

제17강

상대론적 기체

이번 장에서는 상대론적 입자들에 대한
통계역학을 살펴봅시다.

$$\Omega \propto X^{3N} p^{3N}$$

먼저 간단하게 작은 바른틀 앙상블에서
어떤 일이 일어나는지를 생각해 봅시다.

$$\Omega \propto X^{3N} P^{3N}$$

경우의 수는 기본적으로 위상공간의 경우의 수,
즉 가능한 위치와 가능한 운동량의 크기에 비례하게 됩니다.
여기에서 3차원인 것과 N 개의 입자임을 고려해야 합니다.

$$\Omega \propto V^N E^{(3/2)N}$$

이것을 부피 $V \propto X^3$ 및 에너지 $E \propto P^2$ 의 함수로 나타내면
위와 같이 됩니다.

$$S = S_0 + Nk \ln V + \frac{3}{2} Nk \ln E$$

따라서 볼츠만 엔트로피는 위와 같이 나타낼 수 있습니다.

$$\begin{aligned} dS &= \left(\frac{\partial S}{\partial E} \right)_V dE + \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_E dV \\ &= \frac{1}{T} dE + \frac{p}{T} dV \end{aligned}$$

볼츠만 엔트로피는 위와 같이 전개 됩니다.

$$\begin{aligned}
 dS &= \left(\frac{\partial S}{\partial E} \right)_V dE + \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_E dV \\
 &= \frac{1}{T} dE + \frac{p}{T} dV \\
 &= \frac{3}{2} \frac{Nk}{E} dE + \frac{Nk}{V} dV
 \end{aligned}$$

볼츠만 엔트로피는 위와 같이 전개 됩니다.

$$E = \frac{3}{2}NkT \quad pV = NkT$$

따라서 이상 기체와 관련한 두 가지 관계식을 얻습니다.

같은 계산을 상대론적 입자, 즉
 $E = pc$ 를 만족하는 입자들에 대해서 적용해 봅시다.

$$\Omega \propto X^{3N} P^{3N}$$

이 경우에도 역시 경우의 수는 위와 같이 표현됩니다.

$$\Omega \propto V^N E^{3N}$$

상대론적 입자인 경우는
부피 $V \propto X^3$ 및 에너지 $E \propto P$ 의 함수로 나타내어야 하므로
위와 같이 됩니다.

$$S = S_0 + Nk \ln V + 3Nk \ln E$$

따라서 볼츠만 엔트로피는 위와 같이 나타낼 수 있습니다.

$$\begin{aligned} dS &= \left(\frac{\partial S}{\partial E} \right)_V dE + \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_E dV \\ &= \frac{1}{T} dE + \frac{p}{T} dV \\ &= 3 \frac{Nk}{E} dE + \frac{Nk}{V} dV \end{aligned}$$

볼츠만 엔트로피를 전개하면 위의 관계를 얻습니다.

$$E = 3NkT \qquad pV = NkT$$

따라서 상대론적 이상 기체에 대해서는
위의 두 가지 관계식을 얻습니다.

같은 분석을 이번에는 바른틀 앙상블에 대해 시도해봅시다.

$$Z_1 = \int_0^{\infty} e^{-\beta \hbar k c} g(k) dk$$

$$g(k) dk = \frac{V k^2}{2\pi^2} dk$$

상대론적 입자의 단일입자 분배함수는
위와 같이 쓸 수 있습니다.

$$Z_1 = \frac{V}{\Lambda^3}$$

$$\Lambda \equiv \frac{\hbar c \pi^{2/3}}{kT}$$

이 식을 적분해서 위의 결과를 얻습니다.

$$Z_1 = \int_0^{\infty} e^{-\beta E(k)} g(k) dk$$

$$E(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

$$g(k) = \frac{V k^2}{2\pi^2}$$

비상대론적 이상기체의 경우와 비교해 봅시다.

$$Z_1 = \frac{V}{h^3} \left(\frac{mkT}{2\pi} \right)^{3/2} \equiv \frac{V}{\lambda_{th}^3}$$

비상대론적 이상기체의 경우와 비교해 봅시다.

$$Z_1^{rel} \propto VT^3 \qquad Z_1^{cl} \propto VT^{3/2}$$

정리하면 위와 같습니다.

$$Z = \frac{Z_1^N}{N!} \propto \frac{V^N T^{3N}}{N!}$$

이제 N 개의 입자에 대한 분배함수는 위와 같이 쓸 수 있습니다.

$$E = 3NkT \quad pV = NkT$$

다시 한 번 위의 관계식과
다양한 열역학적 함수를 계산할 수 있습니다.

$$p = \frac{1}{3}u$$

이 두 관계식을 사용해서 지난 시간에 사용한 위의 식을
좀 더 자연스럽게 유도할 수 있습니다.

