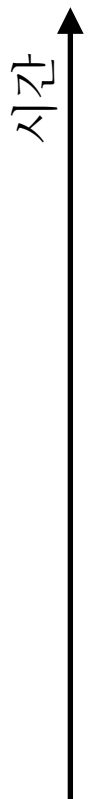
Hartle-Hawking state

시간



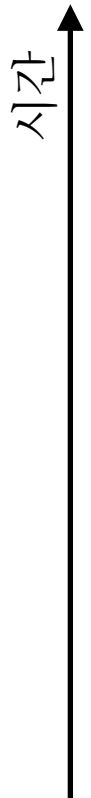
급팽창하는 우주

급팽창하는 우주



$r_H \sim 1/H$
우주의 크기

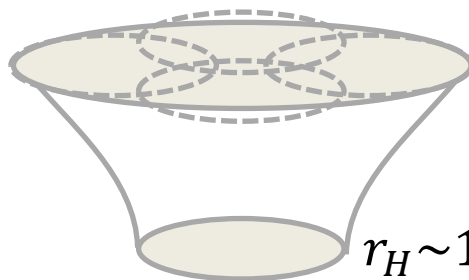
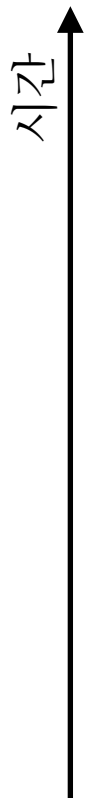
급팽창하는 우주



우주의 크기는
인플레이션에 의해
점점 커집니다.

$r_H \sim 1/H$
우주의 크기

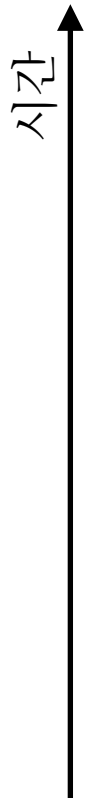
급팽창하는 우주



앞에서 보다
격자의 개수가 더 많아집니다

$r_H \sim 1/H$
우주의 크기

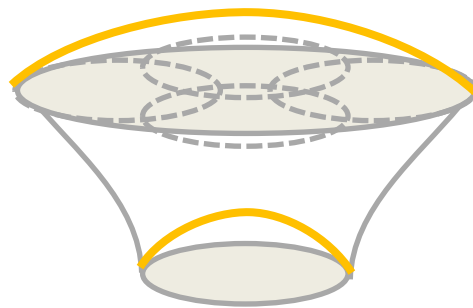
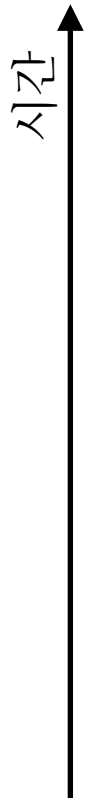
급팽창하는 우주



각 격자에 대해 호킹 온도에 의한
양자 요동이 존재합니다.

