

제1장 파동함수

양자역학이란?

양자역학이란?

그보다 먼저, 물리학에서 ‘이론theory’이란
무엇인지에 대해서 생각해 봅시다.

물리학에서 이론이란 작용_{action}을 의미합니다.

$$S = \int dt L(q, \dot{q}; t)$$

물리학에서 이론이란 작용_{action}을 의미합니다.

$$S = \int dt L(q, \dot{q}; t)$$

✓ 작용은 정준 변수_{canonical variable}들의 함수_{functional}입니다.

물리학에서 이론이란 작용_{action}을 의미합니다.

$$S = \int dt L(q, \dot{q}; t)$$

- ✓ 작용은 정준 변수_{canonical variable}들의 함수_{functional}입니다.
- ✓ 범함수를 변분_{variation}해서 운동 방정식_{equation of motion}을 얻습니다.

물리학에서 이론이란 작용action을 의미합니다.

$$S = \int dt L(q, \dot{q}; t)$$

- ✓ 작용은 정준 변수canonical variable들의 함수functional입니다.
- ✓ 범함수를 변분variation해서 운동 방정식equation of motion을 얻습니다.
- ✓ 운동 방정식을 풀어서 운동(입자의 위치)을 얻게 됩니다.

이론의 예

$$S = \int \sqrt{-g^{\mu\nu} \dot{x}_\mu \dot{x}_\nu} d\tau$$

상대론적 입자: 운동 방정식은 측지선 방정식 geodesic equation 이 됩니다.

이론의 예

$$S = \frac{T}{2} \int \sqrt{-h} h^{ab} g_{\mu\nu}(X) \partial_a X^\mu(x) \partial_b X^\nu(x) d^2x$$

끈 이론 String theory (폴리아코프 작용)

이론의 예

$$S = \int -g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi d^4x$$

스칼라 장 scalar field: 운동 방정식은
클라인-고든 방정식 Klein-Gordon equation 이 됩니다.

이론의 예

$$S = \frac{1}{16\pi} \int R \sqrt{-g} d^4x$$

중력장: 운동 방정식은 아인슈타인 방정식Einstein equation이 됩니다.

양자역학이란?

이제 이론theory을 양자화quantize한다는 것의
의미에 대해서 생각해봅시다.

양자화 프로그램

$$S = \int dt L$$

1단계: 이론으로부터 출발합니다.

양자화 프로그램

$$H(q, p) = p\dot{q} - L(q, \dot{q})$$

2단계: 르장드르 변환Legendre transformation을 사용해서
해밀토니안Hamiltonian을 얻습니다.

양자화 프로그램

$$\{q, p\} = 1 \rightarrow [\hat{q}, \hat{p}] = i$$

$$\hat{H}(\hat{q}, \hat{p})\Psi = \hat{E}\Psi$$

3단계: 정준 변수canonical variable를 연산자operator로 바꿉니다.
그래서 슈뢰딩거 방정식Schrodinger equation을 유도합니다.

양자화 프로그램

$$\Psi(x, t)$$

4단계: 방정식을 풀어서 파동함수wave function를 구합니다.

양자화 프로그램

$$\langle \Psi | \hat{O} \hat{O} \dots | \Psi \rangle$$

5단계: 측정 가능한 양 observable quantities을 계산해서 실험과 비교합니다. 여기에는 고유값 eigenvalues 또는 기댓값 expectation values이 해당됩니다.

양자화 프로그램

1단계: 이론 $S = \int dt L$

2단계: 르장드르 변환을 통해 해밀토니안 유도 H

3단계: 연산자로 치환해서 슈뢰딩거 방정식 유도 $\hat{H}\Psi = E\Psi$

4단계: 파동함수 Ψ

5단계: 관측 가능한 값(고윳값 또는 기댓값) 계산 $\langle \hat{O} \hat{O} \dots \rangle$

양자화 프로그램



참 쉽죠!

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V \right) \Psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi$$

비상대론적 양자역학의 슈뢰딩거 방정식

보른 해석 Born interpretation

파동함수 ψ 란 무엇인가?

슈뢰딩거는 파동함수가 전하의 밀도라고 생각했습니다.
즉, 고전적인 전자가 공간을 채우는 방식을
설명한다고 생각했던 것입니다.

그러나 전자는 입자이기 때문에
공간을 채우고 있다는 것을 쉽게 납득할 수 없었습니다.