비상대론적 입자와 상대론적 입자는
단열 팽창 과정에 대해 서로 아주 다른 결과를 줍니다.

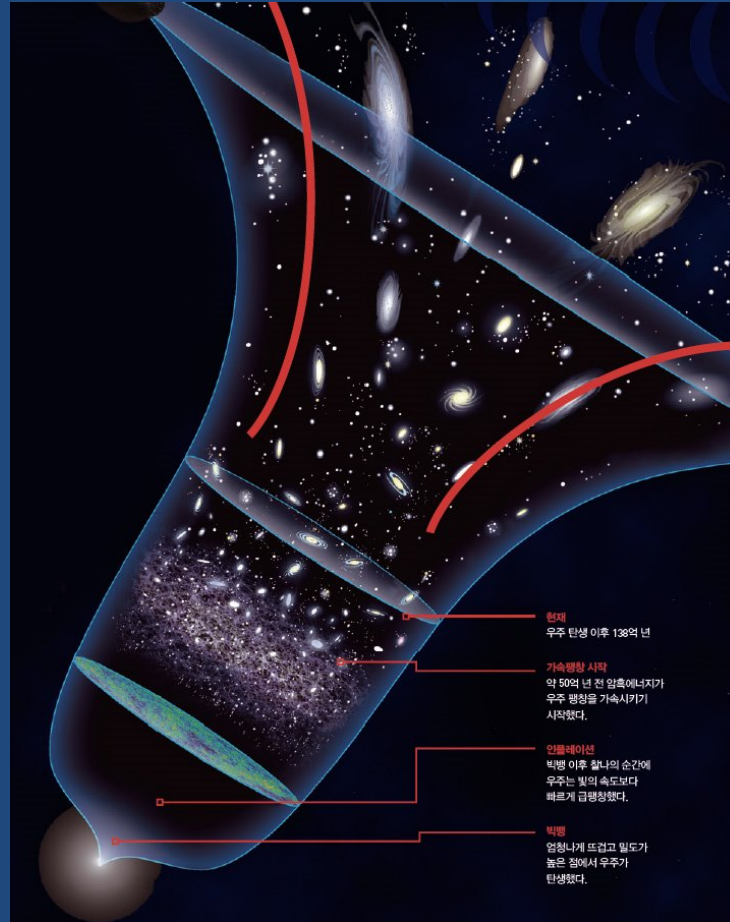
상대론적 입자

$$VT^3 = \text{const}$$

비상대론적 입자

$$VT^{3/2} = \text{const}$$

단열 과정에서는 엔트로피가 유지되므로 위의 값이 상수가 됩니다.



이 관계는 특히 우리 우주의 경우에 적용해볼 수 있습니다.