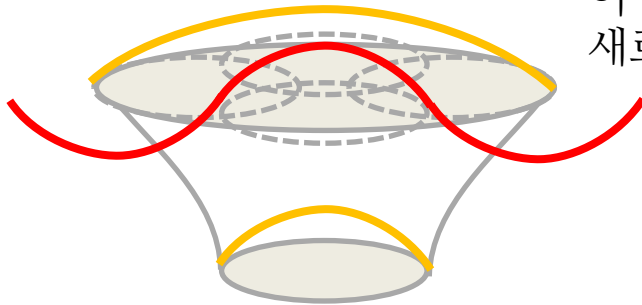
$$T \sim H$$

급팽창하는 우주



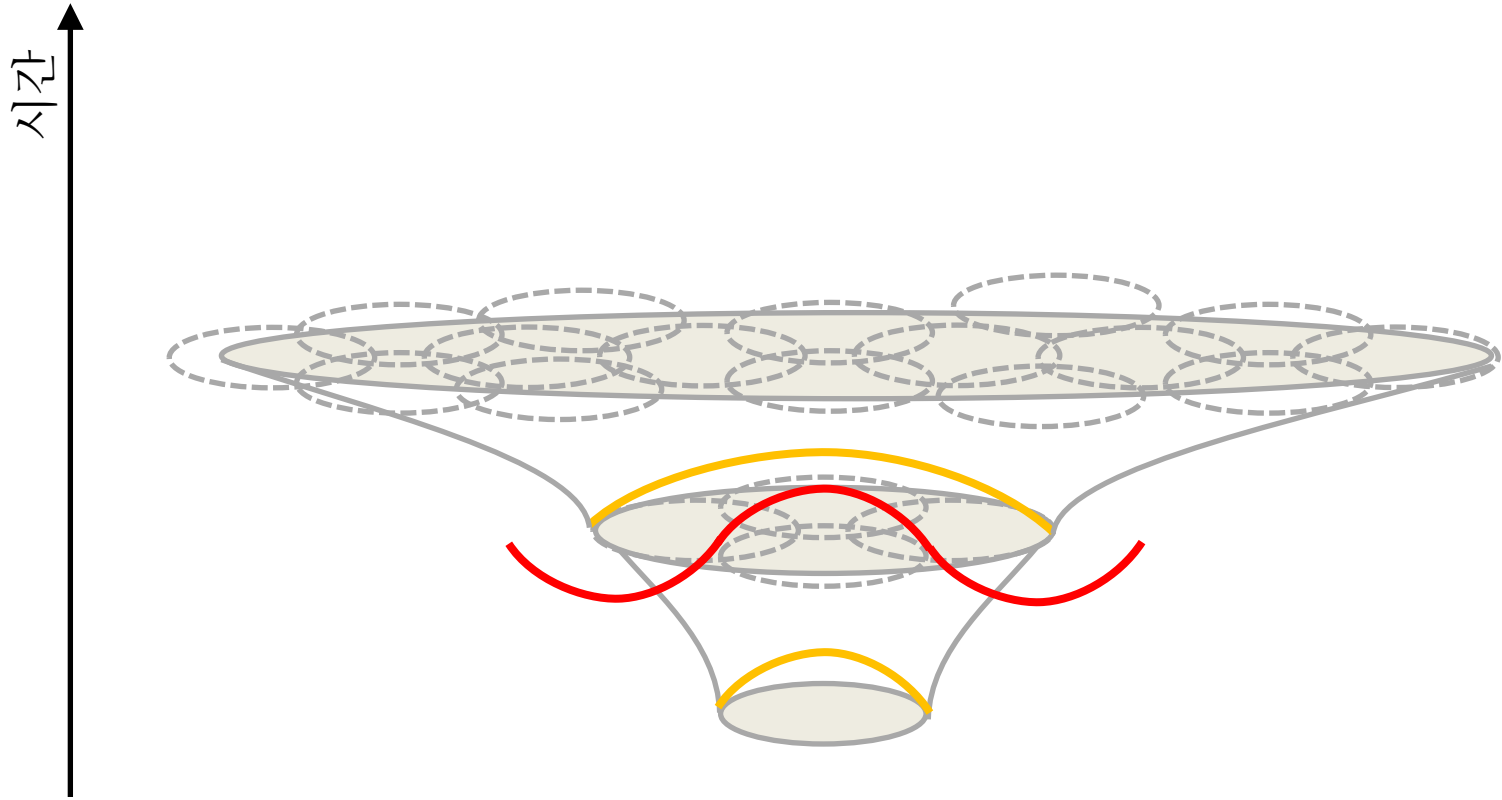
앞의 요동이 우주가 커짐에 따라
펼쳐집니다.
따라서 파장이 길어집니다.

급팽창하는 우주

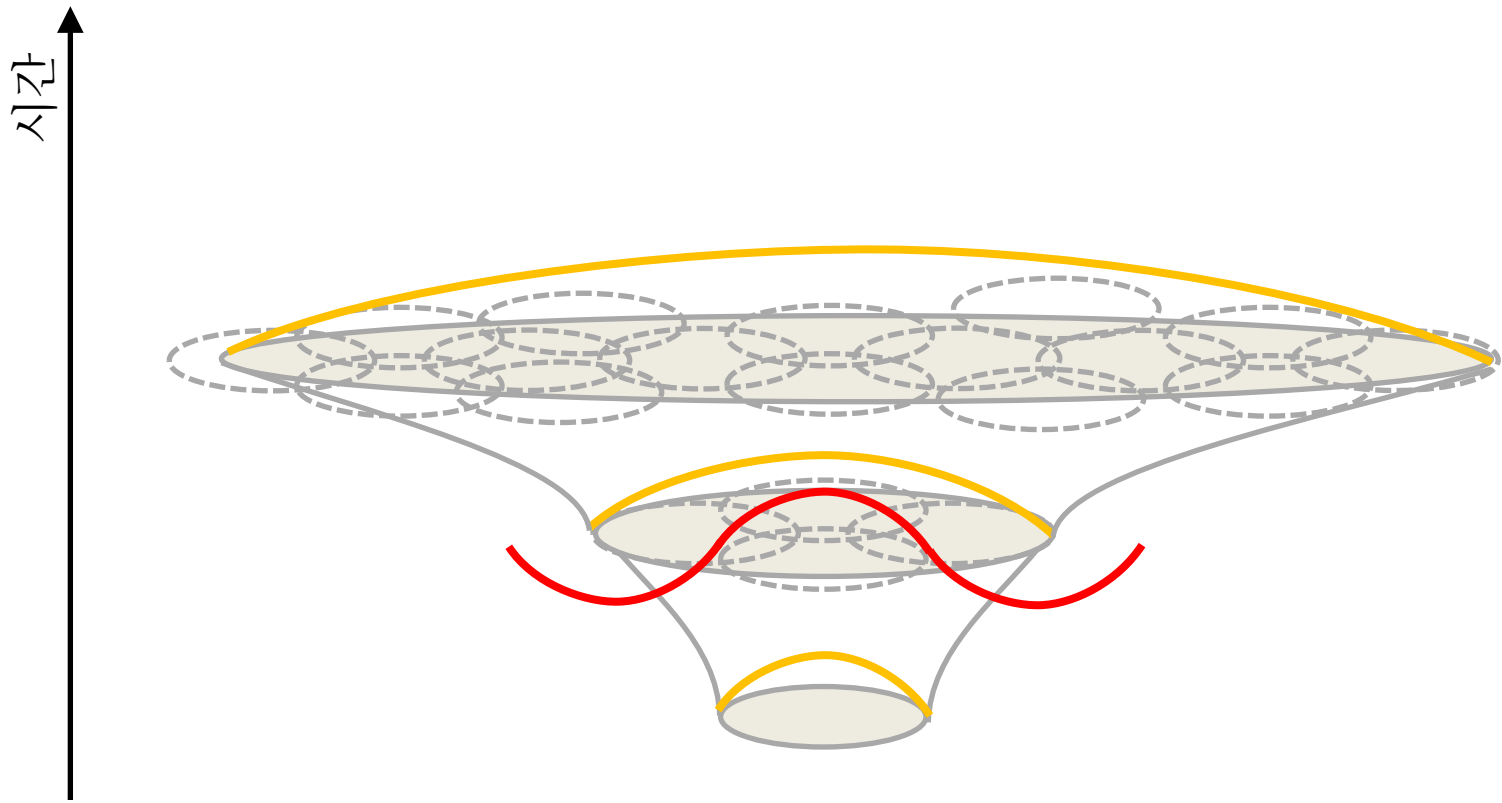


이 때 격자별로 아까와 같은 파장의 새로운 요동이 추가됩니다.

