

개요

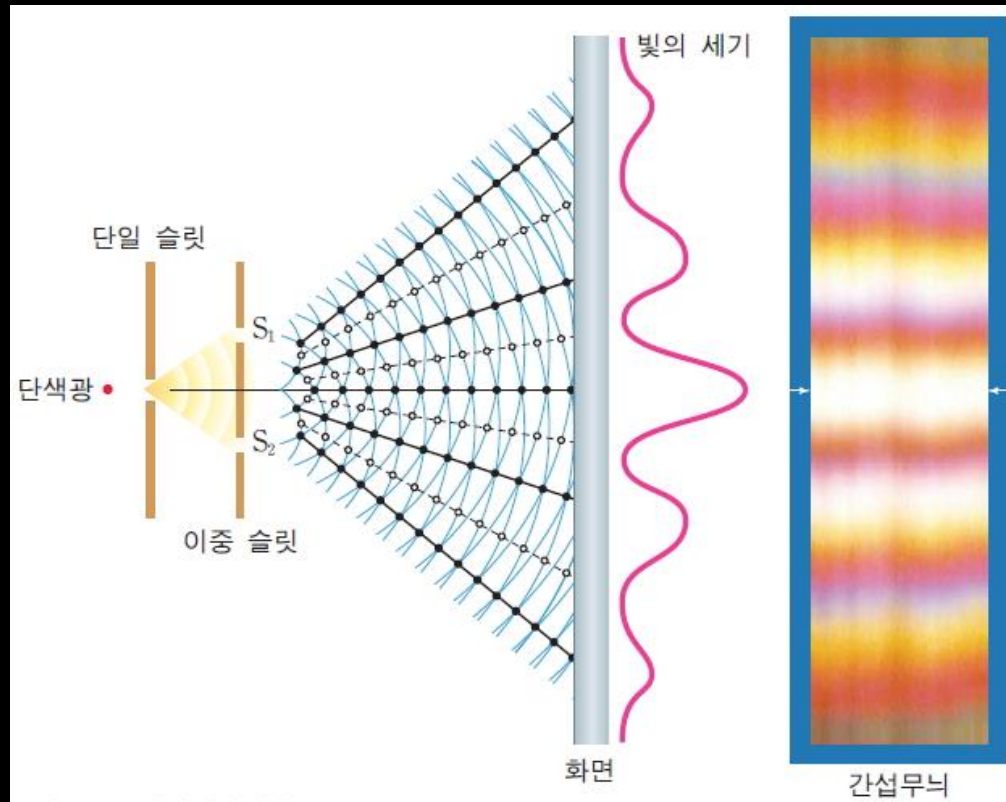
양자역학으로 가는 길

양자quantum란 무슨 뜻일까요?

양자^{quantum}란 무슨 뜻일까요?

양자화^{quantized}란 말은
뭔가가 불연속적이라는 것을 의미합니다.

연속적이라고 믿어졌던 것으로부터
불연속적인 것을 찾아냈던 역사를
먼저 되짚어보도록 합시다.



빛은 파동입니다.
그러나?!

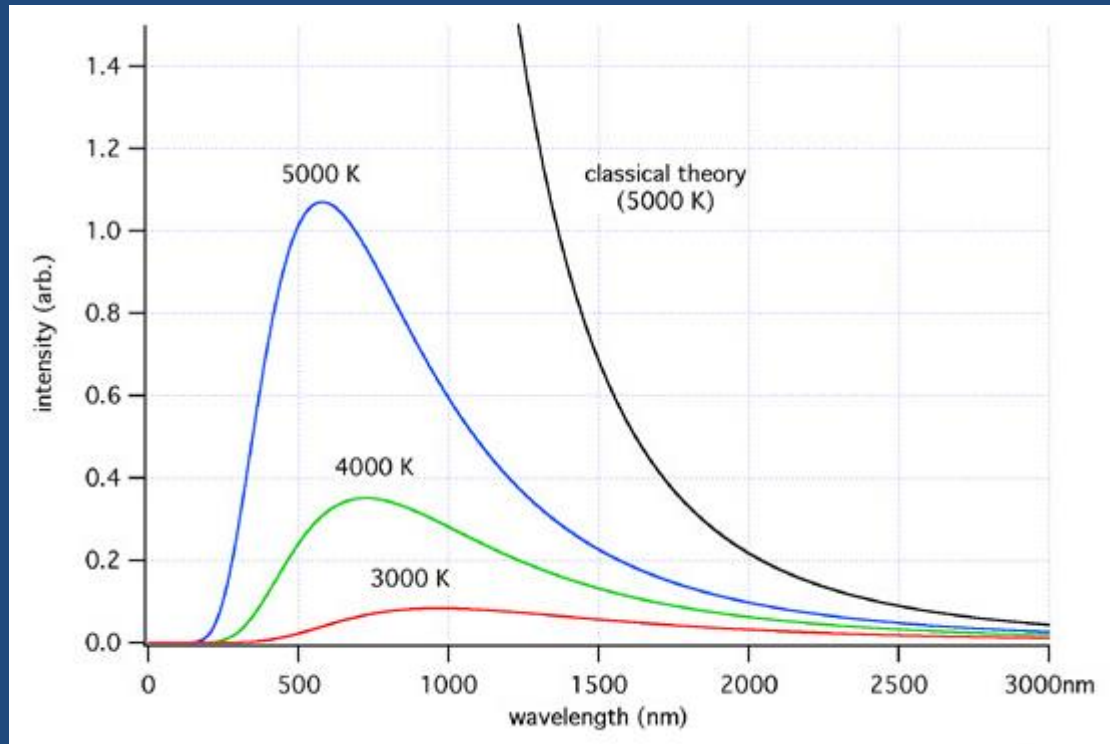
1. 플랑크의 흑체복사blackbody radiation 법칙

흑체 복사



흑체black body란 입사하는 모든 전자기 복사를 흡수하고,
열평형 상태에서는 온도에 따라 에너지를 방출하는
이상적인 물체입니다.

흑체 복사



흑체가 복사하는 에너지는 다음과 같은 분포를 나타내게 됩니다.

흑체 복사

$$u(\nu, T) = (\text{mode number for } \nu) \times \langle E(\nu) \rangle$$

많은 학자들은 위와 같은 방법으로 이 분포(주어진 진동수에 대해 방출되는 에너지 밀도)를 유도하고자 했습니다.

흑체 복사

$$u(\nu, T) = (\text{mode number for } \nu) \times \langle E(\nu) \rangle$$

에너지의 기댓값 $\langle E(\nu) \rangle$ 은 열평형 상태에서
주어진 진동수의 파동이 가지는 에너지의 기댓값을 말합니다.

흑체 복사

$$u(\nu, T) = (\text{mode number for } \nu) \times \langle E(\nu) \rangle$$

모드 수 mode number는 주어진 진동수 ν 를 갖는 파동이
단위 부피당 몇 개나 허용되는가에 대한 것입니다.

흑체 복사

$$u(\nu, T) = (\text{mode number for } \nu) \times \langle E(\nu) \rangle$$

따라서 둘을 곱하면 주어진 진동수에 대해 열평형상태에서
흑체가 방출하는 에너지의 밀도를 구할 수 있습니다.

흑체 복사

$$\langle E(\nu) \rangle = \frac{\int_0^\infty E e^{-E/kT} dE}{\int_0^\infty e^{-E/kT} dE} = kT$$

예를 들어, 에너지가 볼츠만 분포를 따른다면,
실험적으로 얻은 결과를 설명할 수 없게 됩니다.
(레일리-진스 Rayleigh-Jeans 법칙)

흑체 복사

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

흑체복사를 연구하던 플랑크_{Planck}는 우연히 이 분포가 다음과 같은 식에 의해 설명된다는 것을 발견하게 됩니다.

흑체 복사

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

문제는 위의 식을 어떻게 유도하는가 하는 부분입니다.

