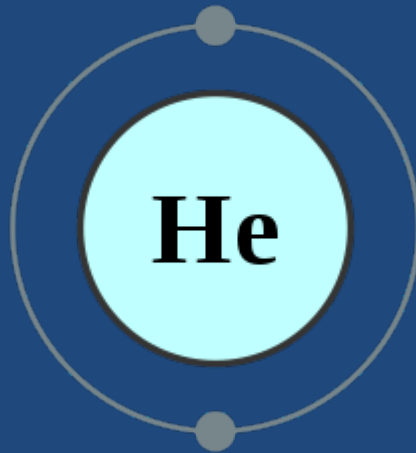


제19강

보즈-아인슈타인과 페르미-디랙 분포

이번 장에서는 양자역학이
기체의 통계적 성질을 변화시키는 방법을
고려하고자 합니다.

헬륨 원자



$$H = -\frac{\hbar^2}{2m_1} \nabla_1^2 - \frac{\hbar^2}{2m_2} \nabla_2^2 + V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t)$$

$$\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t)$$

헬륨 원자

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_1^2 - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla_2^2 + V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t)$$

두 입자의 질량과 전하량이 같다면,
이 해밀토니안은 첫 번째 입자와 두 번째 입자의 교환에 대해서
동일한 형태를 가집니다.
따라서 해밀토니안의 입장에서는
두 입자를 구분할 수 없습니다(indistinguishable).

헬륨 원자

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_1^2 - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla_2^2 + V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t)$$

전자의 상태를 결정하는 방정식은 슈뢰딩거 방정식 뿐입니다.
따라서 슈뢰딩거 방정식에서 두 입자를 구분할 수 없다면,
전 우주에서 두 입자를 구분할 수 있는 방법은 없습니다.
따라서 우리는 두 입자를 같은 입자^{identical particles}로 보아야 합니다.

대칭화 조건

$$\psi_{\pm}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = A[\psi_a(\vec{r}_1)\psi_b(\vec{r}_2) \pm \psi_b(\vec{r}_1)\psi_a(\vec{r}_2)]$$

상대론적 효과에 의해
스핀이 정수인 **보존**Boson은 **대칭화(+)**,
스핀이 반정수인 **페르미온**Fermion은 **반대칭화(-)**를
요구하게 됩니다.

대칭화 조건

$$\psi(\vec{r})\chi(s)$$

대칭화는 입자의 전체 파동함수에 대해서 요청되므로,
스핀의 상태는 대칭($s=1$, triplet)일 수도 있고
반대칭($s=0$, singlet)일 수도 있습니다.

대칭화 조건의 의미

$$\psi_d(x_1, x_2) = \psi_a(x_1)\psi_b(x_2)$$

$$\psi_{\pm}(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_a(x_1)\psi_b(x_2) \pm \psi_b(x_1)\psi_a(x_2)]$$

위와 같은 두 개의 파동함수를 생각하고,
두 입자를 구분할 수 있는 경우와 두 입자가 동일한 경우
기댓값이 어떻게 달라지는지를 살펴봅시다.

구분할 수 있는 경우

$$\psi_d(x_1, x_2) = \psi_a(x_1)\psi_b(x_2)$$

$$\langle (x_1 - x_2)^2 \rangle_d = \langle x_1^2 \rangle_a + \langle x_2^2 \rangle_b - 2\langle x_1 \rangle_a \langle x_2 \rangle_b$$

동일한 경우

$$\psi_{\pm}(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_a(x_1)\psi_b(x_2) \pm \psi_b(x_1)\psi_a(x_2)]$$

$$\langle (x_1 - x_2)^2 \rangle_{\pm} = \langle x_1^2 \rangle_a + \langle x_2^2 \rangle_b - 2\langle x_1 \rangle_a \langle x_2 \rangle_b \pm |\langle x \rangle_{ab}|^2$$

$$\langle x \rangle_{ab} = \int x \psi_a^* \psi_b dx$$

대칭화 조건의 효과

$$\langle \Delta x^2 \rangle_{\pm} = \langle \Delta x^2 \rangle_d \mp 2|\langle x \rangle_{ab}|^2$$

보존의 경우는 거리가 가까워지려고 하고,
페르미온의 경우는 거리가 멀어지려고 합니다.
거리가 충분히 멀리 떨어져 있으면
구분 가능하다고 생각해도 괜찮습니다.

이제 이러한 대칭화/반대칭화 조건이
통계역학적으로 미치는 영향에 대해 살펴봅시다.

양자통계역학 quantum statistical mechanics

보존 입자들에 대해
분배함수는 다음과 같이 적을 수 있습니다.

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n(E-\mu)/kT} = \frac{1}{1 - e^{-(E-\mu)/kT}}$$

양자통계역학 quantum statistical mechanics

페르미온 입자들에 대해
분배함수는 다음과 같이 적을 수 있습니다.

$$\mathcal{Z} = \sum_{n=0}^1 e^{-n(E-\mu)/kT} = 1 + e^{-(E-\mu)/kT}$$

양자통계역학 quantum statistical mechanics

보존 입자들에 대해 주어진 에너지에 대한
입자의 수의 기댓값은 다음과 같습니다.

$$\langle n \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{e^{-n(E-\mu)/kT}}{\mathcal{Z}} = \frac{1}{e^{(E-\mu)/kT} - 1}$$

양자통계역학 quantum statistical mechanics

페르미온 입자들에 대해 주어진 에너지에 대한
입자의 수의 기댓값은 다음과 같습니다.

$$\langle n \rangle = \sum_{n=0}^1 n \frac{e^{-n(E-\mu)/kT}}{Z} = \frac{1}{e^{(E-\mu)/kT} + 1}$$

양자통계역학 quantum statistical mechanics

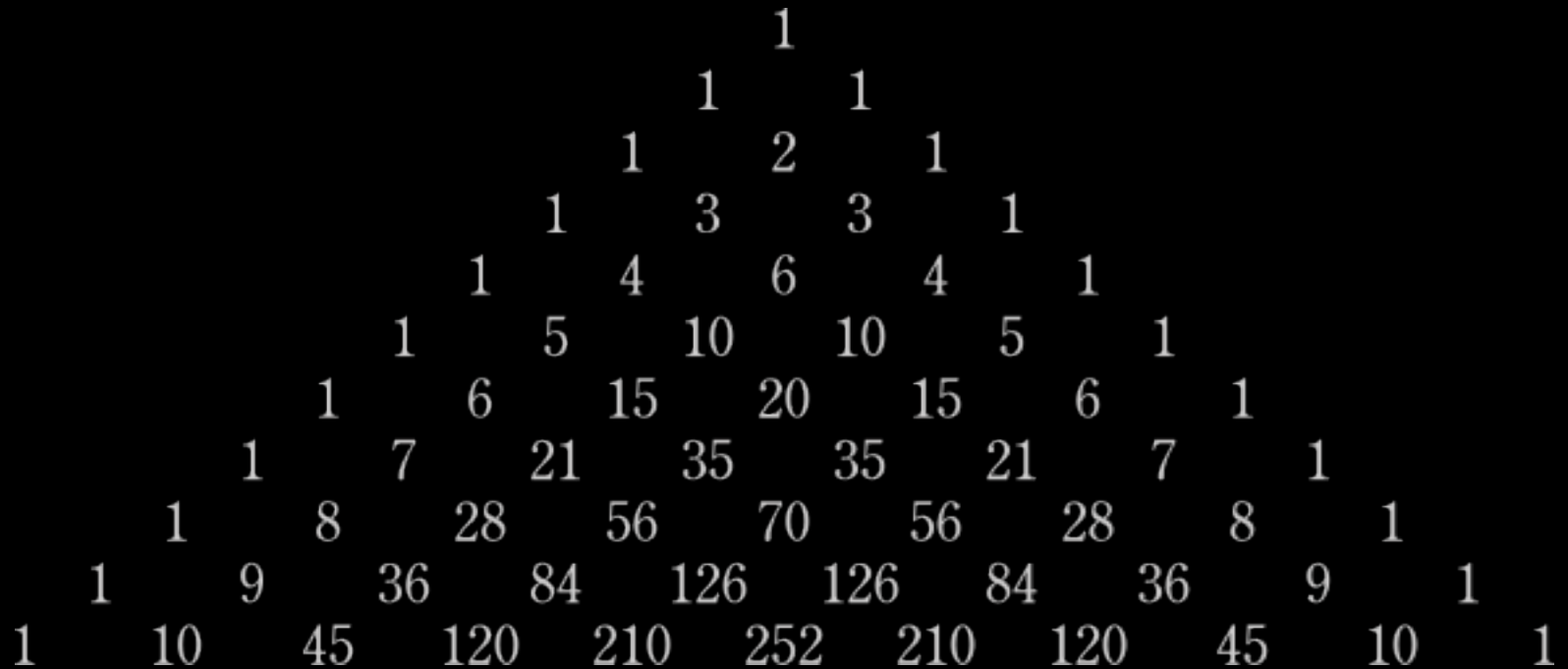
이러한 입자 수의 분포를 각각
보즈-아인슈타인 분포와 페르미-디랙 분포라고 부릅니다.

$$\langle n \rangle = \frac{1}{e^{(E-\mu)/kT} \mp 1}$$

우리는 지금까지 **큰 바른틀 앙상블**을 가지고
양자통계를 계산했습니다.