급팽창하는 우주

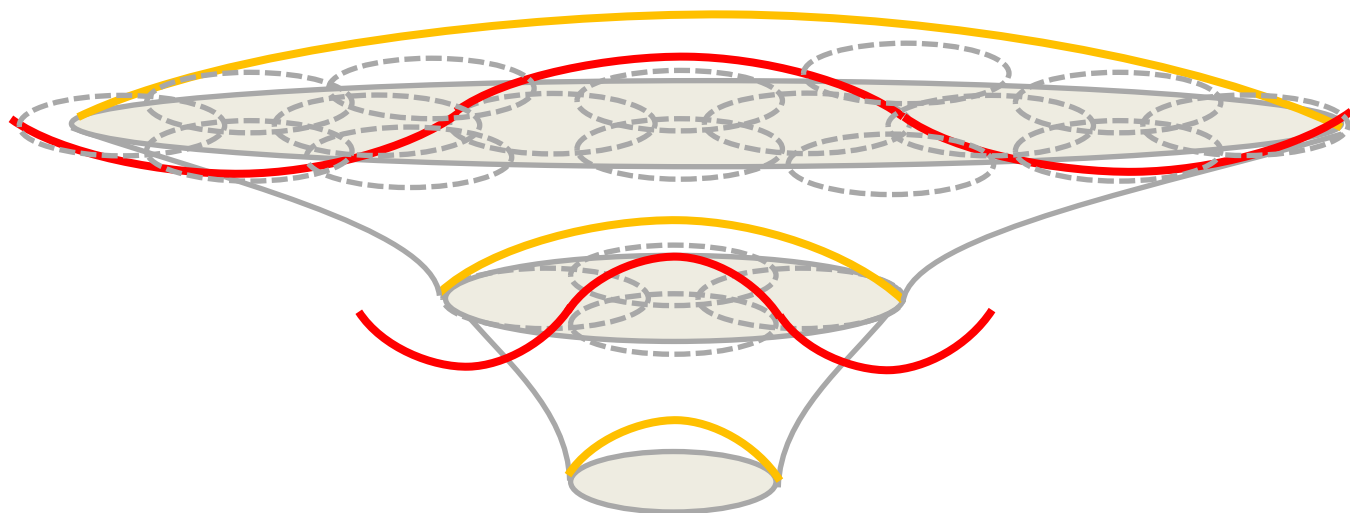


급팽창하는 우주

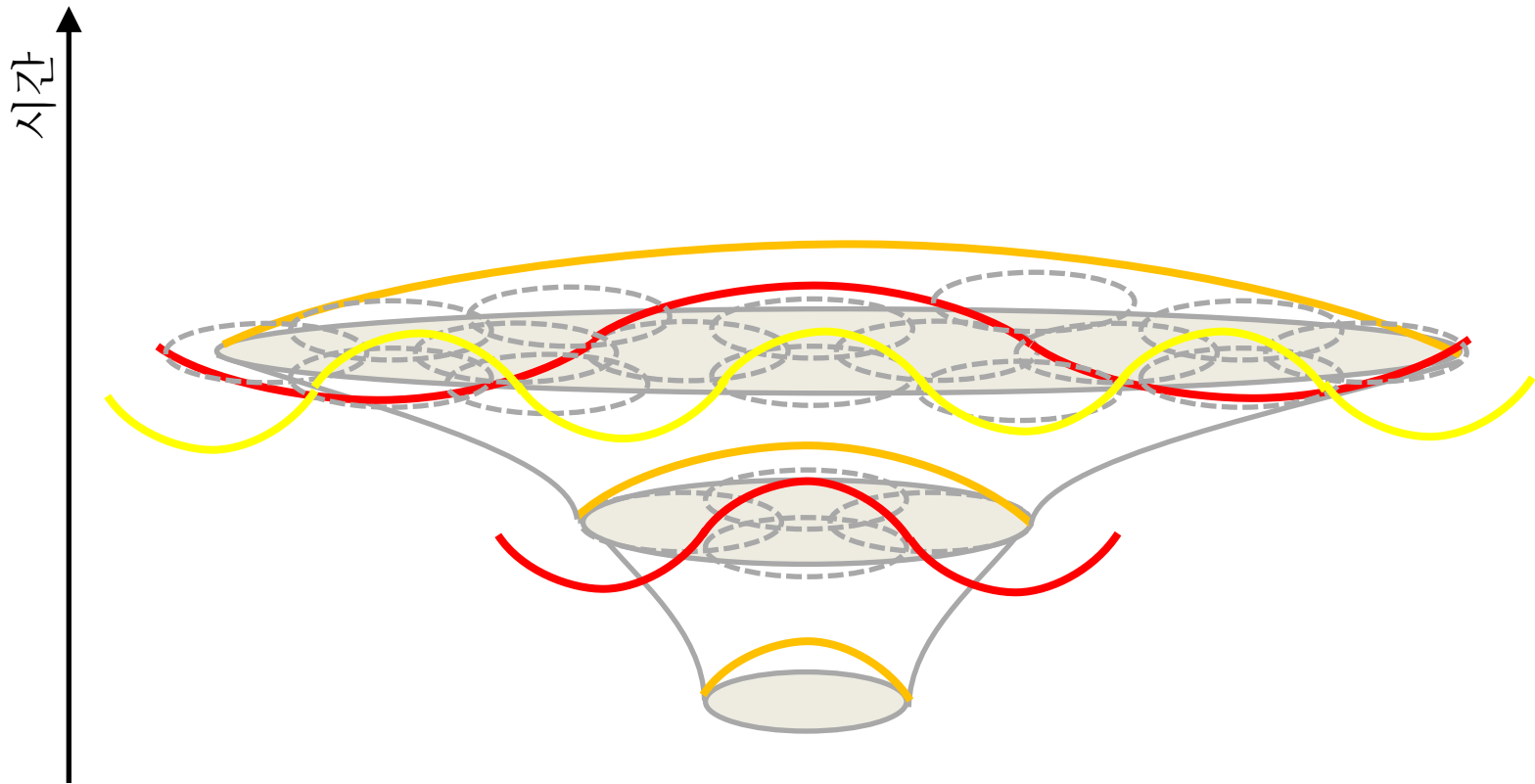