흑체 복사

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} nh\nu e^{-nh\nu/kT}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nh\nu/kT}}$$

같은 식을 위와 같이 바꿔봅시다.
이것은 $E_n = nh\nu$ 로 양자화된 광자들이
볼츠만 인자만큼의 확률을 가질 때
이에 대한 에너지의 기댓값 $\langle E_n \rangle$ 으로 해석됩니다.

흑체 복사

$$\begin{aligned} u(\nu, T) &= (\text{mode number for } \nu) \times \langle E_n \rangle \\ &= (\text{mode number for } \nu) \times h\nu \langle n \rangle \end{aligned}$$

즉, 위와 같이 이해할 수 있습니다.

흑체 복사

$$\begin{aligned} u(\nu, T) &= (\text{mode number for } \nu) \times \langle E_n \rangle \\ &= (\text{mode number for } \nu) \times h\nu \langle n \rangle \end{aligned}$$

이것은 빛이 양자화되어 있다는 것에 대한 한 가지 증거가 됩니다.

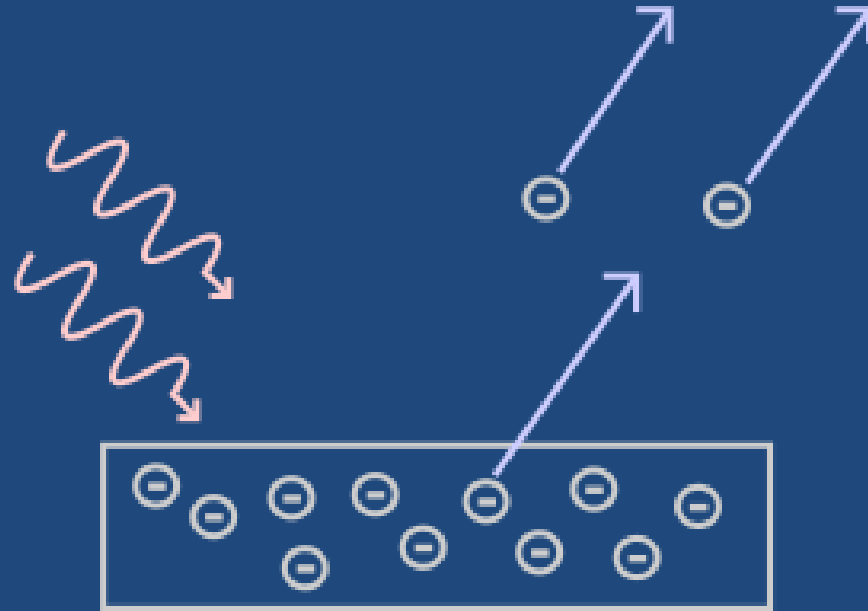
흑체 복사

$$P = \frac{c}{4} A \int_0^{\infty} dv u(\nu, T) = aAT^4$$

더 나아가서 플랑크 분포는
흑체가 시간당 방출하는 에너지에 대한
슈테판-볼츠만Stefan-Boltzmann 법칙과 비례 상수를 설명해줍니다.

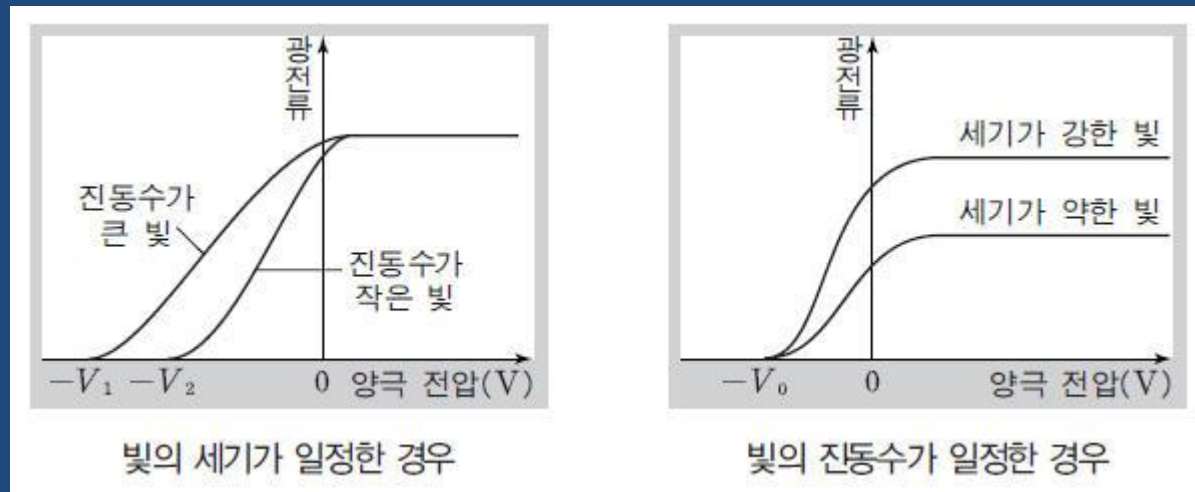
2. 광전 효과 photoelectric effect

광전 효과



광전 효과는 금속이 **전자기파**를 흡수했을 때 **전자**를 내보내는 현상입니다.

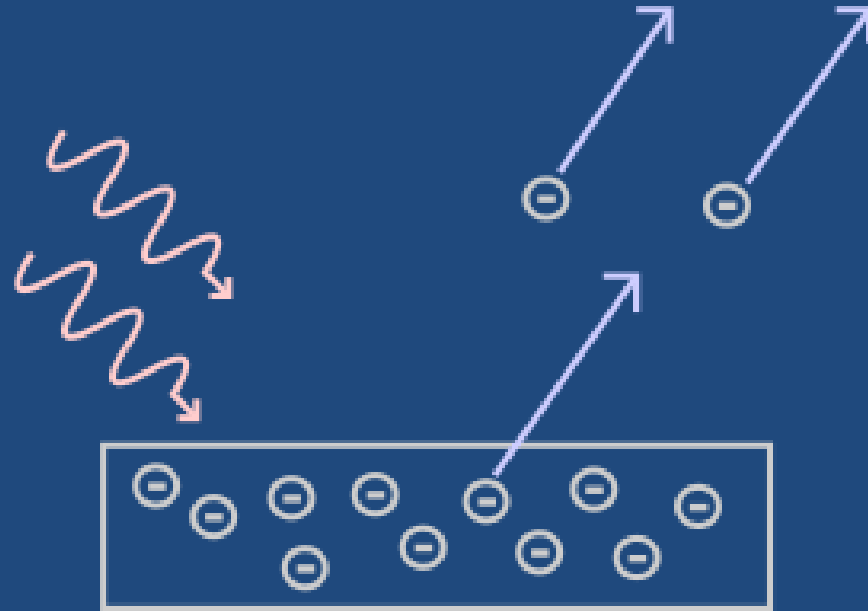
광전 효과



광전 효과의 특징은 다음과 같습니다.

1. 빛을 아무리 강하게 보내도
특정 진동수 이상이 아니면 전자가 방출되지 않는다.
2. 특정 진동수 이상이 되면
입자의 운동에너지는 진동수에 비례한다.