이에 대해 막스 보른은 파동함수를
전하밀도가 아닌 확률밀도라고 해석합니다.

$$|\Psi(x, t)|^2 = P(x, t)$$

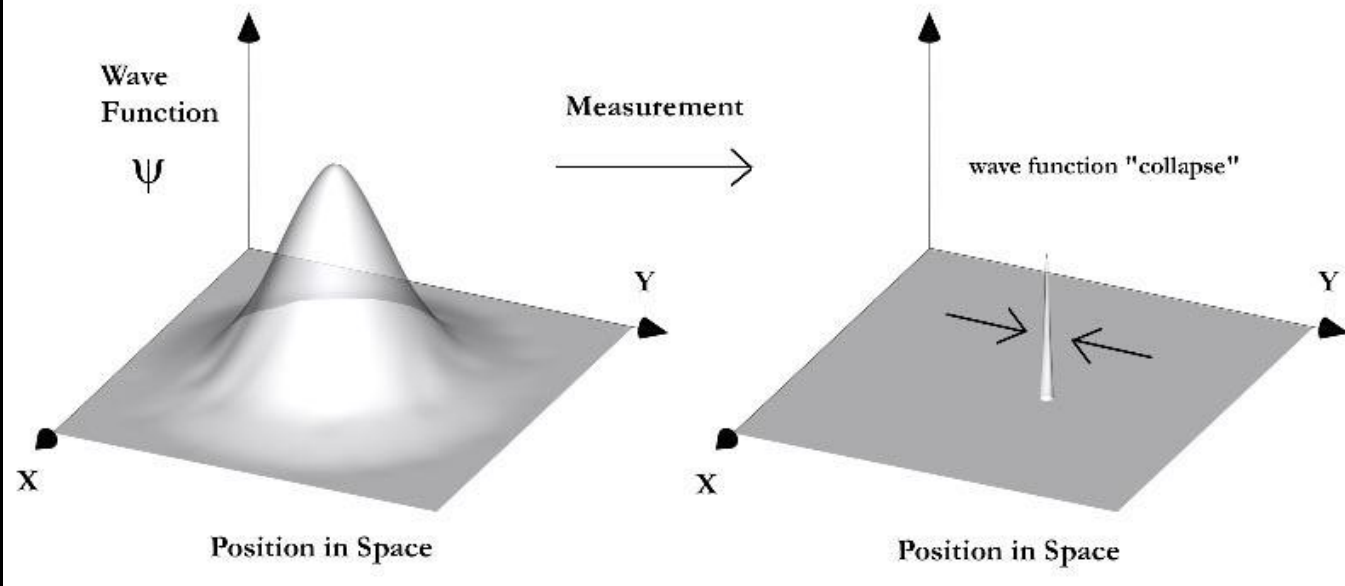
우리는 한 번의 측정에 의해서 고윳값을 얻을 수 있고,
여러 번의 반복된 측정에 의해서 기댓값을 얻을 수 있습니다.

따라서 우리는 전자에 대해서 오직
확률 및 통계적인 것 만
측정할 수 있다는 말이 됩니다.

$$|\Psi(x, t)|^2 = P(x, t)$$

이것은 아인슈타인을 비롯한 많은 고전적 결정론자들의
비판을 받았습니다.

The Copenhagen Interpretation:



이렇게 측정measurement에 의해 파동 함수의 파동성이 붕괴되고
입자로 환원된다고 보는 해석을
양자 역학의 코펜하겐 해석Copenhagen interpretation이라고 합니다.

물론 우리가 고전적 결정론을 유지할 수는 없지만
통계적 범위에서는 여전히
결정되어 있다고 생각할 수 있습니다.

$$|\Psi(x, t)|^2 = P(x, t)$$

왜냐하면 슈뢰딩거 방정식이
파동함수를 결정하기 때문입니다.

과연 통계적 범위에서조차 결정할 수 없는
근본적 미결정성이 자연에 존재할까요?