$$3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = 8\pi\rho$$

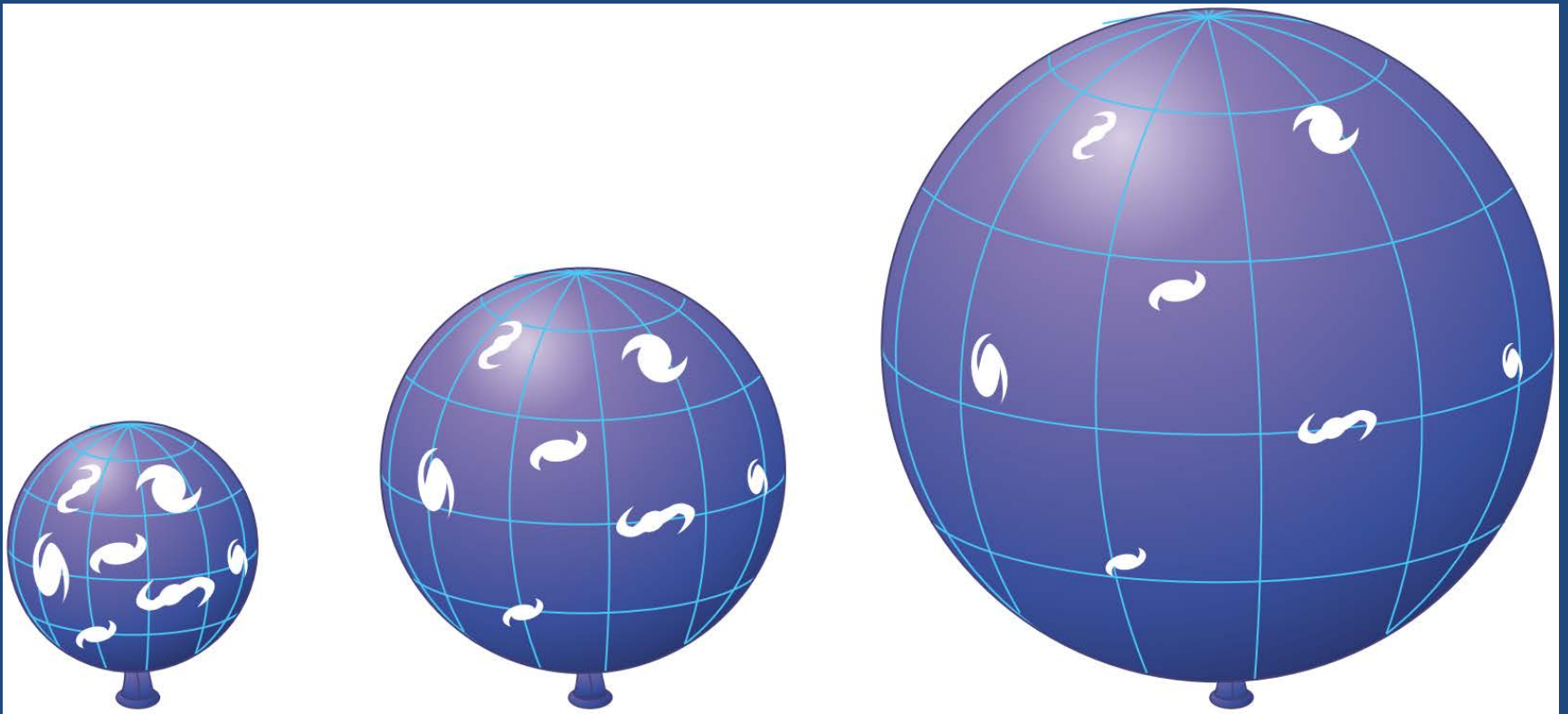
$$3 \frac{\ddot{a}}{a} = -4\pi(\rho + 3p)$$

우리 우주의 팽창을 기술하는 **프리드만 방정식** Friedmann equation은
아인슈타인의 장 방정식으로부터 유도됩니다.

$$3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = 8\pi\rho$$

$$3 \frac{\ddot{a}}{a} = -4\pi(\rho + 3p)$$

여기에서 $a(t)$ 는 우리 우주의 척도 인자_{scale factor},
 $\rho(t)$ 는 우리 우주의 밀도,
 $p(t)$ 는 우리 우주의 압력을 나타냅니다.



우주의 척도 인자 $a(t)$ 는 우리 우주에 새겨져 있는
단위 눈금과 같다고 할 수 있습니다.
우주가 팽창함에 따라 척도 인자가 커지게 됩니다.

$$3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) + \dot{\rho} = 0$$

앞의 두 식으로부터 우주의 밀도와 압력에 대한
위의 관계식을 얻습니다.

$$3 \frac{\dot{a}}{a} (\rho + p) + \dot{\rho} = 0$$

$$dE + pdV = 0$$

우리 우주의 부피가 $\propto a^3$ 이고 에너지가 $\propto \rho a^3$ 이 되므로,
사실은 이 식은 우리 우주가 단열 팽창을 하고 있다는 것과
같은 뜻을 가지고 있습니다.