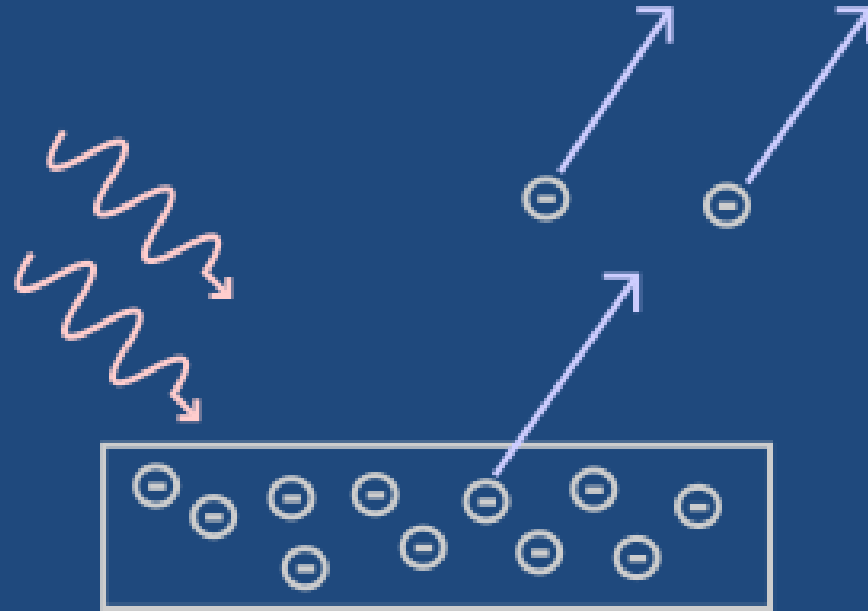
광전 효과



아인슈타인은 이 문제를 다음과 같은 아이디어로 간단하게 해결합니다.

“빛의 에너지에는 양과 질이 있다.”

광전 효과



아인슈타인은 이 문제를 다음과 같은 아이디어로 간단하게 해결합니다.

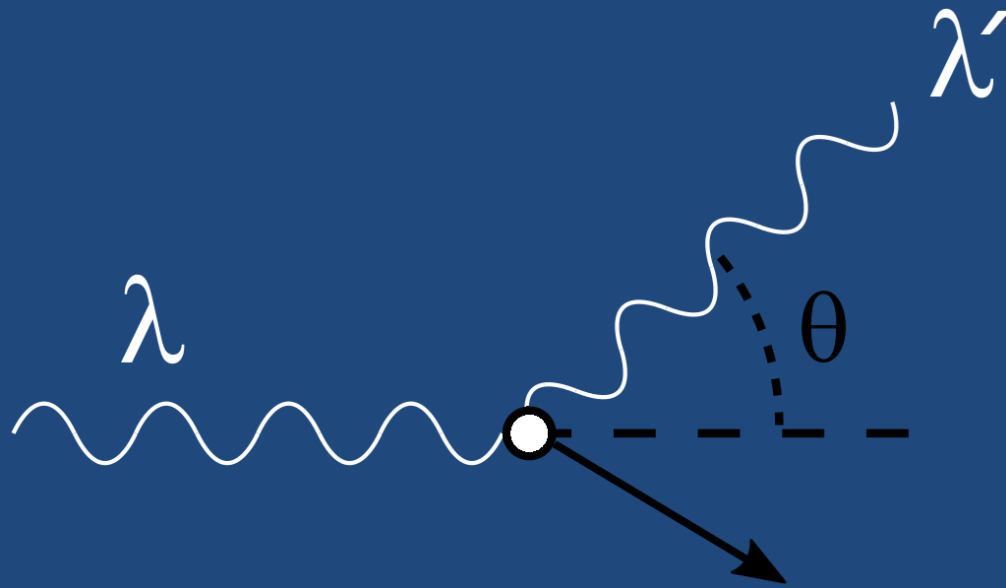
$$E = nh\nu$$

빛의 양과 질?



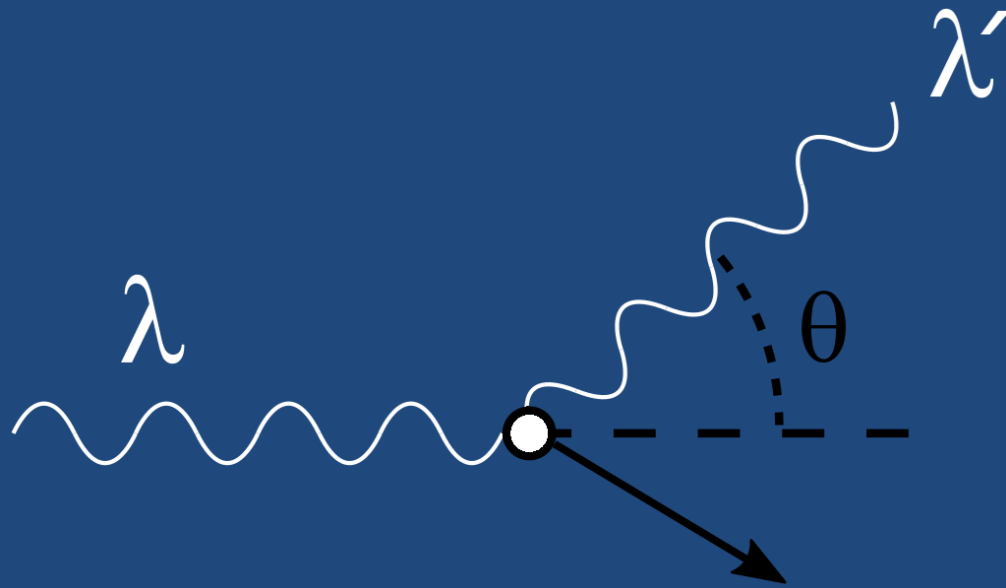
3. 콤프턴 효과 Compton effect

콤프턴 효과



콤프턴 효과는 빛과 전자의 산란^{scattering} 과정에 대한 것입니다.

콤프턴 효과



입자의 산란을 설명하기 위해서는,
에너지 보존과 운동량 보존을 가정해야 합니다.

콤프턴 효과

$$h\nu + m_e c^2 = h\nu' + \sqrt{(p_{e'}c)^2 + (m_e c^2)^2}$$

$$\mathbf{p}_\gamma = \mathbf{p}_{\gamma'} + \mathbf{p}_{e'}$$

$$p_\gamma c = h\nu, \quad p_{\gamma'} c = h\nu'$$

여기에서 어떻게 에너지와 운동량을 정의했는지 봅시다.

콤프턴 효과

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta)$$

앞의 두 방정식에서 p_e' 을 소거하면 위와 같은 식을 얻게 됩니다.

이것은 특수상대론과 함께 양자론을 검증해 줍니다.

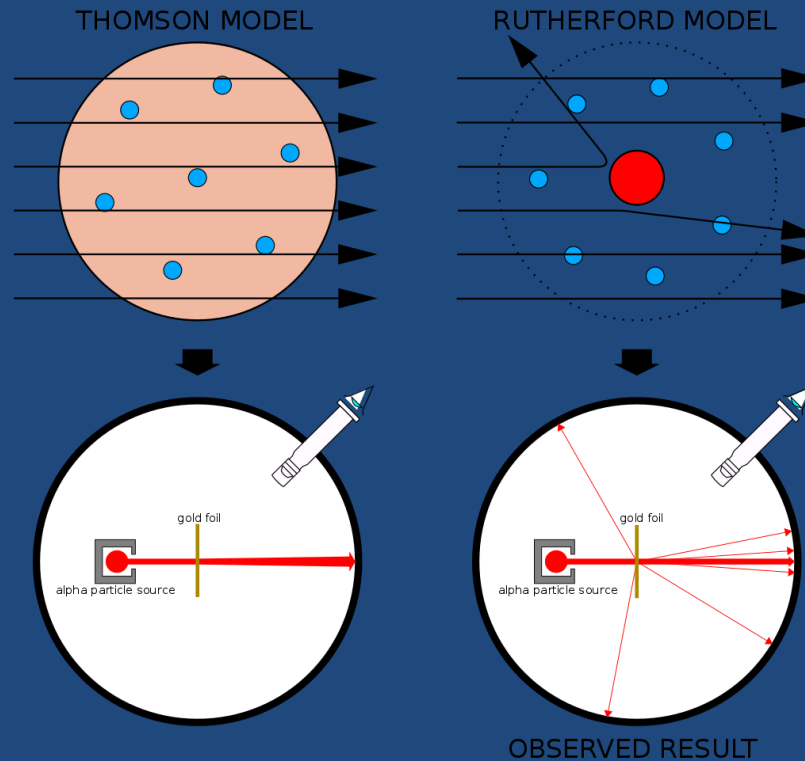
$$E = nh\nu$$

따라서 빛은 파동이지만 동시에
양자화된 입자라고 해석해야 합니다.