Breakdown of predictability in gravitational collapse*

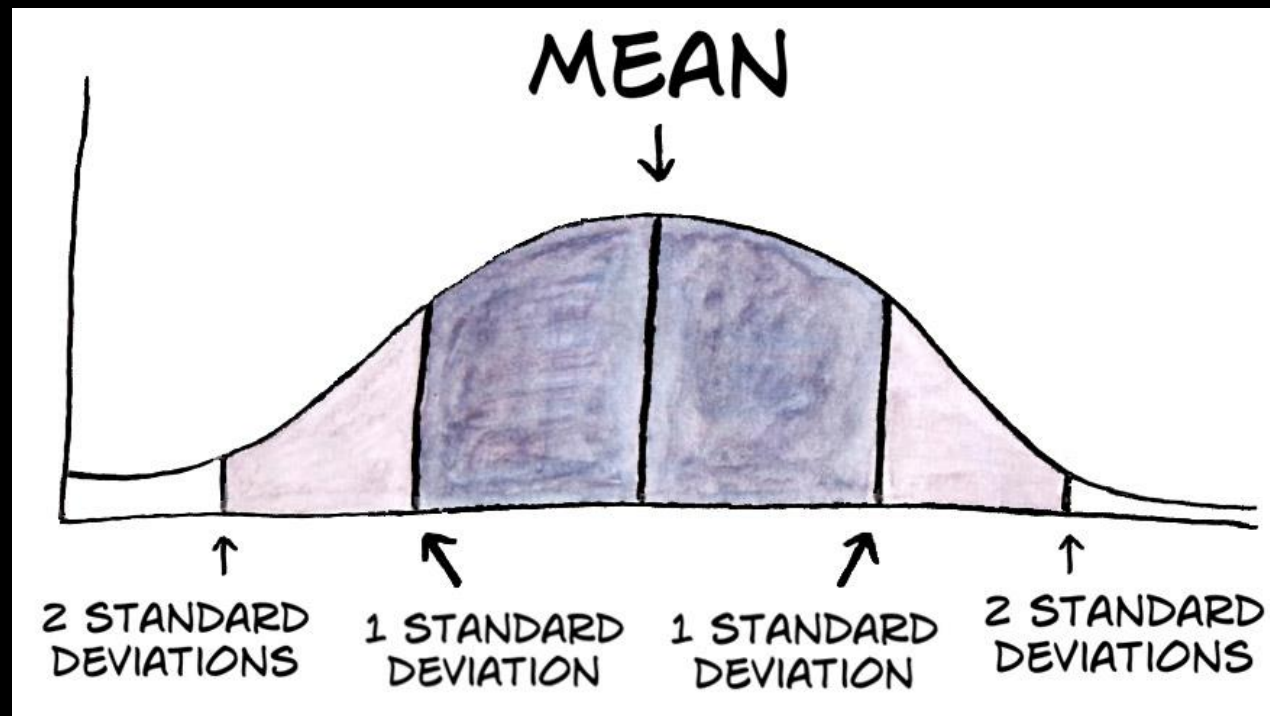
S. W. Hawking[†]

*Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics, University of Cambridge, Cambridge, England
and California Institute of Technology, Pasadena, California 91125*

(Received 25 August 1975)

The principle of equivalence, which says that gravity couples to the energy-momentum tensor of matter, and the quantum-mechanical requirement that energy should be positive imply that gravity is always attractive. This leads to singularities in any reasonable theory of gravitation. A singularity is a place where the classical concepts of space and time break down as do all the known laws of physics because they are all formulated on a classical space-time background. In this paper it is claimed that this breakdown is not merely a result of our ignorance of the correct theory but that it represents a fundamental limitation to our ability to predict the future, a limitation that is analogous but additional to the limitation imposed by the normal quantum-mechanical uncertainty principle. The new limitation arises because general relativity allows the causal structure of space-time to be very different from that of Minkowski space. The interaction region can be bounded not only by an initial surface on which data are given and a final surface on which measurements are made but also a 'hidden surface' about which the observer has only limited information such as the mass, angular momentum, and charge. Concerning this hidden surface one has a "principle of ignorance": The surface emits with equal probability all configurations of particles compatible with the observers limited knowledge. It is shown that the ignorance principle holds for the quantum-mechanical evaporation of black holes: The black hole creates particles in pairs, with one particle always falling into the hole and the other possibly escaping to infinity. Because part of the information about the state of the system is lost down the hole, the final situation is represented by a density matrix rather than a pure quantum state. This means there is no S matrix for the process of black-hole formation and evaporation. Instead one has to introduce a new operator, called the superscattering operator, which maps density matrices describing the initial situation to density matrices describing the final situation.

1976년 스티븐 호킹은 그렇게 생각했습니다.
여기에 대해서는 현재 토론이 진행중입니다.



우리는 확률 분포로부터
측정할 수 있는 값을 얻는 방법에 대해서
연구할 필요가 있습니다.