상대론적 입자

$$VT^3 = \text{const}$$

비상대론적 입자

$$VT^{3/2} = \text{const}$$

우주가 단열 팽창을 할 때, 상대론적 입자와 비상대론적 입자는 각각 위와 같은 관계를 가집니다.

상대론적 입자

$$T \propto \frac{1}{a}$$

비상대론적 입자

$$T \propto \frac{1}{a^2}$$

우주의 척도 인자 a 에 대해 다시 표현하면 위와 같은 관계가 됩니다.

상대론적 입자

$$\rho \propto \frac{1}{a^4}$$

비상대론적 입자

$$\rho \propto \frac{1}{a^3}$$

우주의 에너지가 보존된다면,
입자의 밀도 ρ 는 위와 같은 관계를 갖게 됩니다.

상대론적 입자

$$\rho \propto \frac{1}{a^4}$$

비상대론적 입자

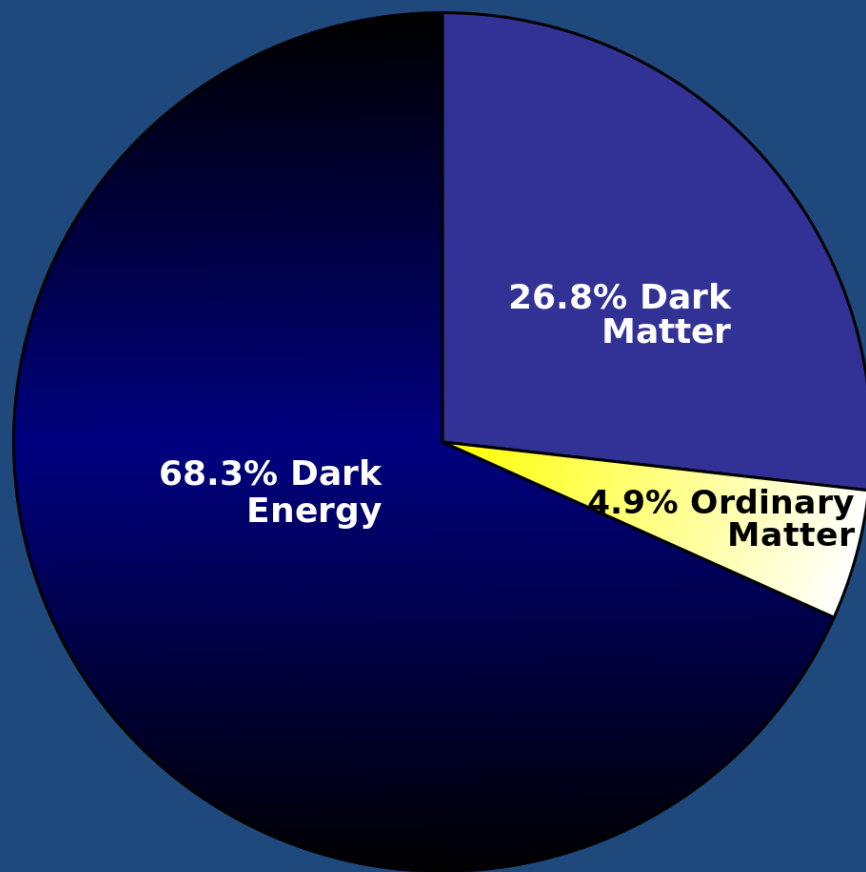
$$\rho \propto \frac{1}{a^3}$$

우주론에서는 상대론적 입자를 복사radiation라고 하고,
비상대론적 입자를 물질matter이라고 합니다.
따라서 우주 초기에는 상대론적 입자가 우세하다가
차츰 비상대론적 입자가 우세하게 됩니다.

에너지

$$\rho \propto \text{const}$$

우주론에서는 이 이외에 추가로 에너지energy의 기여가 있습니다.
에너지는 밀도가 상수로 주어집니다.
따라서 최종적으로는 에너지의 기여가 가장 지배적이게 됩니다.



현재 우리 우주는 **암흑 에너지**가 가장 지배적인 상태에 있습니다.
암흑 에너지와 물질의 대부분을 구성하는 **암흑 물질**의 기원에 대해
현재 활발하게 연구중입니다.

감사합니다