이번에는 반대로
불연속적이라고 믿어졌던 것으로부터
연속적인 것을 찾아냈던 역사를
찾아봅시다.

1. 러더퍼드의 산란실험

러더퍼드의 산란실험



러더퍼드는 1911년 α 입자(헬륨 원자핵)를 금박에 산란시키는 실험을 합니다. 이것은 원자의 내부 구조를 확인하기 위한 것이었습니다.

러더퍼드의 산란실험

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4E_0} \right)^2 \frac{1}{(\sin \theta/2)^4}$$

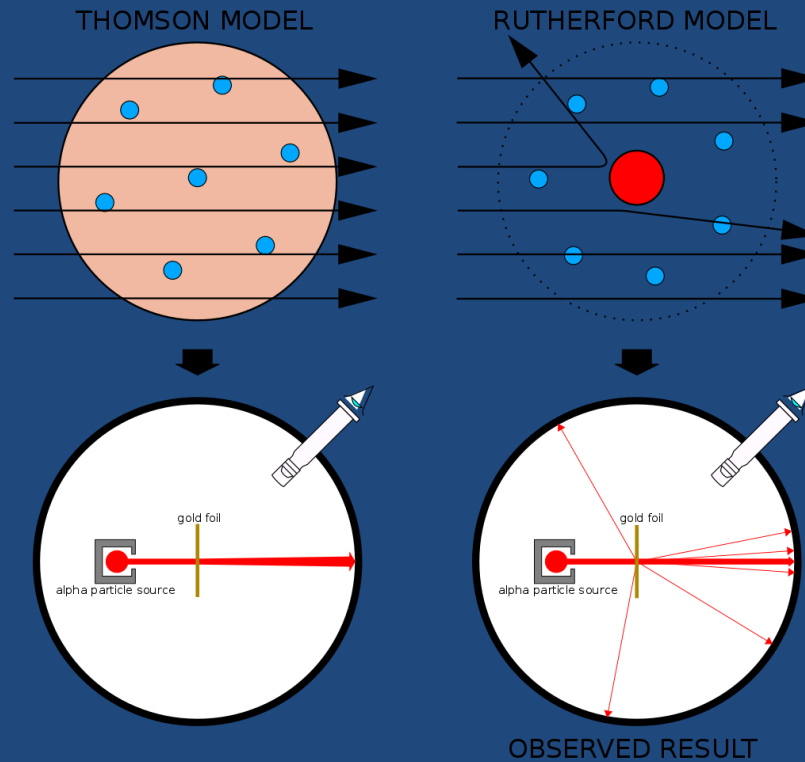
고전역학의 계산을 통해, 미분산란단면적 differential scattering cross section은
위와 같이 주어집니다.

러더퍼드의 산란실험

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4E_0} \right)^2 \frac{1}{(\sin \theta/2)^4}$$

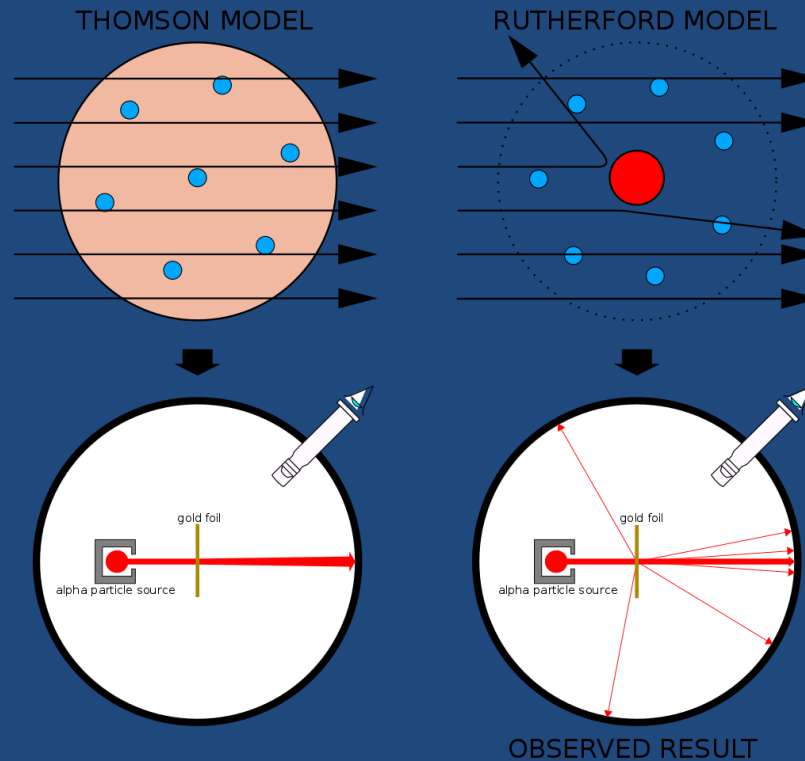
즉 산란이 일어나면, 산란된 대상의 단면적이 위의 식으로부터 얻어진다는 것입니다.

러더퍼드의 산란실험



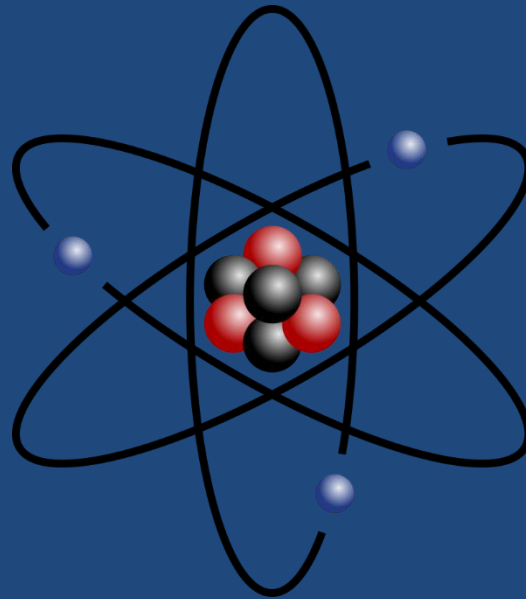
러더퍼드의 중요한 발견은 산란되는 입자가 작지만
존재한다는 것이었습니다.

러더퍼드의 산란실험



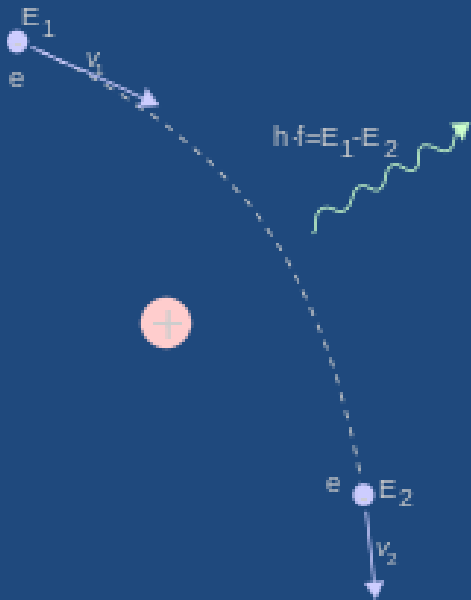
“이 현상은 화장지 조각에 15인치 포탄을 발사했는데 반사되어 돌아온 것만큼 놀라운 일입니다.”