동일한 문제를 **작은 바른틀 앙상블**에서 먼저 계산한 뒤에
구속조건을 나중에 부여함으로서
계산할 수도 있습니다.

이항분포 binomial distribution



파스칼의 삼각형

이항분포 binomial distribution

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n - k)!}$$

n 개의 표본에서 k 개를 순서를 생각하지 않고 선택하는 경우의 수는 이항분포를 따릅니다.

페르미온의 경우

$$\binom{d_n}{N_n} = \frac{d_n!}{N_n! (d_n - N_n)!}$$

n 번째 에너지 상태에 대해서
 d_n 개의 중첩도(degeneracy) 중에서 N_n 개의 페르미온 입자를
순서를 생각하지 않고 배열하는 경우의 수는
위와 같습니다.

보존의 경우

$$\binom{d_n + N_n - 1}{N_n} = \frac{(d_n + N_n - 1)!}{N_n! (d_n - 1)!}$$

같은 선택문제에 있어서,
보존의 경우에는 입자들이 겹칠 수 있으므로
 d_n 개의 중첩도(degeneracy) 중에서 N_n 개의 입자를
순서를 생각하지 않고 배열하는 경우의 수는
위와 같습니다.

페르미온의 경우

$$\Omega_F = \prod_{n=1}^{\infty} \binom{d_n}{N_n}$$

페르미온의 경우 가능한 모든 경우의 수는
위와 같습니다.

보존의 경우

$$\Omega_B = \prod_{n=1}^{\infty} \binom{d_n + N_n - 1}{N_n}$$

보존의 경우 가능한 모든 경우의 수는
위와 같습니다.

작은 바른틀 앙상블의 엔트로피

$$S = k \log \Omega$$

작은 바른틀 앙상블 microcanonical ensemble의 엔트로피는
볼츠만 엔트로피, 즉 **경우의 수**에 의해서 주어집니다.

구속조건

$$S = k \log \Omega + \alpha \left[N - \sum_{n=1}^{\infty} N_n \right] + \beta \left[E - \sum_{n=1}^{\infty} N_n E_n \right]$$

위와 같이 에너지와 입자의 수에 대해서
구속조건을 줄 수 있습니다.
 α 와 β 는 라그랑주 승수입니다.

스털링 Stirling의 근사공식

$$\log \Omega_F \simeq \sum_{n=1}^{\infty} [\log d_n! - N_n \log N_n + N_n - (d_n - N_n) \log(d_n - N_n) + (d_n - N_n)]$$

$$\log \Omega_B \simeq \sum_{n=1}^{\infty} [(d_n + N_n - 1) \log(d_n + N_n - 1) - (d_n + N_n - 1) - N_n \log N_n + N_n - \log(d_n - 1)!]$$

엔트로피 항은 스텔링의 근사공식 $\log z! \simeq z \log z - z$ 으로 전개할 수 있습니다.

구속조건

$$S = k \log \Omega + \alpha \left[N - \sum_{n=1}^{\infty} N_n \right] + \beta \left[E - \sum_{n=1}^{\infty} N_n E_n \right]$$

구속조건을 고려하고 S 를 N_n 으로 미분해서
0이 되는 지점을 구하면,
큰 바른틀 앙상블에서 엔트로피가 가장 큰 경우를
구하게 됩니다.

가장 가능성이 높은 점유 수

$$N_n = \frac{d_n}{e^{(\alpha + \beta E_n)/k} + 1} \quad : \text{페르미온}$$

$$N_n = \frac{d_n - 1}{e^{(\alpha + \beta E_n)/k} - 1} \quad : \text{보존}$$

구속조건을 고려하고 S 를 N_n 으로 미분해서
0이 되는 지점을 구하면,
큰 바른틀 앙상블에서 엔트로피가 가장 큰 경우를
구하게 됩니다.

파라미터의 해석

$$\alpha = -\frac{\mu}{T} \qquad \beta = \frac{1}{T}$$

열역학과의 대응을 생각하면
라그랑주 승수는 위와 같은 해석을 하게 됩니다.

파라미터의 해석

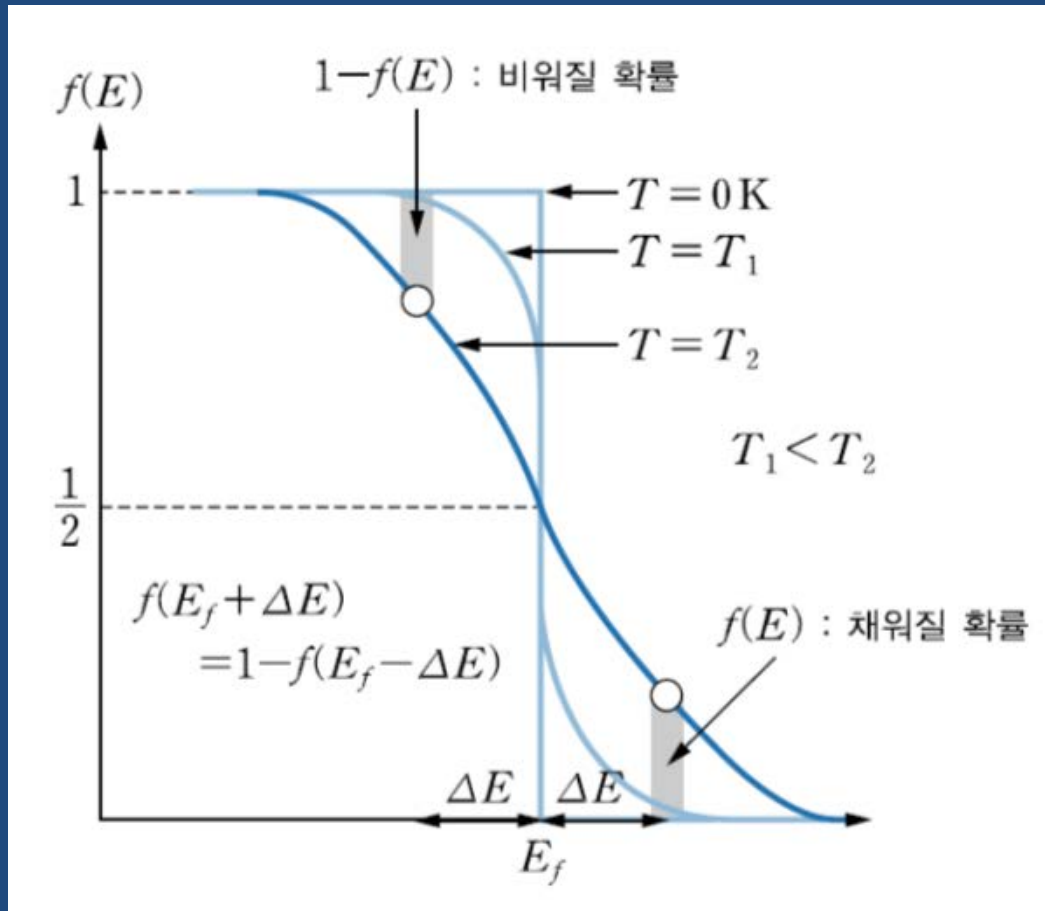
$$\alpha = -\frac{\mu}{T} \qquad \beta = \frac{1}{T}$$

열역학과의 대응을 생각하면
라그랑주 승수는 위와 같은 해석을 하게 됩니다.