급팽창하는 우주

시간



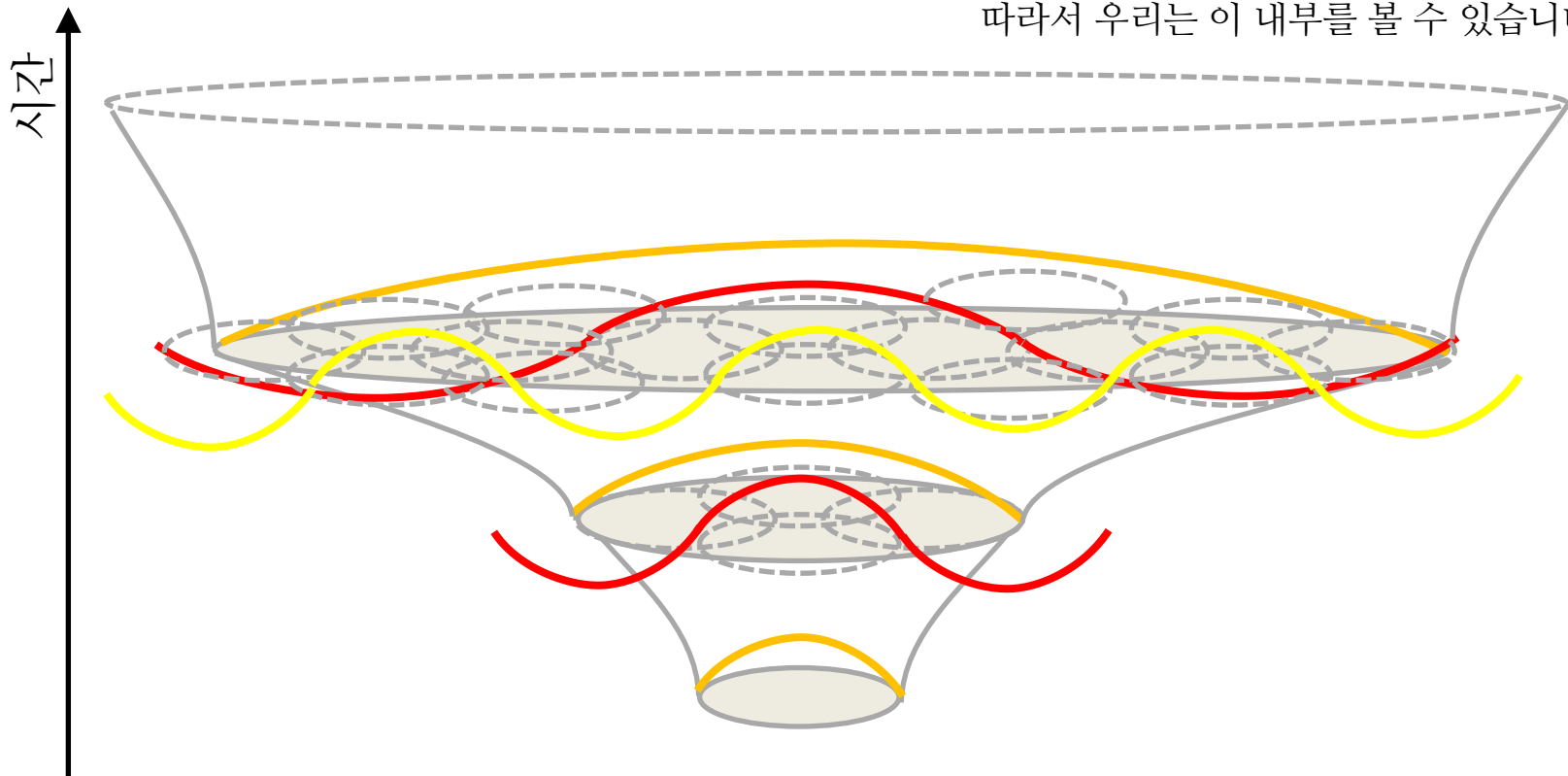
급팽창하는 우주



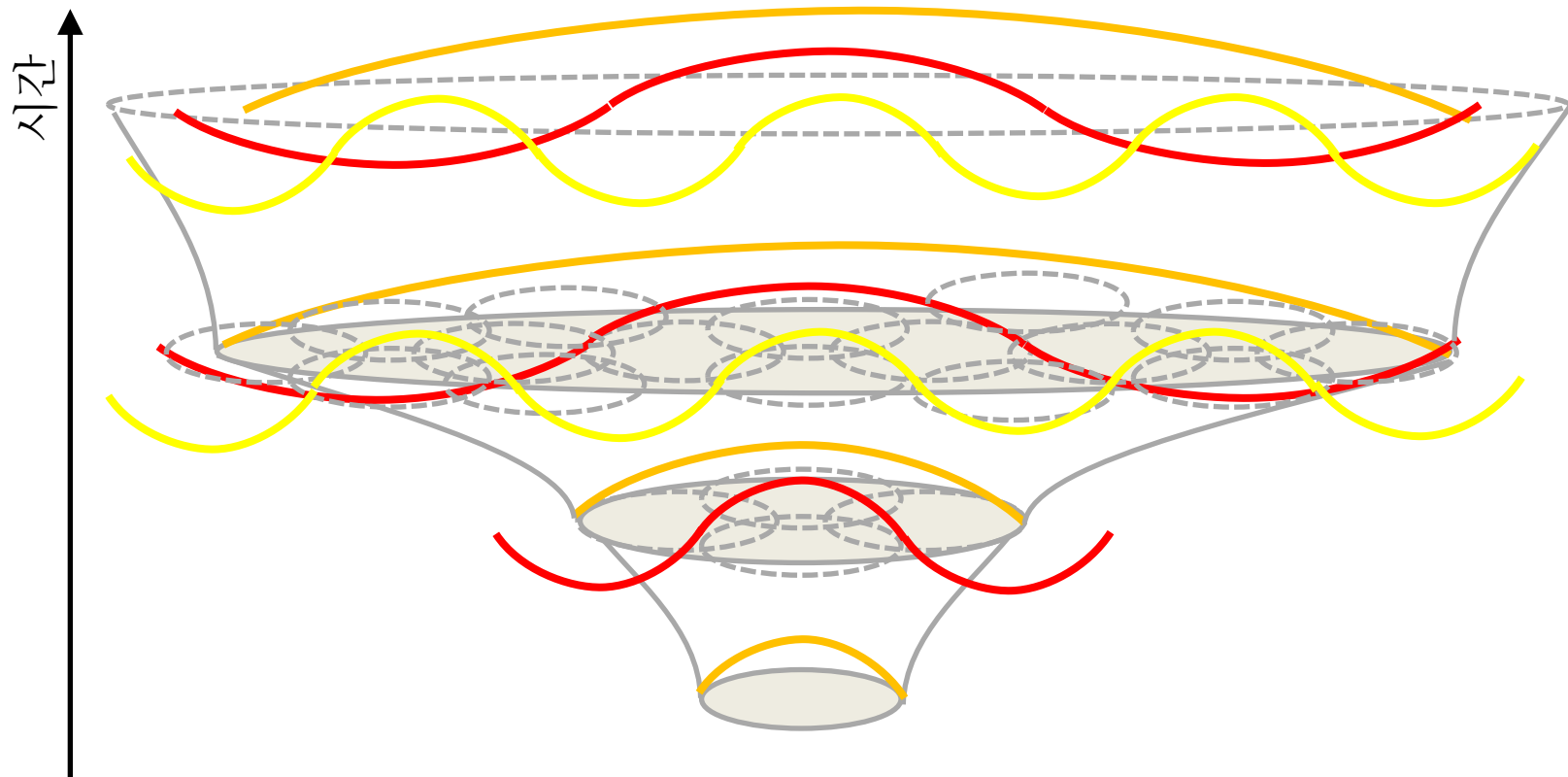