러더퍼드의 산란실험



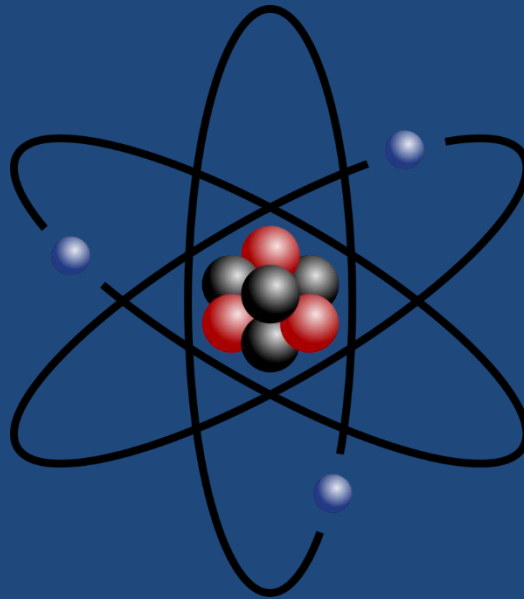
따라서 우리는 원자의 중심에 **양의 전하**를 가지는 **핵**_{nucleus}이 존재한다는 것을 발견하게 됩니다.

러더퍼드의 산란실험



그런데 가속하는 전자는 반드시 에너지를 방출하게 되어
전자의 궤도가 안정적일 수 없게 됩니다.

러더퍼드의 산란실험

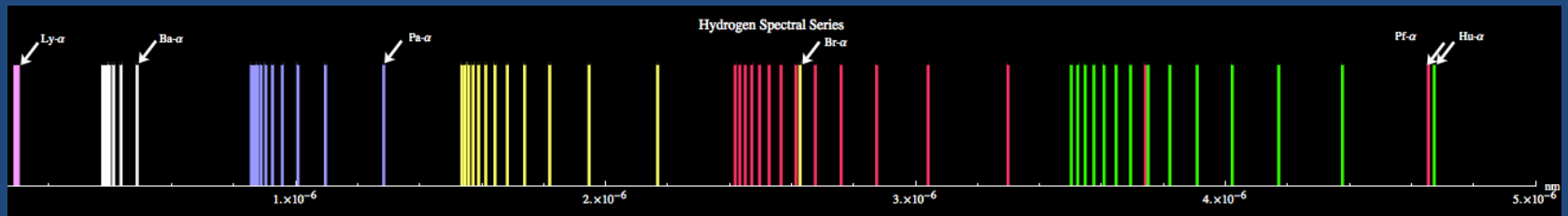


따라서 이 모델에 대한 보완적인 설명이 필요합니다.

2. 리드베리Rydberg 공식

리드베리 공식

$$\frac{1}{\lambda} = RZ^2 \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right)$$

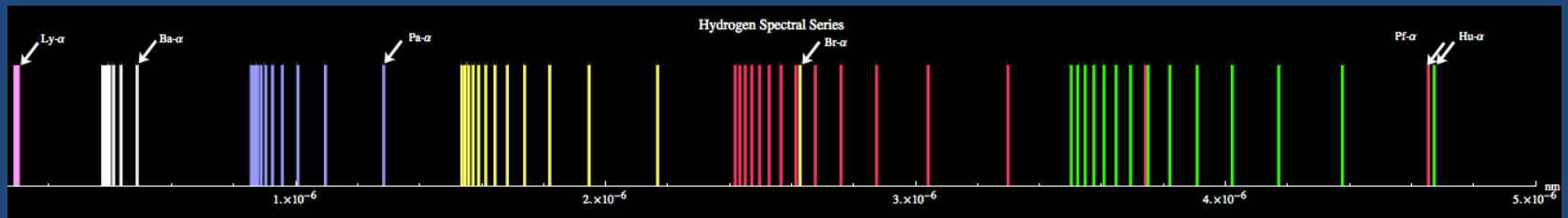


리드베리는 1888년, 원자에서 방출되는 빛의 파장이 다음과 같이 표현된다는 것을 확인합니다.

리드베리 공식

manpa eller diffusa uav
nder formen $\frac{N_0}{(m_1 + c_1)^2}$ fin

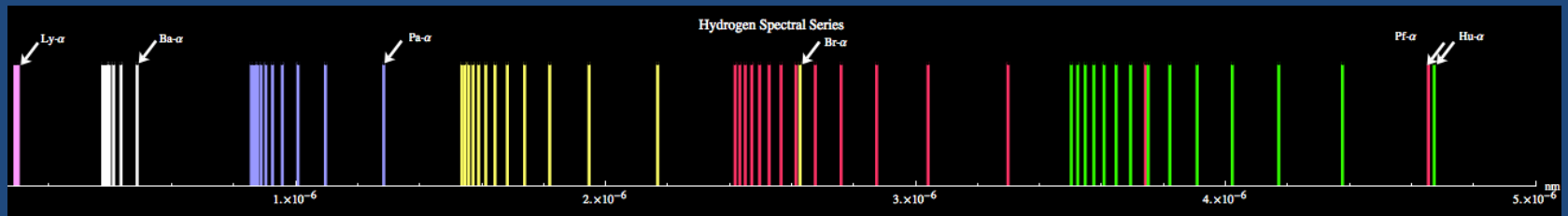
$$\frac{n}{N_0} = \frac{1}{(m_1 + c_1)^2} - \frac{1}{(m_2 + c_2)^2}$$



리드베리는 1888년, 원자에서 방출되는 빛의 파장이 다음과 같이 표현된다는 것을 확인합니다.

리드베리 공식

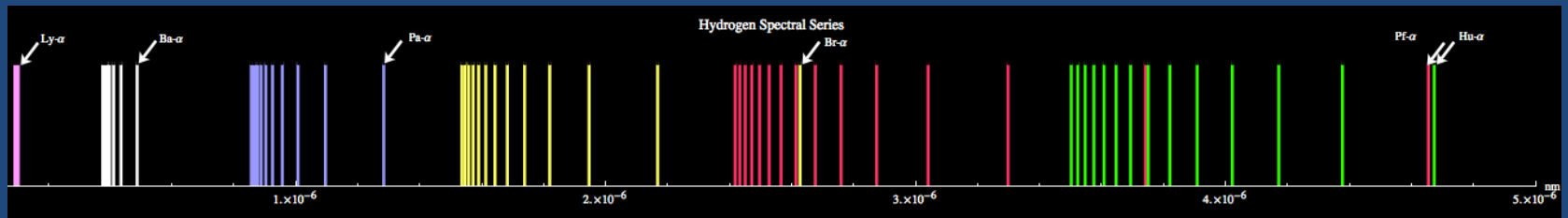
$$\frac{1}{\lambda} = RZ^2 \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right)$$



흥미로운 것은 n_1 과 n_2 가 정수라는 것입니다.

리드베리 공식

$$\frac{1}{\lambda} = RZ^2 \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right)$$



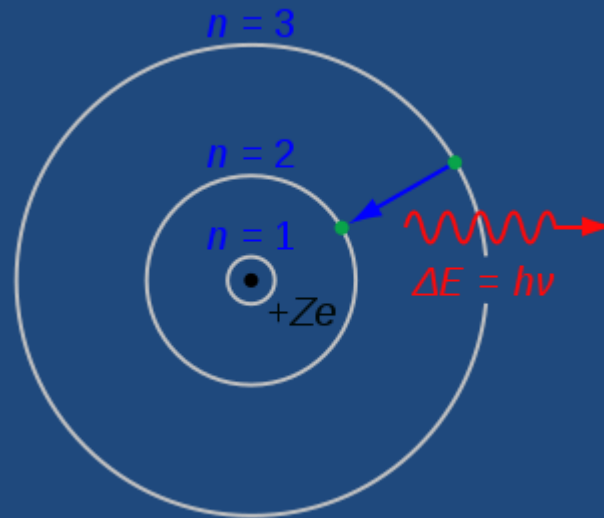
이 결과 역시 원자의 내부에는 우리가 아직 모르는
불연속적 구조가 존재한다는 것을 의미합니다.

보어 모델 Bohr model



닐스 보어

보어 모델이란?



앞에서와 같은 현상을 설명하기 위해, 1913년 무렵
보어는 전자 궤도의 불연속성을 가정합니다.

보어 모델이란?

$$L = mvr = n\hbar$$

여기에서 가장 중요한 것은 **각운동량의 양자화**입니다.