따라서 에너지에 대한 입자 수의 기댓값은 다음과 같이 됩니다.
(점유 수 = 입자 수 × 중첩도)

$$\langle n \rangle = \frac{1}{e^{(E-\mu)/kT} \mp 1}$$

페르미-디랙 분포



흑체 복사

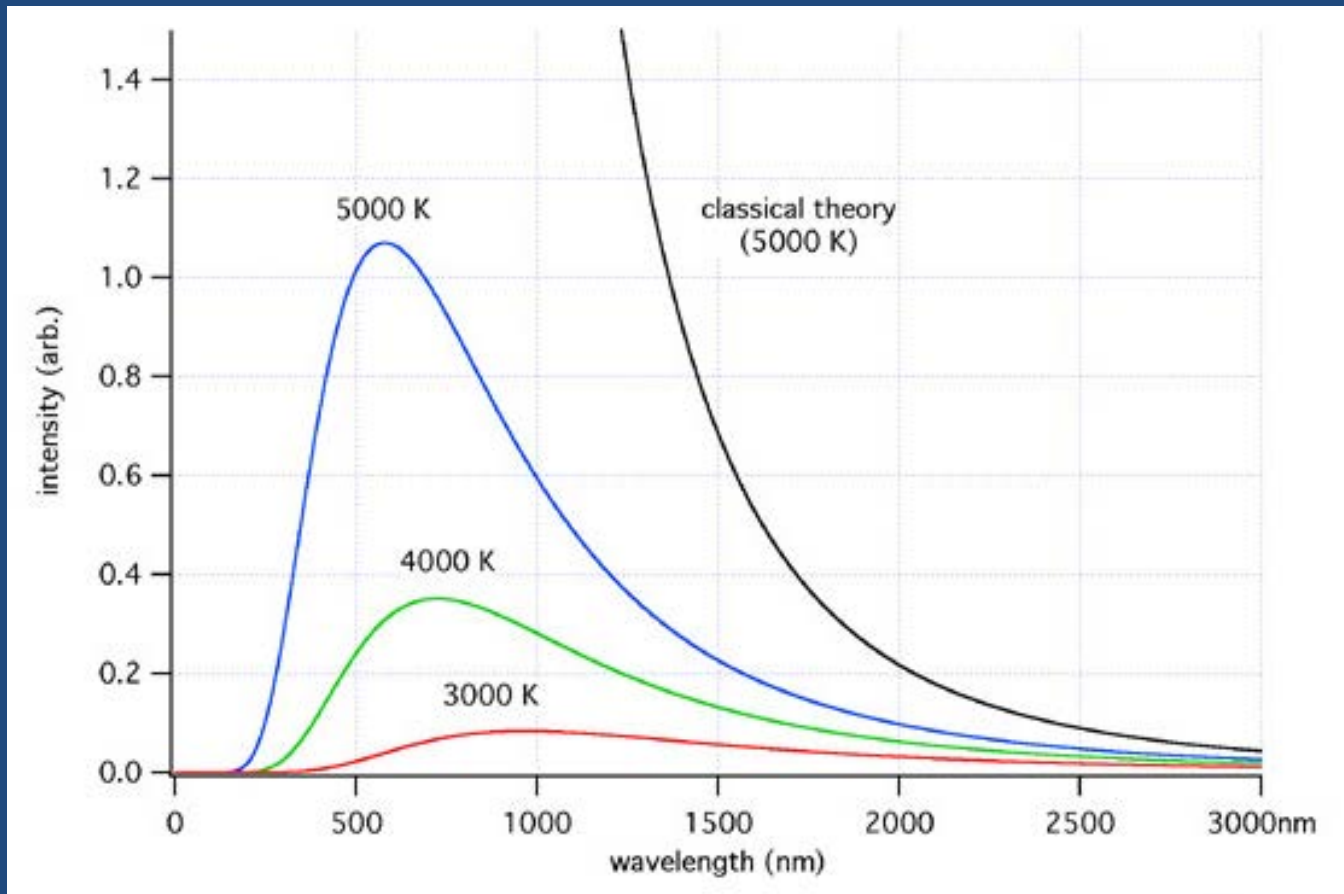
에너지 밀도: $u(\omega)d\omega = \hbar\omega \frac{d_g \langle n_\omega \rangle}{V}$

중첩도: $d_g = \frac{V}{\pi^2} k^2 dk$

플랑크의 흑체복사법칙

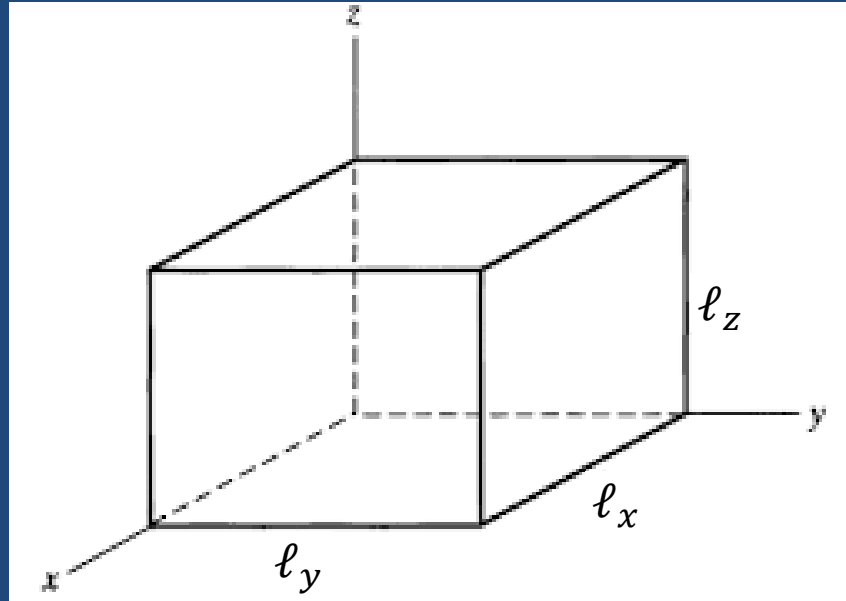
$$u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

흑체 복사



페르미-디랙 분포가 결정적으로 의미를 가지는 경우를
천체물리학적 현상에서 살펴볼 수 있습니다.

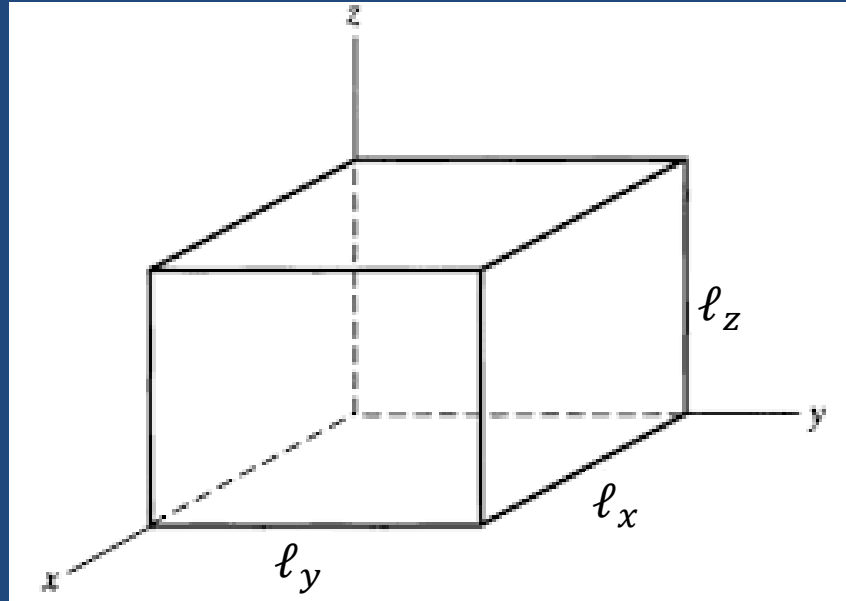
상자에 전자를 채우기



위와 같은 3차원 상자에 전자를 채운다고 합시다.
양자화 조건에 의해서, 다음 조건이 요구됩니다.

$$k_i \ell_i = n_i \pi$$

이제 k -공간에서 어떤 일이 일어나는지를 알아봅시다.



전자는 에너지가 낮은 곳을 선호하므로 작은 k 를 선호합니다.
그러나 파울리의 배타원리에 의해
같은 k 에 입자를 쌓아둘 수는 없게 됩니다.