급팽창하는 우주

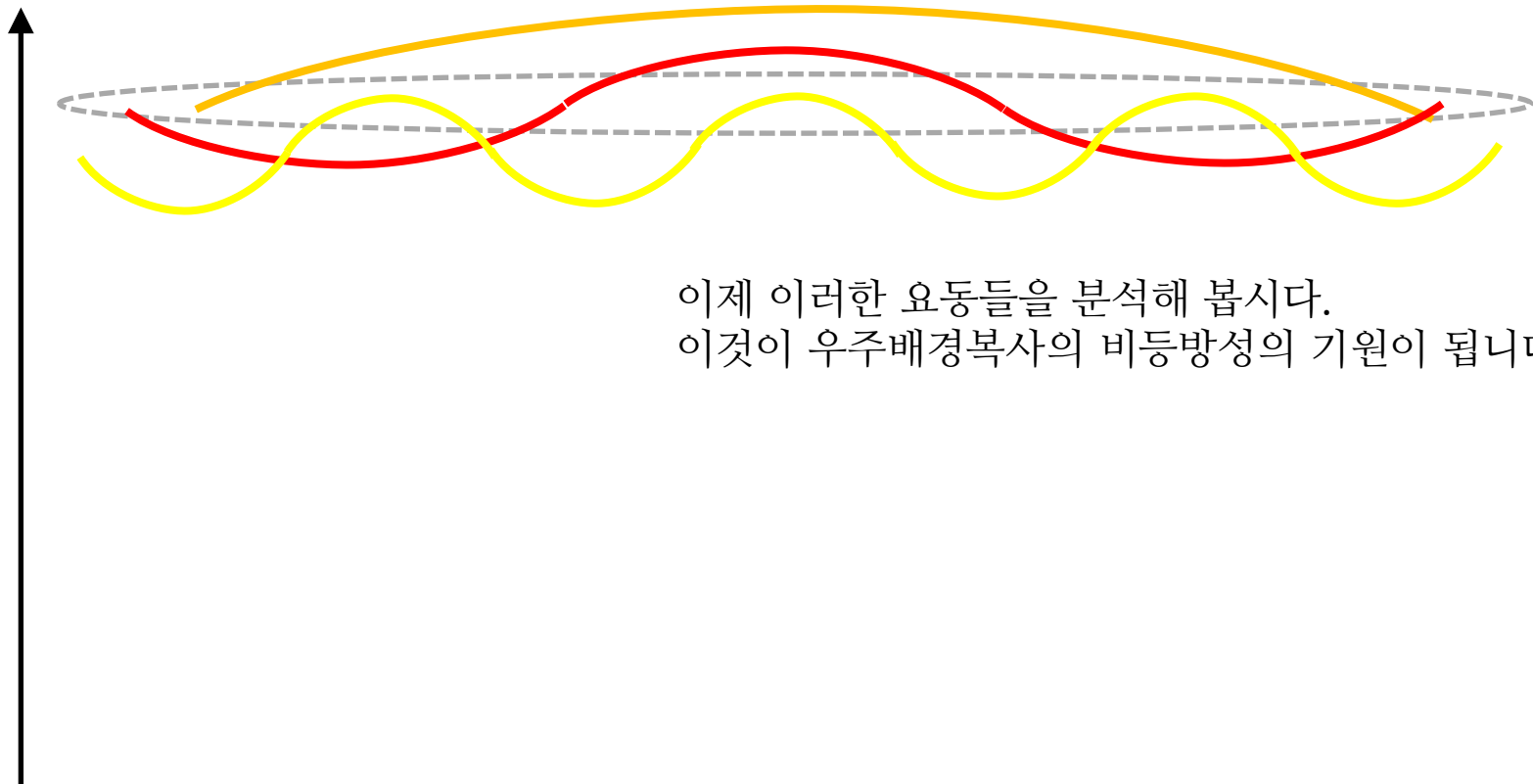
인플레이션 종료:

이 때 우주의 격자가 굉장히 커지게 됩니다.
따라서 우리는 이 내부를 볼 수 있습니다.

