

제20강

양자기체와 응축

이번 장에서는 양자 기체를 자세히 다루며
우리가 관측할 수 있는 효과를 살펴보겠습니다.

$$Z = \prod_k Z_k^{2S+1}$$

$$Z_k = \left(1 \pm e^{-\beta(E_k - \mu)}\right)^{\pm 1}$$

상호작용이 **없는** 양자 유체의 분배 함수:
스핀 S 에 대해 $2S + 1$ 개의 상태가 가능합니다.

$$\Phi = -kT \ln \mathcal{Z}$$

$$= \mp kT (2S + 1) \sum_k \ln \mathcal{Z}$$

$$= \mp kT \int_0^\infty \ln(1 \pm e^{-\beta(E-\mu)}) g(E) dE$$

큰 퍼텐셜은 위와 같이 쓸 수 있습니다.

$$\Phi = -kT \ln \mathcal{Z}$$

$$= \mp kT (2S + 1) \sum_k \ln \mathcal{Z}$$

$$= \mp kT \int_0^\infty \ln(1 \pm e^{-\beta(E-\mu)}) g(E) dE$$

여기에서 상태 밀도는 다음과 같습니다.

$$g(k)dk = \frac{(2S + 1)Vk^2 dk}{2\pi^2}$$

$$\Phi = -kT \ln \mathcal{Z}$$

$$= \mp kT (2S + 1) \sum_k \ln \mathcal{Z}$$

$$= \mp kT \int_0^\infty \ln(1 \pm e^{-\beta(E-\mu)}) g(E) dE$$

에너지에 대해서 다시 표현하면 아래와 같습니다.

$$g(E)dE = \frac{(2S + 1)VE^{1/2}dE}{(2\pi)^2} \left(\frac{2m}{\hbar}\right)^{3/2}$$

$$N = \left[\frac{(2S + 1)V}{(2\pi)^2} \left(\frac{2m}{\hbar} \right)^{\frac{3}{2}} \right] \int_0^\infty \frac{E^{1/2} dE}{z^{-1} e^{\beta E} \pm 1}$$

$$E = \left[\frac{(2S + 1)V}{(2\pi)^2} \left(\frac{2m}{\hbar} \right)^{\frac{3}{2}} \right] \int_0^\infty \frac{E^{3/2} dE}{z^{-1} e^{\beta E} \pm 1}$$

그 밖의 몇 가지 열역학적 양들을 위와 같이 구할 수 있습니다.
여기에서 $z \equiv e^{\beta\mu}$ 를 **푸가시티**fugacity라고 합니다.

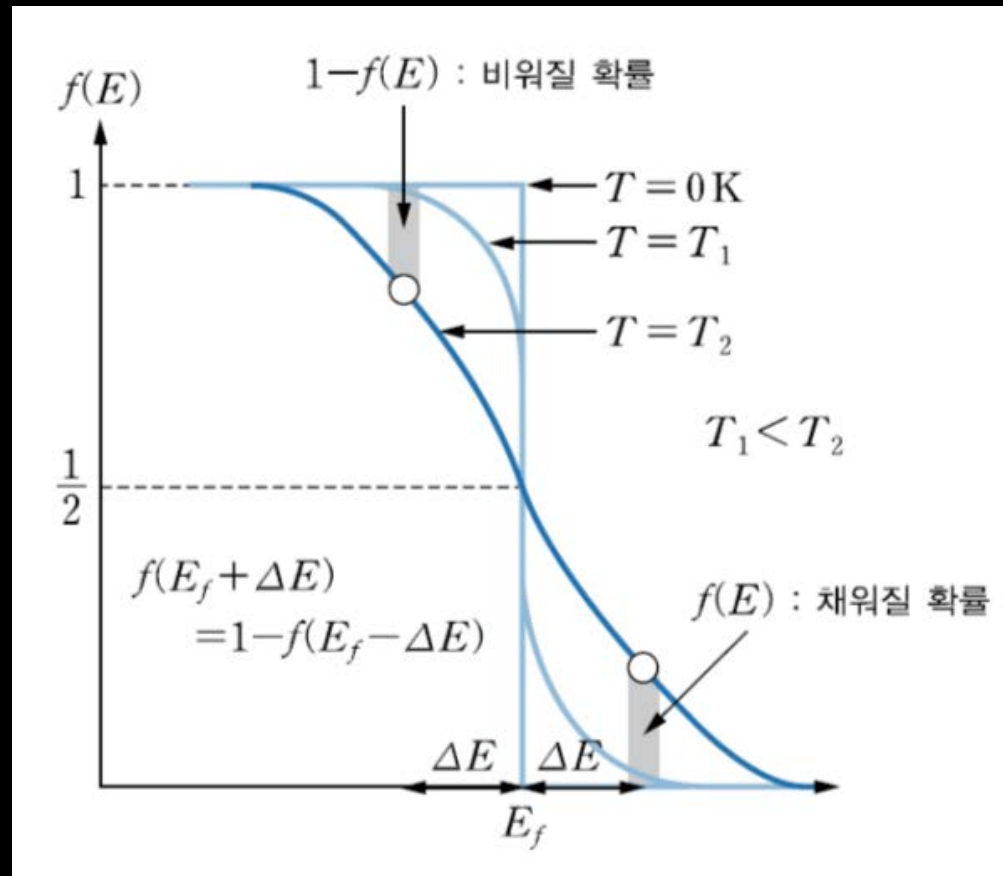
$$N = \frac{(2S + 1)V}{\lambda_{th}^3} [\mp Li_{3/2}(\mp z)]$$