전자는 다음과 같은 규칙으로 k -공간을 채워나가게 됩니다.

$$\frac{1}{8} \left(\frac{4}{3} \pi k_F^3 \right) = \frac{Nq}{2} \left(\frac{\pi^3}{V} \right)$$

k_F : k -공간의 바깥 반지름

N : 입자의 수

q : 입자 당 가지고 있는 전자의 수

π^3/V : $k_x k_y k_z$ 단위 블록의 부피

전자는 다음과 같은 규칙으로 k -공간을 채워나가게 됩니다.

$$\underbrace{\frac{1}{8}}_{k\text{-공간에서 } k_i > 0 \text{인 영역}} \left(\frac{4}{3} \pi k_F^3 \right) = \underbrace{\frac{Nq}{2}}_{\text{스핀 업과 다운}} \left(\frac{\pi^3}{V} \right)$$

k_F : k -공간의 바깥 반지름

N : 입자의 수

q : 입자 당 가지고 있는 전자의 수

π^3/V : $k_x k_y k_z$ 단위 블록의 부피

전자는 다음과 같은 규칙으로 k -공간을 채워나가게 됩니다.

$$\underbrace{\frac{1}{8}}_{k\text{-공간에서 } k_i > 0 \text{인 영역}} \left(\frac{4}{3} \pi k_F^3 \right) = \underbrace{\frac{Nq}{2}}_{\text{스핀 업과 다운}} \left(\frac{\pi^3}{V} \right)$$

k_F : k -공간의 바깥 반지름

N : 입자의 수

q : 입자 당 가지고 있는 전자의 수

π^3/V : $k_x k_y k_z$ 단위 블록의 부피

k_F : 페르미 면 surface

E_F : 페르미 에너지

페르미 에너지는 전자가 가질 수 있는 가장 높은 에너지를 말합니다.
이 번에는 **전자의 총 에너지**를 구해보시다.

$$dE = (dk\text{껍질 안에 포함되는 전자 수}) \times \frac{\hbar^2}{2m} k^2$$

페르미 에너지는 전자가 가질 수 있는 가장 높은 에너지를 말합니다.
이 번에는 **전자의 총 에너지**를 구해보시다.

$$dE = (dk\text{껍질 안에 포함되는 전자 수}) \times \frac{\hbar^2}{2m} k^2$$

$$\begin{aligned} (dk\text{껍질 안에 포함되는 전자 수}) &= \frac{(dk\text{껍질의 부피})}{(\text{전자 1개당 차지하는 부피})} \\ &= \frac{\frac{1}{8} (4\pi k^2) dk}{\frac{1}{2} \frac{\pi^3}{V}} \end{aligned}$$

적분을 하면 다음과 같습니다.

$$E = \frac{\hbar^2}{10\pi^2 m} (3\pi^2 Nq)^{5/3} V^{-2/3}$$

이것을 사용해서 압력도 구할 수 있습니다.

$$E = \frac{\hbar^2}{10\pi^2 m} (3\pi^2 Nq)^{5/3} V^{-2/3}$$

$$p = -\frac{\partial E}{\partial V} \propto V^{-5/3}$$

즉 페르미온은 압축을 할 때 압력이 생깁니다.
이것을 **축퇴압** degeneracy pressure이라고 부르고
물체가 단단함을 갖는 이유가 됩니다.

중력과 전자의 축퇴압이 평형을 이루게 된다면 어떻게 될까요?

중력과 전자의 축퇴압이 평형을 이루게 된다면 어떻게 될까요?

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$E_{deg} = AR^{-2}$$

$$E_{grav} = -BR^{-1}$$

중력과 전자의 축퇴압이 평형을 이루게 된다면 어떻게 될까요?

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$E_{deg} = AR^{-2}$$

$$E_{grav} = -BR^{-1}$$

중력과 축퇴압이 평형을 이루는 경우를
백색 왜성white dwarf라고 합니다.

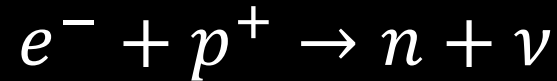
중력이 좀 더 강해지면 상대론적으로 ($E = \hbar ck$) 다루어야 합니다.

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$E_{deg} = AR^{-1} \propto N^{4/3}R^{-1}$$

$$E_{grav} = -BR^{-1} \propto N^2R^{-1}$$

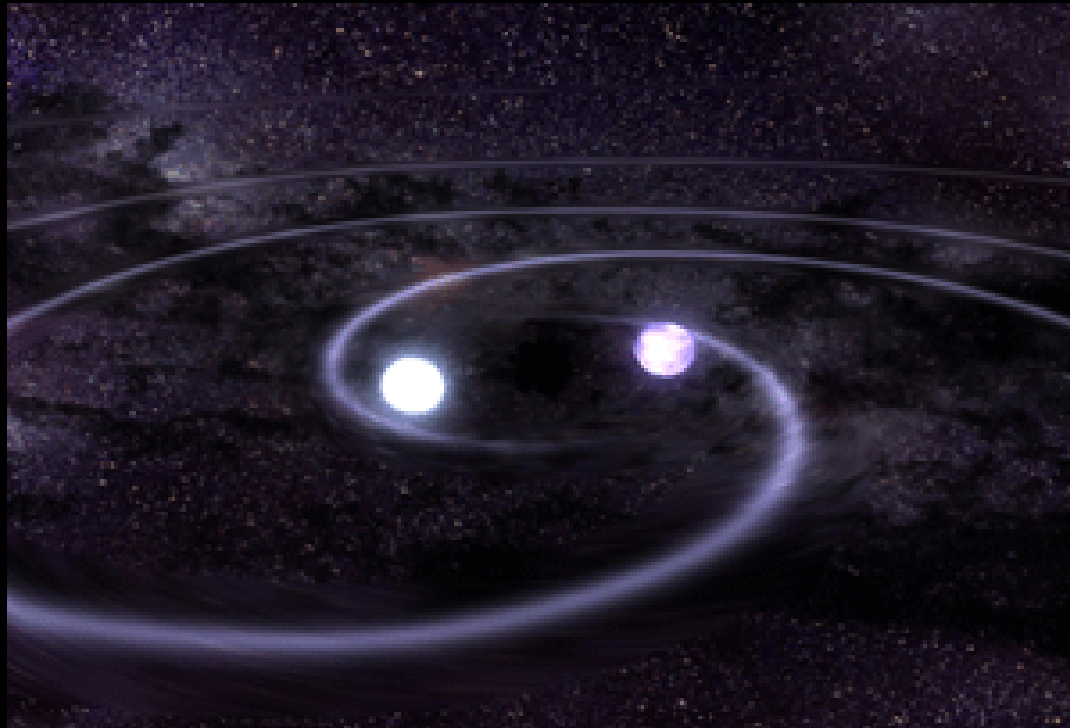
이 경우 평형상태보다 입자가 더 많아지면,
중력이 축퇴압을 능가해서 수축을 계속하게 됩니다.
이 때의 한계질량을 **찬드라세카 한계** Chandrasekhar limit 라고 합니다.
대략 **태양질량의 1.4배** 정도 되는 것으로 알려져 있습니다.



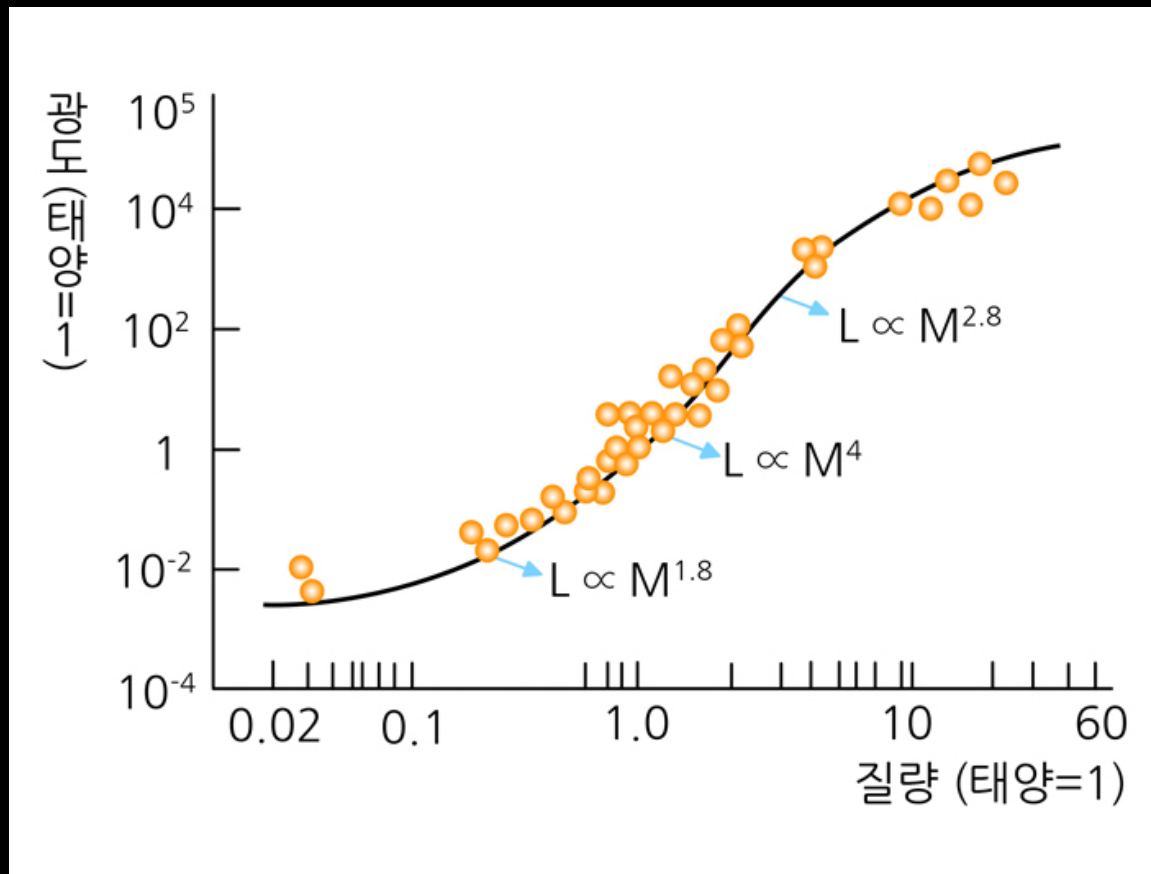
찬드라세카 한계보다 더 무거운 경우에는
내부에서 전자와 양성자가 반응을 일으켜서
중성자를 생성하게 됩니다.