보어 모델이란?

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{Zke^2}{r^2} \quad v = \sqrt{\frac{Zke^2}{mr}}$$

(구심력 = 중심력)의 관계로부터, 전자 속도의 조건을 얻습니다.

보어 모델이란?

$$r_n = \frac{n^2 \hbar^2}{mZke^2}$$

이 속도에 양자화 조건을 고려하면
양자화된 궤도 반지름을 얻게 됩니다.

보어 모델이란?

$$E_n = -\frac{1}{2}mv_n^2 = -\frac{Zke^2}{2r_n}$$

이것으로 전자의 에너지를 계산합니다.

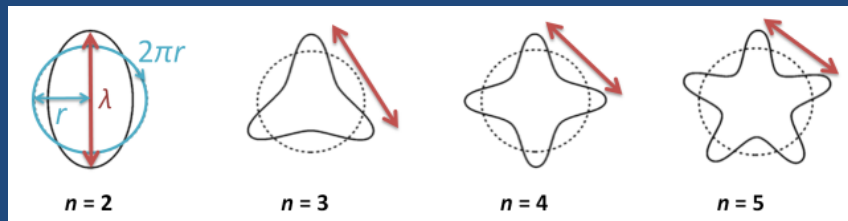
보어 모델이란?

$$E_n = -\frac{mZ^2k^2e^4}{2\hbar^2n^2} = -R_E \frac{Z^2}{n^2}$$

여기에서 리드베리 공식과 정확한 상수를 다시 유도할 수 있게 됩니다. ($R = R_E/hc$)

물질파

$$mv = \frac{nh}{2\pi r} = \frac{h}{\lambda}$$



또 한 가지 중요한 통찰을 얻을 수 있는데,
그것은 전자도 파동으로 생각해야 한다는 것입니다.

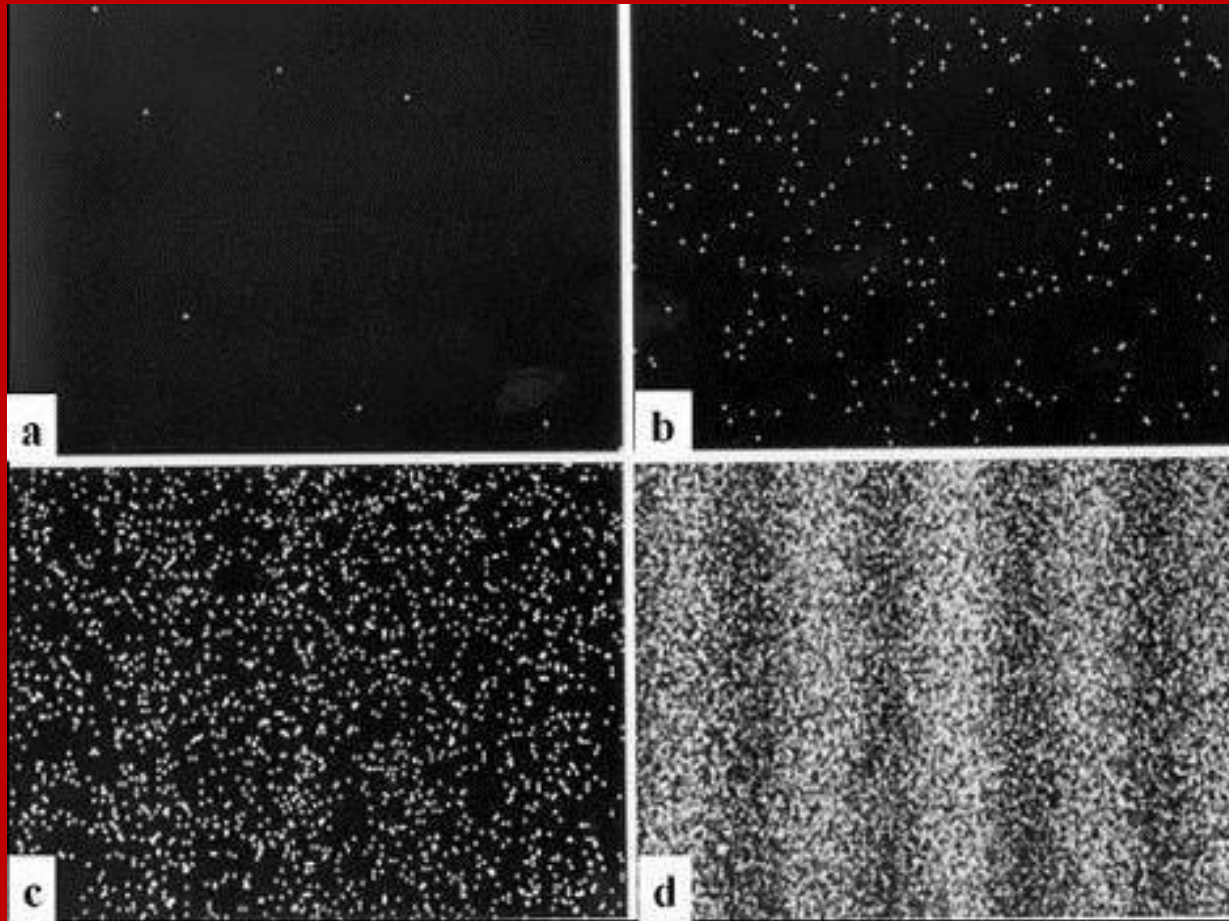
물질파

$$mv = \frac{nh}{2\pi r} = \frac{h}{\lambda}$$

이것을 물질파matter wave,
그리고 $\lambda = h/p$ 를 드브로이 파장de Broglie wave length이라고 부릅니다.

따라서 우리는 빛은 파동이지만 입자이고,
전자는 입자이지만 파동이라는 것을 알게 되었습니다.

이렇게 서로 양립할 수는 없지만 공존하는 개념을
보여는 입자와 파동의
상보성complementarity이라고 불렀습니다.



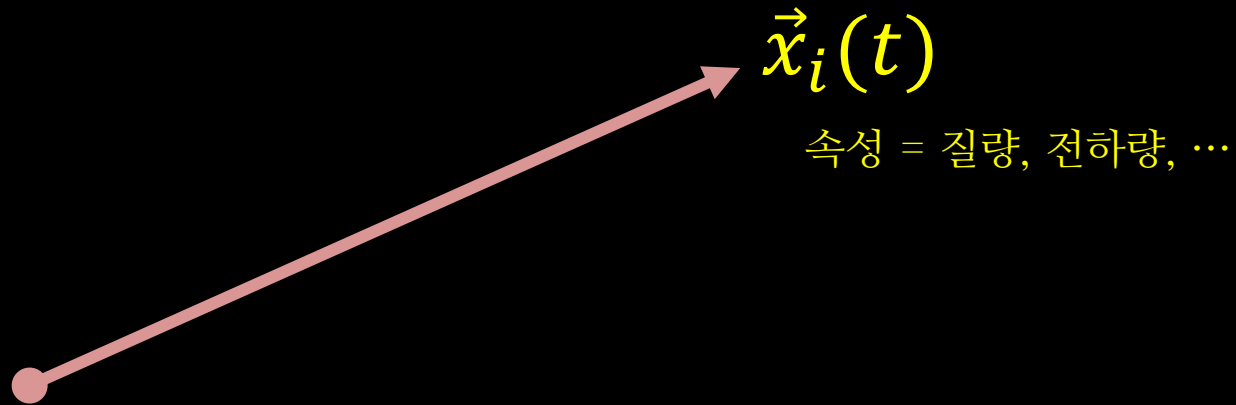
전자의 이중슬릿 실험

양자론의 기본적인 아이디어들은
실험을 통해서 얻어졌습니다.