$$E = \frac{3}{2} kT \frac{(2S + 1)V}{\lambda_{th}^3} [\mp Li_{5/2}(\mp z)]$$

$$\Phi = -\frac{2}{3} E$$

이 적분은 폴리로가리즘 polylogarithm 함수를 사용해
좀 더 간단하게 표현이 가능합니다.

먼저 저온에서 페르미 기체의 특성에 대해 살펴보겠습니다.



저온 영역에서 페르미-디랙 분포는 계단 함수가 됩니다.
따라서 입자는 특정 에너지(페르미 에너지) 이하로만 존재합니다.

$$N = \int_0^{k_F} g(k) d^3 k$$

전자를 k -공간에 채워나가면
절대 영도에서 입자의 개수는 위와 같이 표현됩니다.
여기에서 k_F 는 페르미 파수 벡터라고 합니다.

$$N = \frac{(2S + 1)V}{2\pi^2} \frac{k_F^3}{3}$$

위의 식을 적분하면 입자의 개수를 페르미 파수 벡터로 표현할 수 있습니다.

$$k_F = \left[\frac{6\pi^2 n}{2S + 1} \right]^{1/3}$$

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{6\pi^2 n}{2S + 1} \right]^{2/3}$$

따라서 페르미 파수 벡터 또는 페르미 에너지는
입자의 밀도로 위와 같이 표현됩니다.

$$\langle E \rangle = \frac{\int_0^{E_F} E g(E) dE}{\int_0^{E_F} g(E) dE} = \frac{3}{5} E_F$$

이제 각 입자 에너지의 기댓값($E = N\langle E \rangle$)을 계산해보면
절대 0도에서는 위와 같이 표현됩니다.

$$p = \frac{2E}{3V}$$

$$B = -V \frac{\partial p}{\partial V} = \frac{2}{3} n E_F$$

이것으로부터 위와 같이 압력과 부피탄성률을 계산할 수 있습니다.

페르미 에너지 및 입자의 개수와 에너지 등에 대한 논의는
상대론적 입자 및 다른 차원의 입자에 대한 경우로
확장할 수 있습니다.

또한, 온도 의존성에 대한 것도 섭동적으로 계산할 수 있습니다.

이제 저온에서 보즈 기체의 특성에 대해 살펴봅시다.

$$N = \frac{(2S + 1)V}{\lambda_{th}^3} [Li_{3/2}(z)]$$

$$E = \frac{3}{2} kT \frac{(2S + 1)V}{\lambda_{th}^3} [Li_{5/2}(z)]$$

보즈 기체의 경우 입자의 개수와 에너지는 위와 같습니다.

$$N = \frac{(2S + 1)V}{\lambda_{th}^3} \zeta\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$E = \frac{3}{2} kT \frac{(2S + 1)V}{\lambda_{th}^3} \zeta\left(\frac{5}{2}\right)$$

특히 화학 퍼텐셜이 0인 경우, 위와 같이 간단해집니다.

$$\Phi = -kT \ln \mathcal{Z}$$

$$= \mp kT (2S + 1) \sum_k \ln \mathcal{Z}$$

$$= \mp kT \int_0^\infty \ln(1 \pm e^{-\beta(E-\mu)}) g(E) dE$$

광자의 경우 스핀은 1이며, 위와 같이 겹침 인자를 생각합니다.

$$g(E) dE = \frac{VE^2}{\pi^2 \hbar^3 c^3} dE$$

$$E = \frac{V\pi^2}{15\hbar^3 c^3} (kT)^4$$

따라서 에너지는 위와 같이 계산됩니다.
이것은 흑체 복사의 관계식과 일치합니다.

$$N = \frac{(2S + 1)V}{\lambda_{th}^3} \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \propto T^{3/2}$$

아무튼 비상대론적 입자에 대한 위의 식에서
온도가 낮아지게 되면 위의 식을 만족시킬 수 없는 경우가 생깁니다.
이 때의 온도를 임계온도 T_c 라고 합니다.