이 반응은 엄청나게 많은 에너지를 방출하게 되는데,
이것은 초신성 폭발의 한 가지 메커니즘이 됩니다.

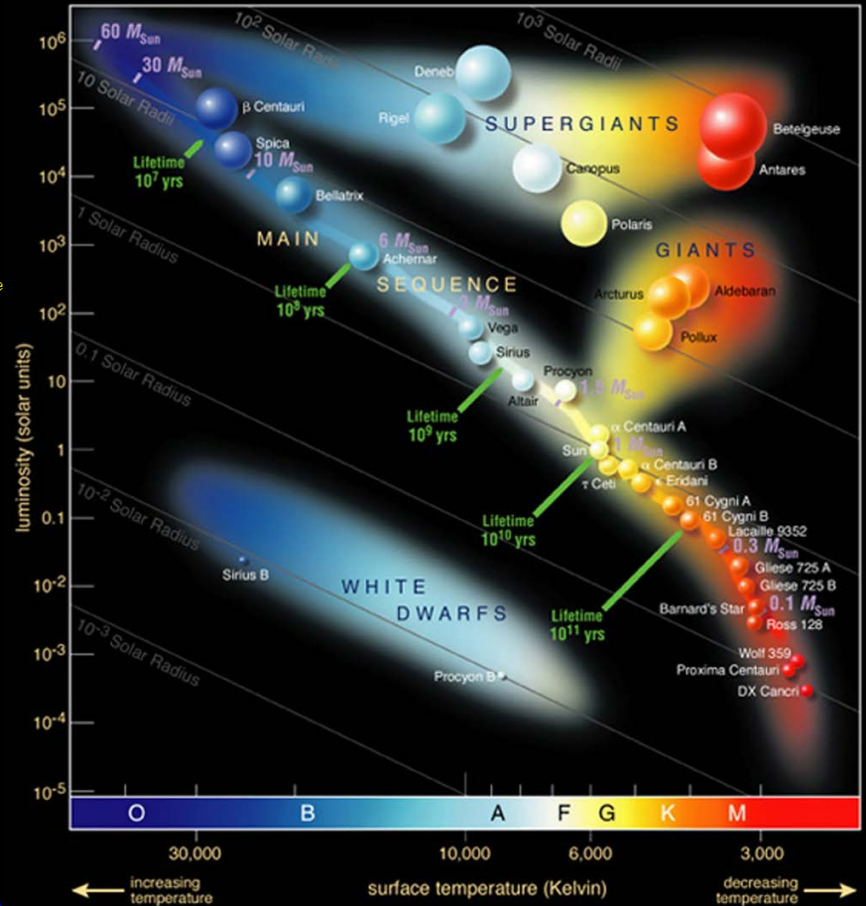
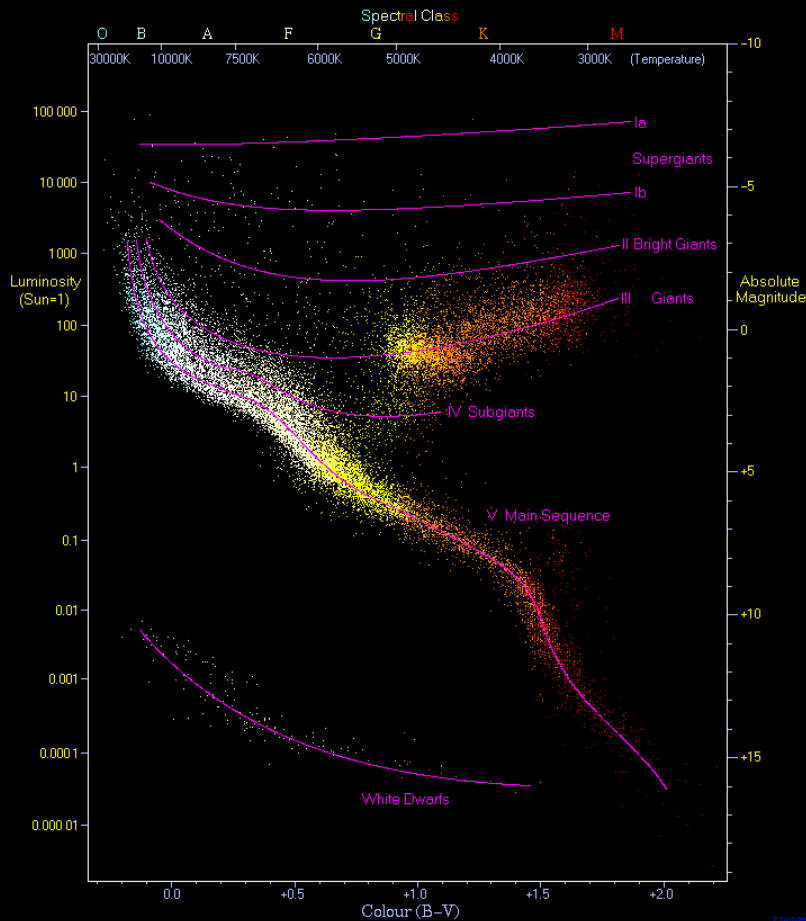
초신성 폭발 이후에는 내부에 중성자별neutron star이나
블랙홀black hole이 남게 됩니다.