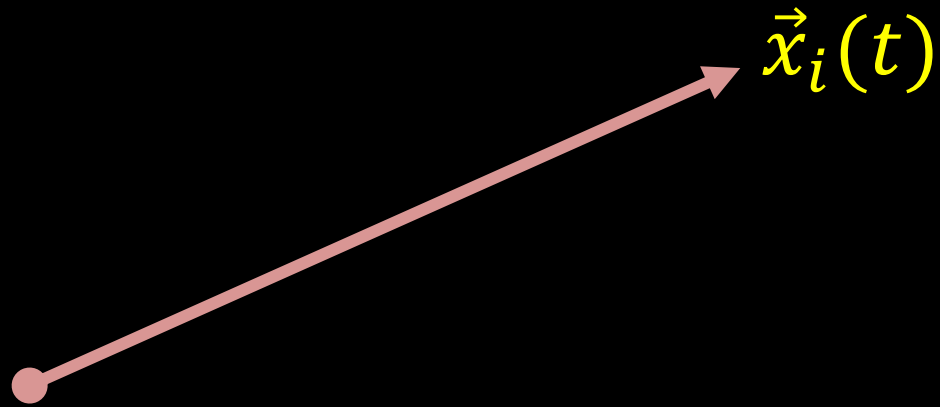
그러나 좀 더 정합적으로 기술하기 위해서는
좀 더 체계적인 접근이 필요합니다.

오늘날 우리는 몇 가지 이론적인 작업을 통해
양자적 현상들을 다룰 수 있다고 생각합니다.

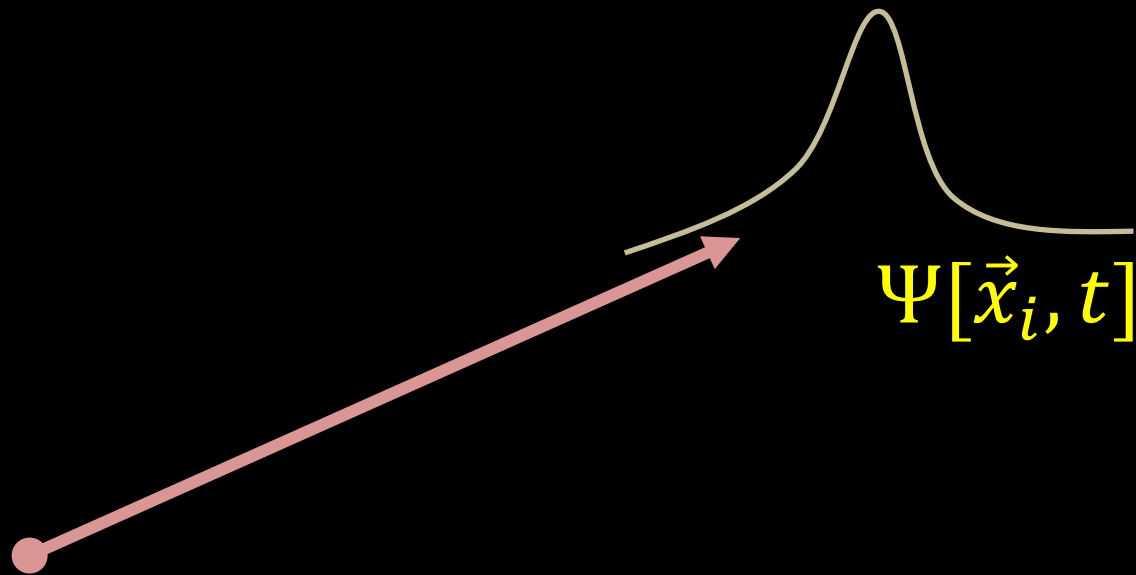
여기에서 양자역학quantum mechanics이 시작됩니다.



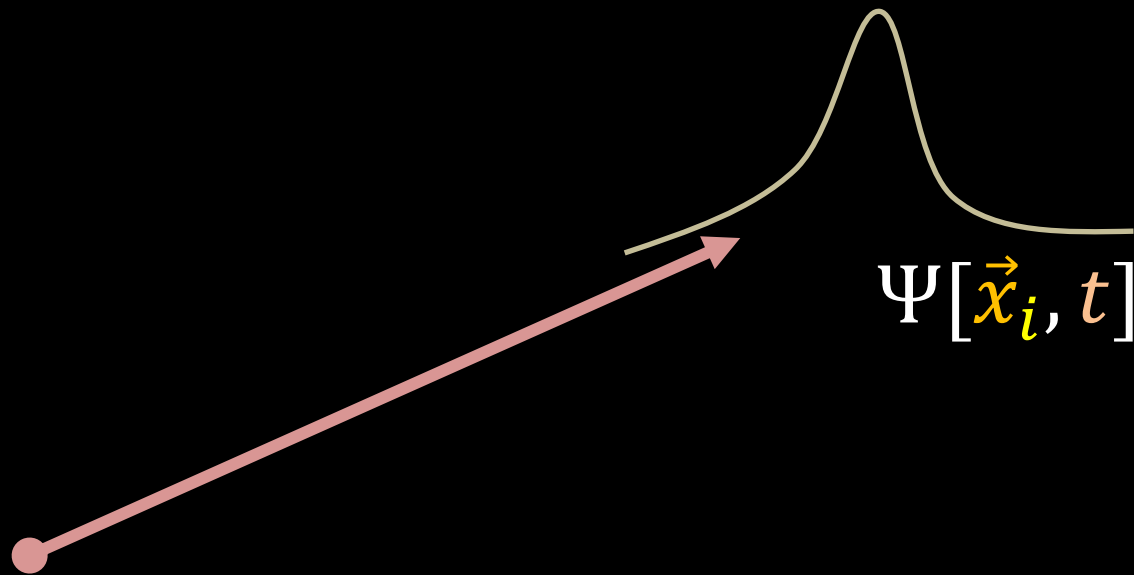
고전 물리학에서는 입자의 위치를 알면
모든 것을 이해할 수 있다고 생각합니다.



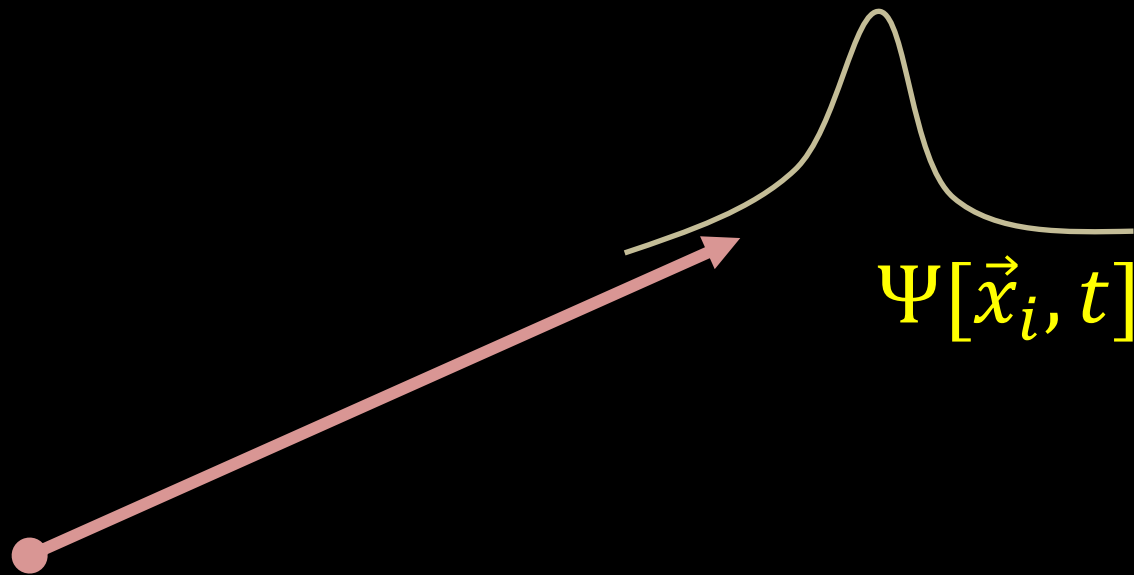
그러나 이 입자는 반드시 파동으로 기술되어야 합니다.