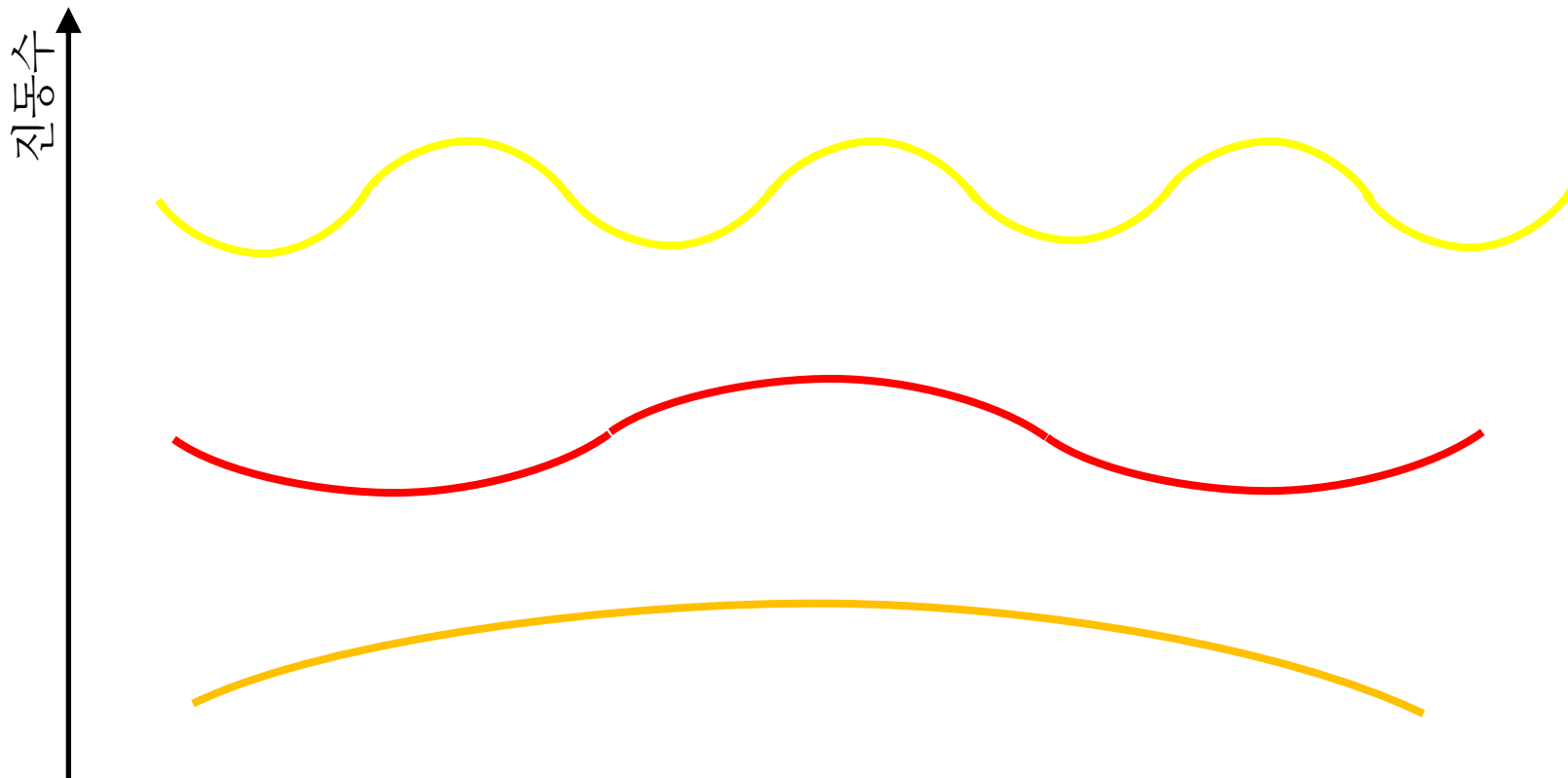


급팽창하는 우주

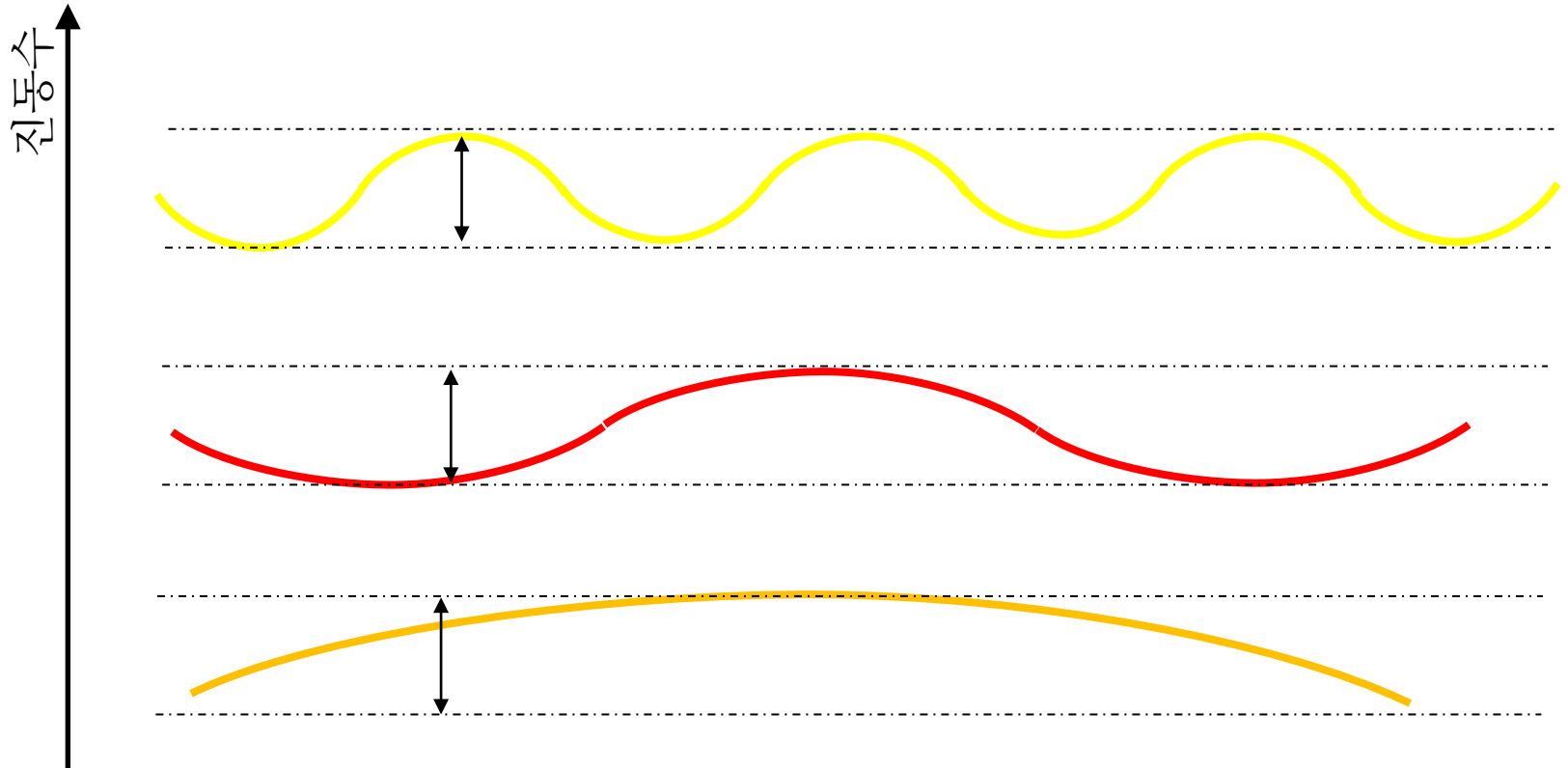


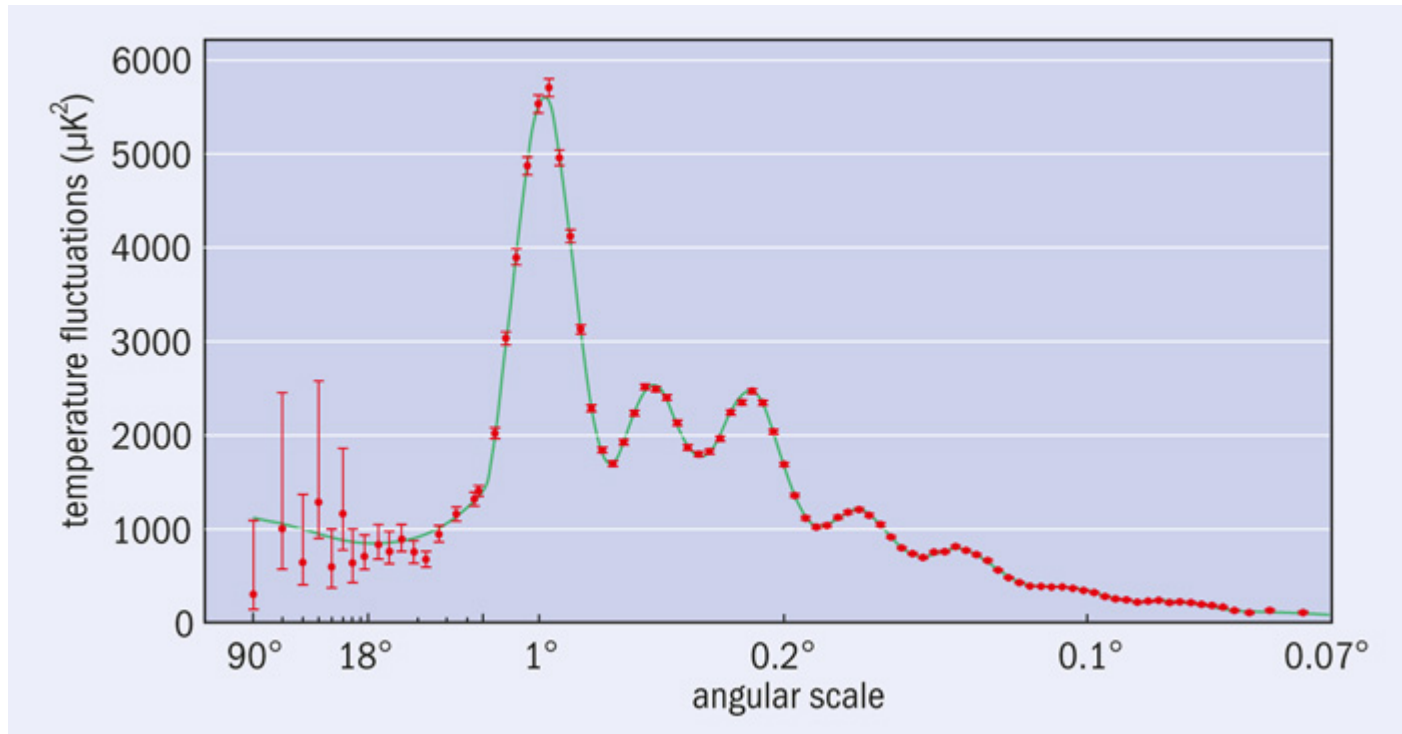