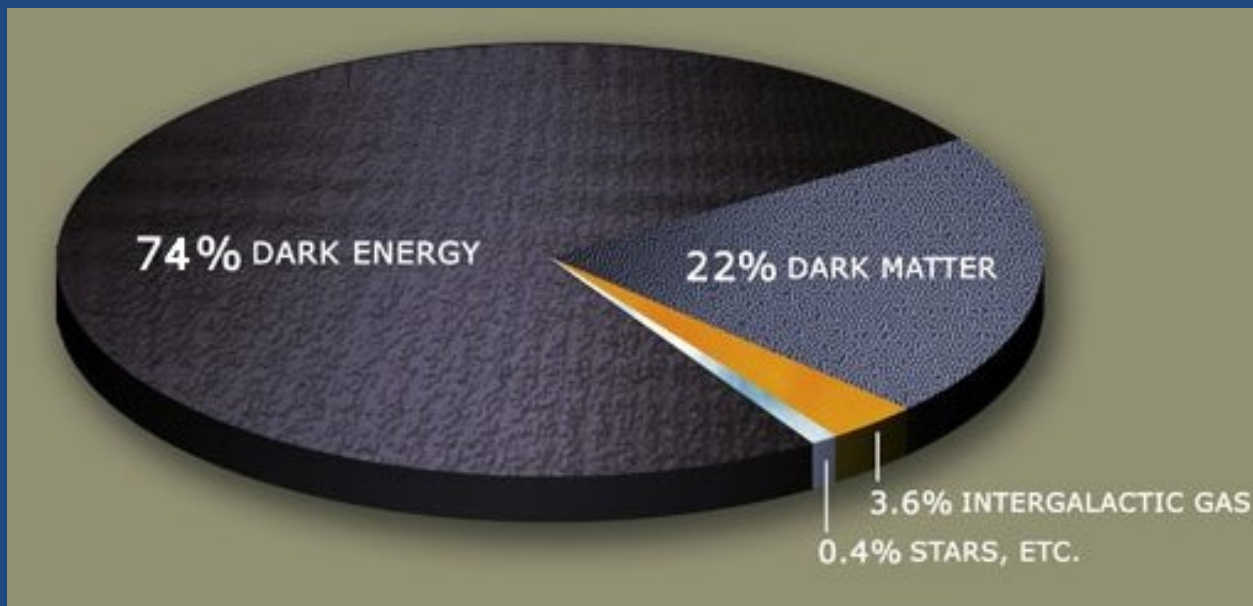
$$\frac{n_0}{n} = \frac{n - n_1}{n} = 1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^{\frac{3}{2}}$$

이 경우에 우리는 임계 온도 이하에서
 모든 입자들이 바닥상태에 몰리게 된다고 해석하게 됩니다.
 이것을 보즈-아인슈타인 응축 Bose-Einstein condensation 이라고 합니다.

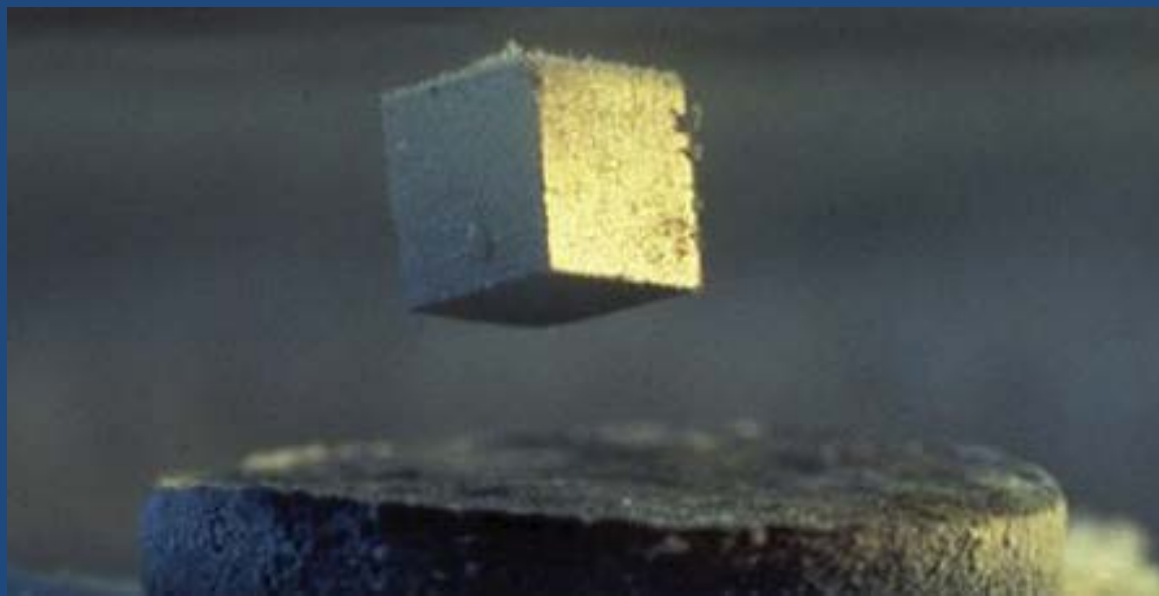
보즈-아인슈타인 응축condensation

Bose - Einstein Condensation

임계온도 이하에서 모든 보존들이 바닥상태에 놓이게 되면 개별 입자가 아니라 입자들이 응축된 하나의 장치럼 보이게 됩니다.



우주의 암흑물질도 보즈-아인슈타인 응축된
어떤 물질에 의한 것이 아닐까 하는 추정도 있습니다.



페르미온의 경우에는 보즈-아인슈타인 응축은 존재하지 않지만
 쿠퍼 쌍Cooper pair의 형성에 의해
초전도 현상superconductivity이 일어날 수 있습니다.

감사합니다