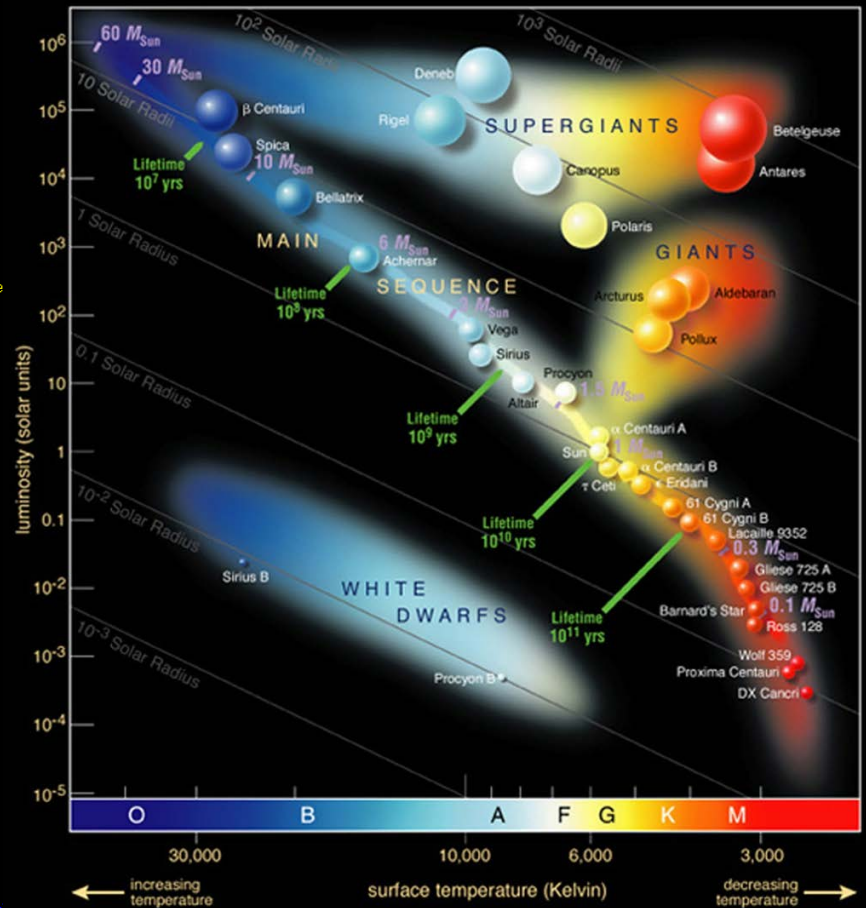
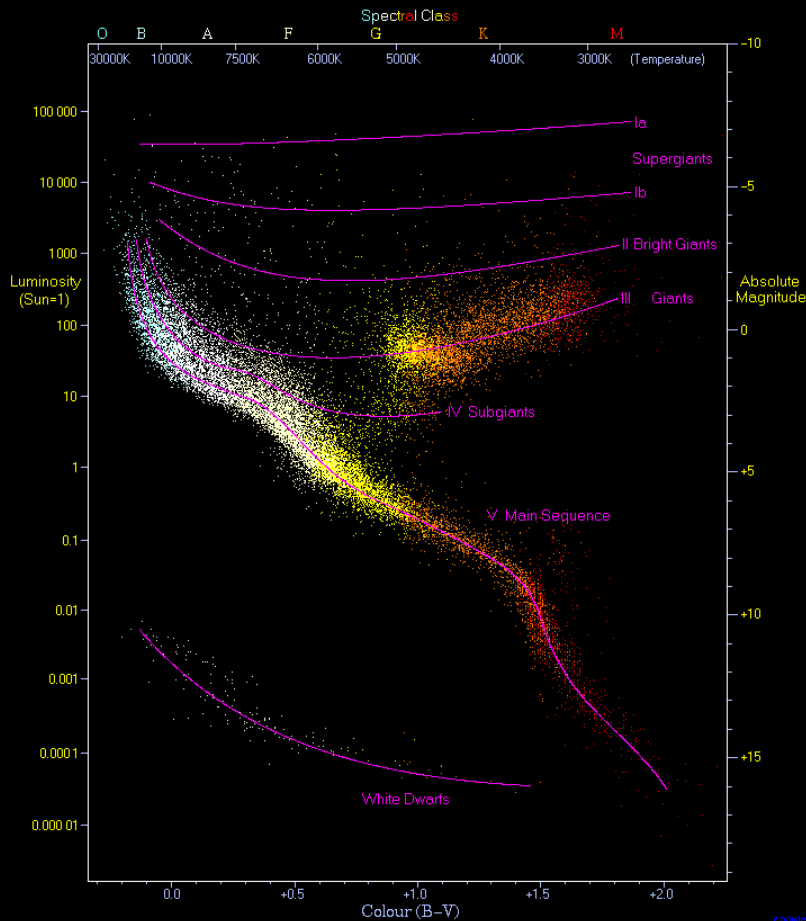
천문학자들은 쌍성계의 운동을 분석해서
별까지의 거리와 별들의 질량을 측정할 수 있었습니다.
우리는 별의 상대광도를 측정할 수 있으므로
질량과 절대광도를 계산할 수 있게 됩니다.



한 가지 흥미로운 사실은
질량과 절대광도는 서로 의존하는 관계에 있다는 것입니다.



Hertzsprung과 Russell은 별들을 측정하면서
 광도와 색깔에 따라서 분류를 해 보았습니다.
 이것을 HR 다이어그램이라고 부릅니다.

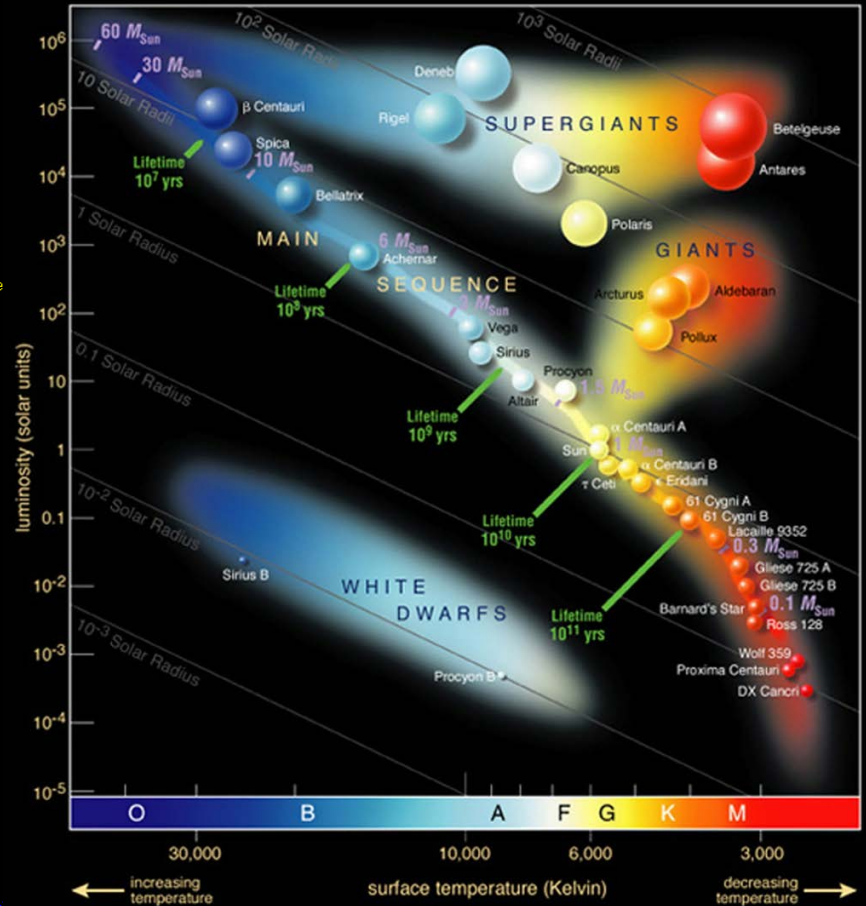
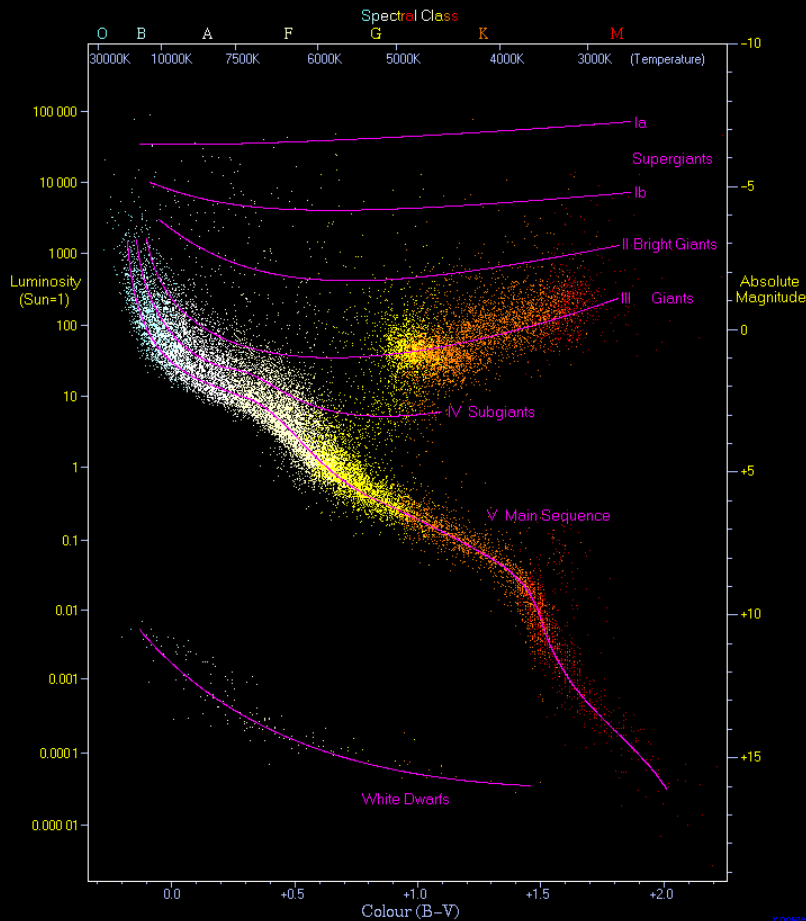


HR 다이어그램의 가장 특징적인 부분은 거의 대부분의 별(주계열성)은 광도와 색 사이에 일정한 관계를 가지고 있다는 것입니다.