요동들을 진동수에 따라 나누어 봅시다.

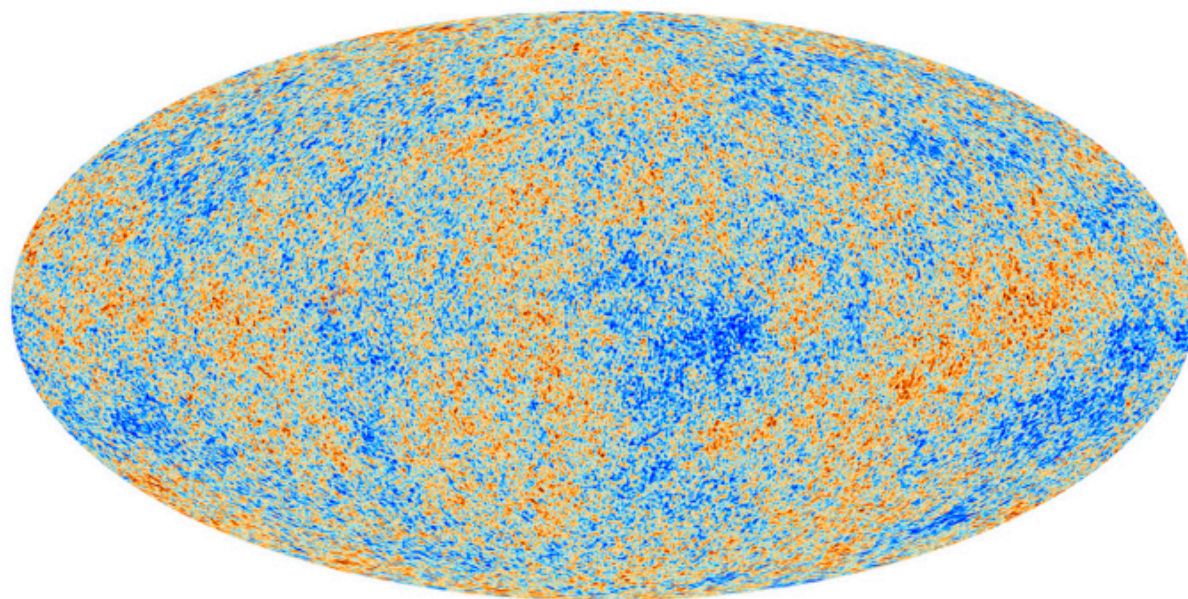


가장 간단한 경우, 보통은 파장만 다르고 진폭은 일정하게 됩니다.
그러나 자세한 것은 인플레이션이 시작하고 끝나는 메커니즘에 달려있습니다.





이러한 불균일성은 인플레이션 이론과 아주 잘 일치합니다.
그러나 아직 추가로 검증되어야 할 여지가 남아있습니다.



인플레이션이 끝나면서, 이전까지는 다중우주에 속했던 요동들이
우리 지평선 안에 보이게 됩니다.
이것이 우리 우주의 불균일성의 기원이 됩니다.

감사합니다