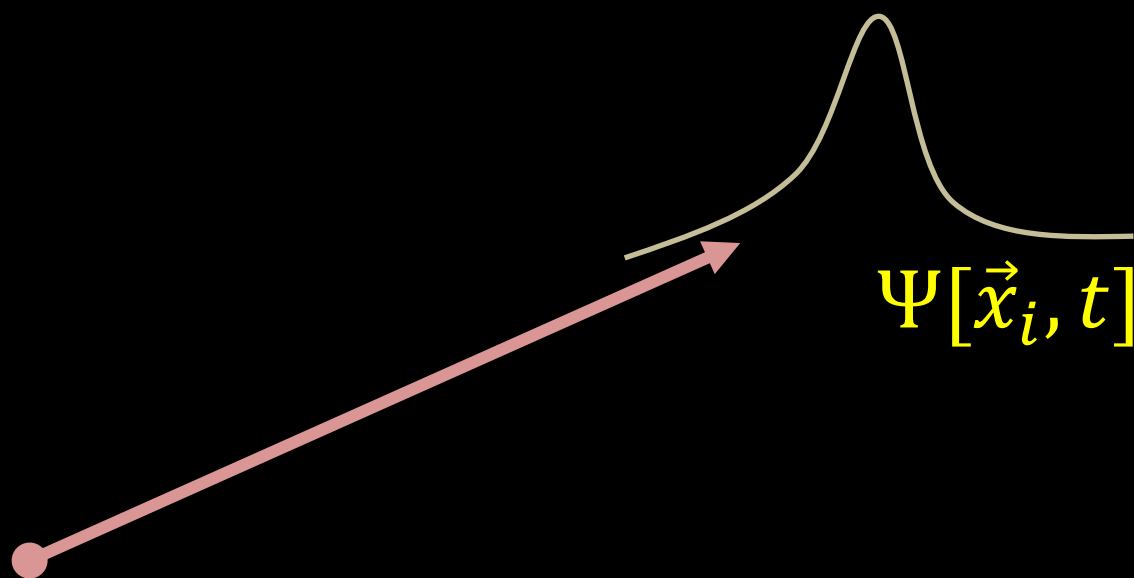
이 물질파, 또는 파동을 함수로 나타내 봅시다.
이것을 파동 함수 wave function 라고 합니다.



파동 함수는 **각 입자**에 대한 **공간**과 **시간**의 함수입니다.



양자 물리학에서는 입자의 위치에 대한 파동 함수를 알면
모든 것을 이해할 수 있다고 생각합니다.



파동 함수는 어떻게 구할 수 있을까요?



파동 함수를 결정하는 방정식은
바로 슈뢰딩거에 의해서 유도되었습니다.
이것을 슈뢰딩거 방정식Schrodinger equation이라고 합니다.



슈뢰딩거 방정식은 자연을 기술하는
근본적인 방정식 중 하나입니다.
슈뢰딩거는 이것을 어떻게 유도했을까요?

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

먼저 물질파, 또는 파동에 대해서 생각해 봅시다.
아무 것도 없는 공간에서는
파동은 자유롭게 전달됩니다.

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

이렇게 자유롭게 전달되는 파동은 보통
삼각 함수의 형태로 기술됩니다.

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

또는 허수를 사용한 **지수 함수**로
기술했을 하는 것도 문제가 없습니다.

$$\Psi = e^{i(kx - \omega t)}$$

따라서 자유로운 공간에서 퍼져나가는 파동을
이렇게 적어도 큰 문제가 없을 것입니다.

$$\Psi = e^{i(kx - \omega t)}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

파장 wave length

$$\omega = 2\pi\nu$$

각진동수
angular frequency

공간과 시간의 함수이므로 $kx - \omega t$ 라는 항을 넣은 것 뿐입니다.
여기에서 k 와 ω 는 각각 각파동수와 각진동수입니다.

$$\Psi = e^{i(kx - \omega t)}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

파장 wave length

$$\omega = 2\pi\nu$$

각진동수
angular frequency

이제 이 물질파의 **운동량**과 **에너지**는 무엇인지를 생각해 봅시다.

$$\Psi = e^{i(kx - \omega t)}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

파장 wave length

$$\omega = 2\pi\nu$$

각진동수
angular frequency

$$E = h\nu = \hbar\omega$$

여기에서 우리는 빛의 양자화 조건과
드브로이의 물질파 파장에 대한 관계식을 기억합시다.

$$p = h/\lambda = \hbar k$$

$$(\hbar \equiv h/2\pi)$$

$$\Psi = e^{i\left(\frac{px - Et}{\hbar}\right)}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

파장 wave length

$$\omega = 2\pi\nu$$

각진동수
angular frequency

$$E = h\nu = \hbar\omega$$

여기에서 우리는 빛의 양자화 조건과
드브로이의 물질파 파장에 대한 관계식을 기억합시다.

$$p = h/\lambda = \hbar k \quad (\hbar \equiv h/2\pi)$$

$$\Psi = e^{i\left(\frac{px - Et}{\hbar}\right)}$$

이제 파동 함수 Ψ 를 미분해서
운동량 p 와 에너지 E 를 뽑아내는 과정을 생각해 봅시다.

$$\Psi = e^{i\left(\frac{px - Et}{\hbar}\right)}$$

$$p\Psi = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \Psi$$

$$E\Psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi$$

이제 파동 함수 Ψ 를 미분해서
운동량 p 와 에너지 E 를 뽑아내는 과정을 생각해 봅시다.

$$\Psi = e^{i\left(\frac{px - Et}{\hbar}\right)}$$

$$\hat{p} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$$

이 과정을 좀 더 간단하게 표현하기 위해서
운동량과 에너지에 해당하는
미분 연산자를 정의합니다.

$$\hat{p} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$$

이제 이 미분 연산자를 가지고
어떻게 요리를 하면 좋을까요?

$$\hat{p} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\Psi = e^{i\left(\frac{px-Et}{\hbar}\right)}$$

물론 우리가 앞에서 구한 파동 함수는
가장 일반적인 형태의 파동 함수는 아닙니다.
그러나 슈뢰딩거와 이 후의 연구자들은 위의 연산자 관계가
항상 옳을 것이라고 생각했습니다.

$$\hat{p} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$$

그러면 일반적인 파동 함수는
어떻게 결정하면 될까요?

여기에서 슈뢰딩거는
오일러와 라그랑주 및 해밀턴에 의해 발전된
역학의 기술 방식을 소환합니다.
이것은 에너지 함수를 사용하는 것입니다.

$$E = \frac{p^2}{2m} + V$$

슈뢰딩거는 위와 같은 에너지 보존 관계식을 사용합니다.
엄밀히 말하면, 이 식의 우변은
해밀토니안Hamiltonian이라고 하는 에너지 함수입니다.

$$\hat{E} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V$$

파동에 대해 적용하기 위해서
은근 슬쩍 p 와 E 를 $\hat{p}$ 와 $\hat{E}$ 로 바꿔봅시다.

$$\hat{p} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\hat{E} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V$$

이제 미분 연산자를 바꿔치기해 봅시다.

$$\hat{p} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V$$

그 결과는 위와 같습니다.
하지만 위의 식은 아직 제대로 된 방정식은 아닙니다.

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V \right) \Psi$$

마지막으로 양 변에 파동 함수 Ψ 를 작용시킵니다.
이것이 바로 슈뢰딩거 방정식입니다.

유도 과정이 좀 느슨하게 느껴졌나요?

실제로 그렇습니다.

고전 역학으로부터 양자 역학으로
필연적으로 확장하는 방법은 존재하지 않습니다.

다만 슈뢰딩거가 이미 사용한 양자화의 방법을
우리가 양자화하고자 하는 다른 이론에
적용하는 것은 가능합니다.

감사합니다