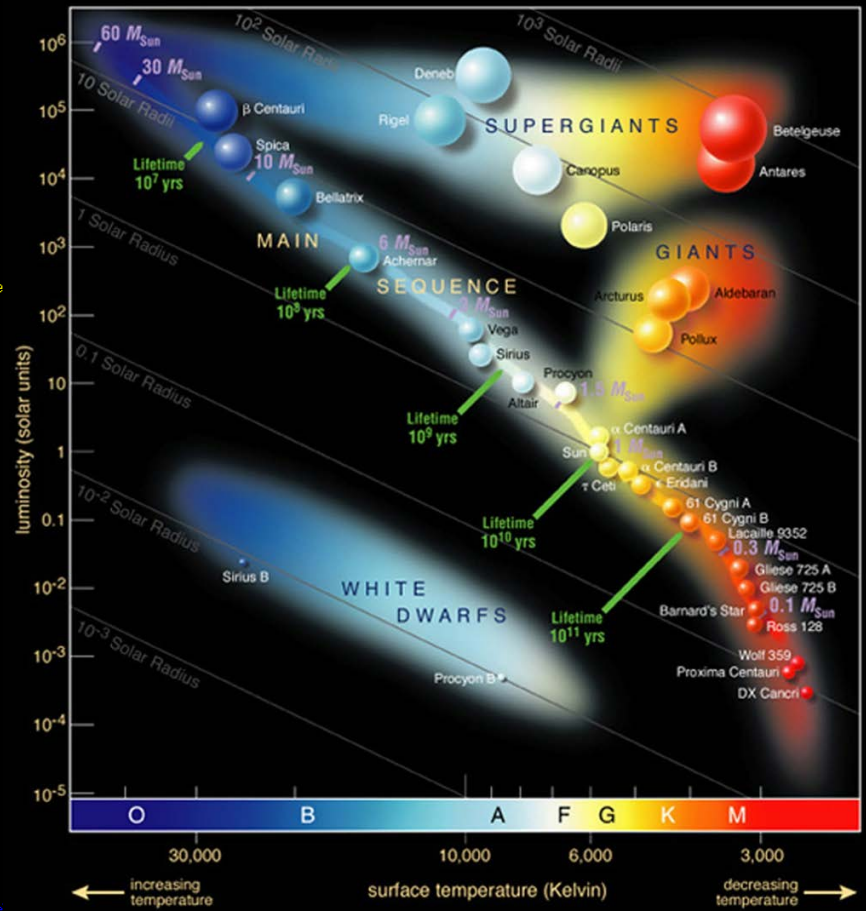
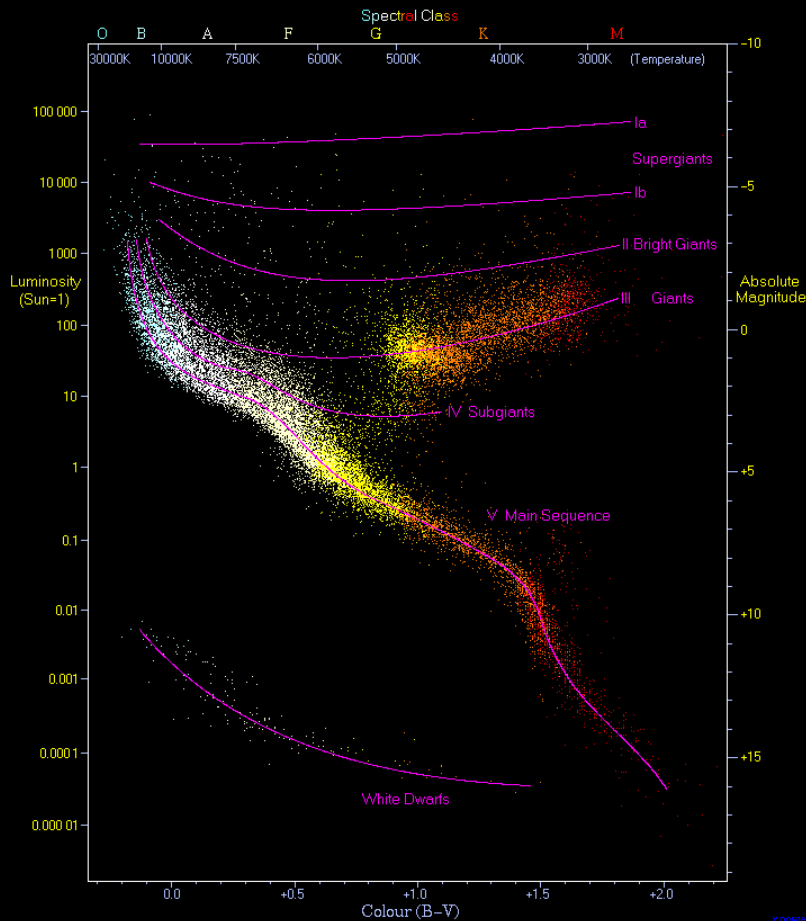


항성이란 중력과 핵융합에 의한 반발력이
균형을 이루고 있는 상태를 말합니다.

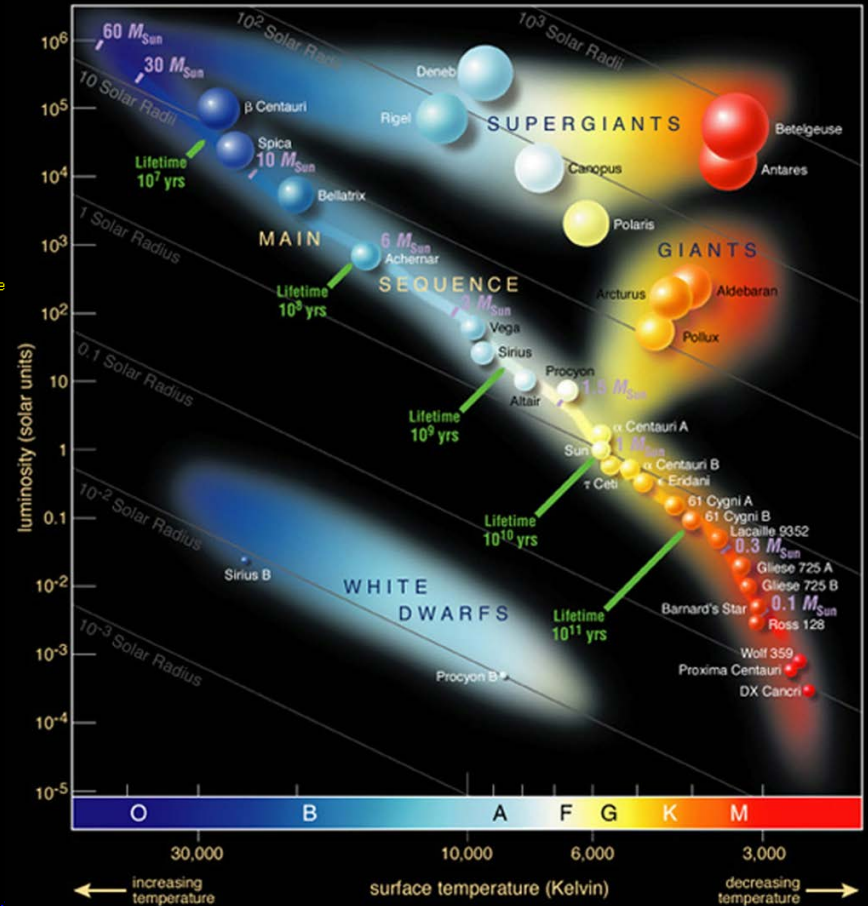
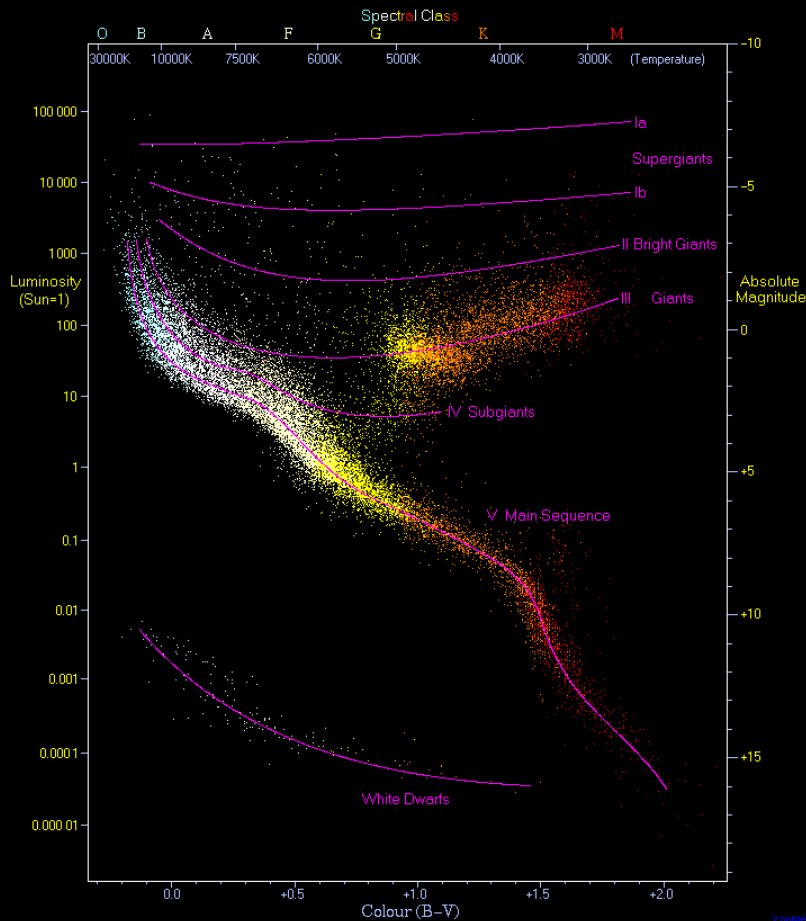
이러한 균형의 조건으로부터
경험적으로 측정된 질량-광도 관계와
광도-색(온도) 관계를
설명할 수 있게 됩니다.



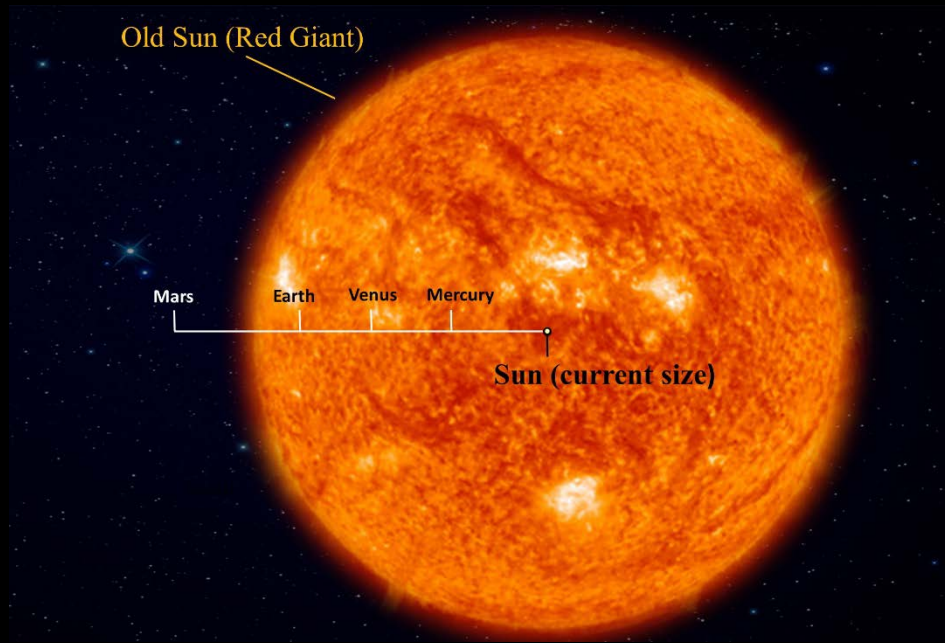
HR 다이어그램의 또 다른 특징은
주계열성 이외에 다른 별들이 있다는 것이었습니다.



온도가 낮지만 밝은 별은 크기가 커야 합니다.
이것을 적색 거성 red giant 이라고 부릅니다.



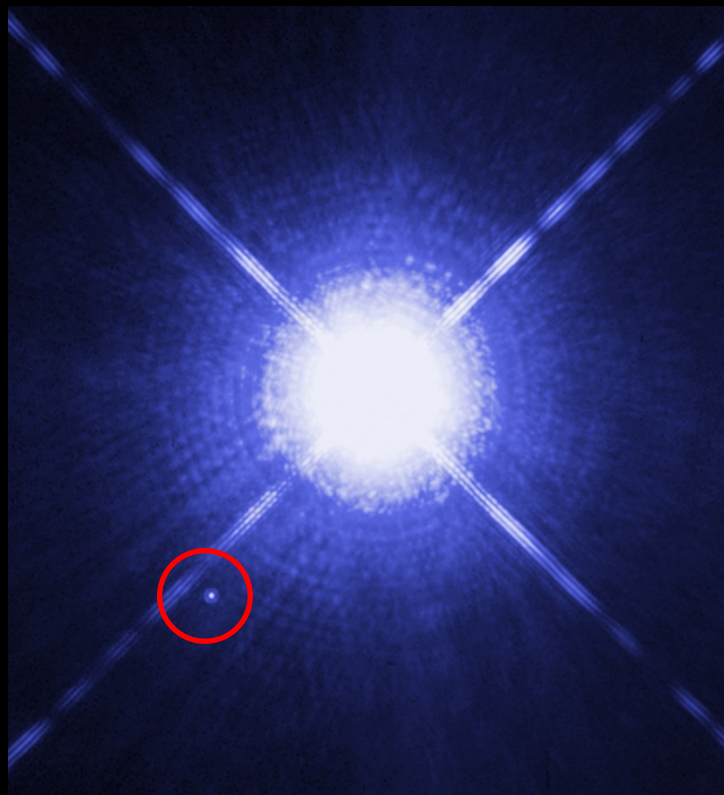
반대로 온도가 높지만 어두운 별은 크기가 작아야 합니다.
이것을 **백색 왜성** white dwarf이라고 합니다.



항성에서 핵융합으로 수소를 소모하고 나면
중력에 의해서 수축을 합니다.

수축에 의해 새로운 핵 반응이 일어나면서
복잡한 과정에 의해 바깥쪽으로 물질을 밀어내게 됩니다.

결과적으로 항성은 거대해지면서 서서히 식어가게 됩니다.
이것을 적색거성이라고 합니다.



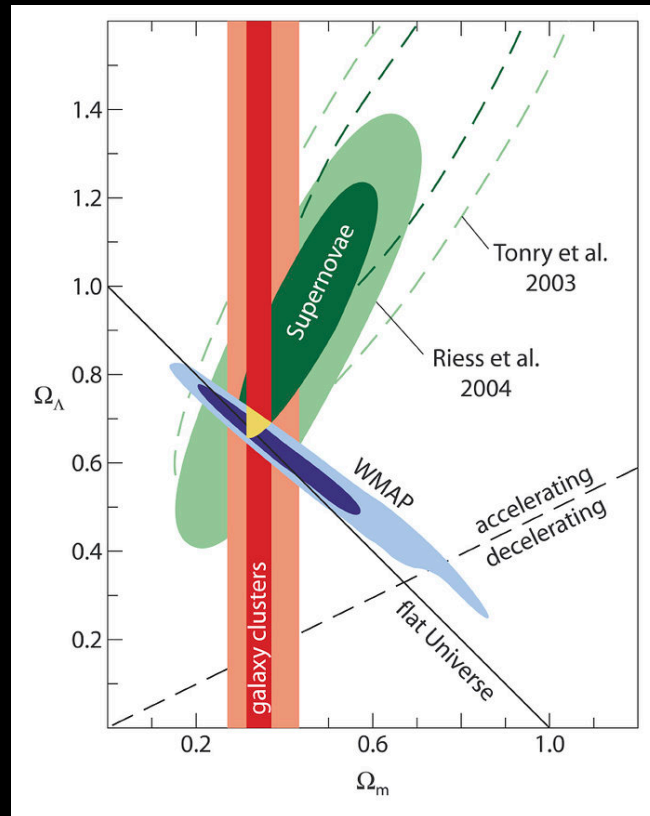
모든 핵융합의 연료를 소모하고 나서
적색거성의 바깥쪽의 물질들이 밖으로 흩어지고 나면
그 중심에는 전자의 **축퇴압**과 **중력**이 평형을 이룬
백색 왜성이 남게 됩니다.



그러나 질량이 조금 더 커서 **찬드라세카 한계**보다 커진다면, 중력에 의해 내부에서 전자-양성자의 반응이 일어나게 되고 **초신성 폭발**을 일으키게 됩니다.



초신성 폭발 이후에는
내부에 **중성자별**neutron star이 남거나
블랙홀black hole이 남게 됩니다.



우리는 초신성 폭발이 일어나는 시점인
찬드라세카 한계에 대해서 잘 알고 있기 때문에,
초신성 폭발은 우주 먼 곳까지의 거리를 측정하는
좋은 방법을 제공합니다.

감사합니다