확률을 사용하는 방법



페르마와 파스칼

서로 실력이 비슷한 철수와 영희가
각자 32만원을 걸고 주사위 게임을 했다.
세 번을 먼저 이기는 사람이 모든 돈을 가져가기로 했다.

현재 철수는 두 번, 영희는 한 번을 이긴 상황이고,
사정상 더는 게임을 할 수 없게 되었다.

그렇다면 철수와 영희에게 상금을 어떻게 분배해야 하는가?

영희의 주장:

앞으로 이루어질 경우의 수는 세 가지 이다.

철수 승

철수 패/철수 승

철수 패/철수 패

앞의 두 가지는 철수가 이기는 경우이고

세 번째는 영희가 이기는 경우이다.

따라서 상금은 2:1로 나누어야 한다.

철수의 주장:

앞으로 이루어질 경우의 수는 세 가지 이다.

철수 승

철수 패/철수 승

철수 패/철수 패

첫 번째의 확률은 $\frac{1}{2}$, 두 번째의 확률은 $\frac{1}{4}$, 세 번째의 확률은 $\frac{1}{4}$ 이다.

따라서 철수가 이길 확률은 $\frac{3}{4}$, 영희가 이길 확률은 $\frac{1}{4}$ 이다.

따라서 상금은 3:1로 나누어야 한다.



페르마와 파스칼은 후자의 주장이 맞다는 것을
확인해주었다고 합니다.

$$p_i = \frac{n_i}{N}$$

어떤 **사건**의 **확률**이란
그 사건이 일어날 경우의 수를
전체 경우의 수로 나눈 것을 말합니다.

$$p_i = \frac{n_i}{N}$$

어떤 사건의 확률이란
그 사건이 일어날 경우의 수를
전체 경우의 수로 나눈 것을 말합니다.

$$N = \sum_i n_i$$

전체 경우의 수는 각 사건의 경우의 수의 총 합입니다.

$$1 = \sum_i p_i$$

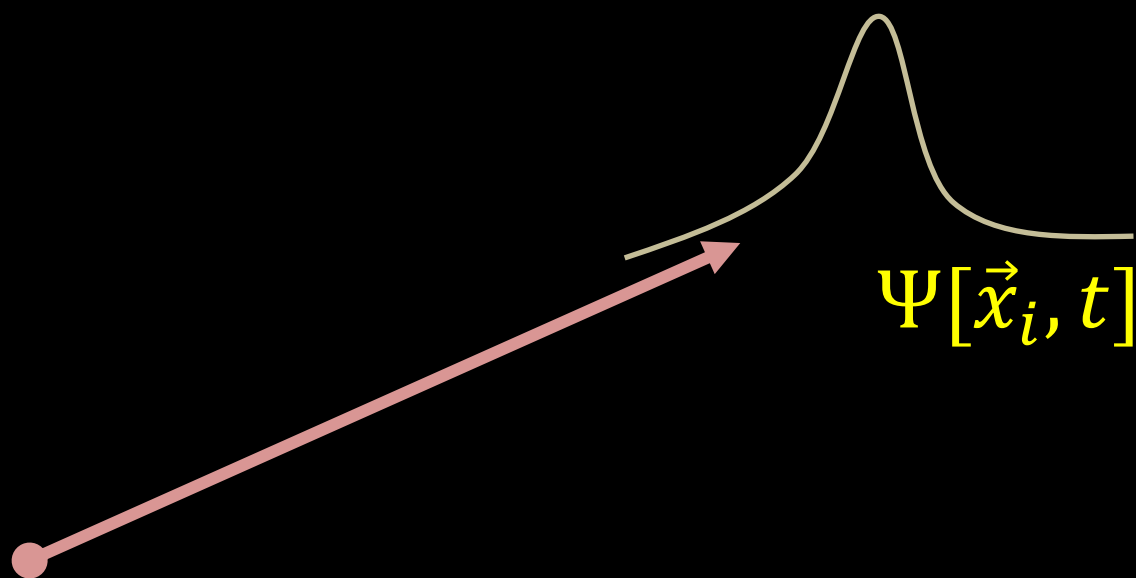
따라서 확률의 총 합은 1이 되어야 합니다.
이것을 **규격화 조건**이라고 합니다.

$$1 = \int p(x) dx$$

따라서 확률의 총 합은 1이 되어야 합니다.
이것을 **규격화 조건**이라고 합니다.

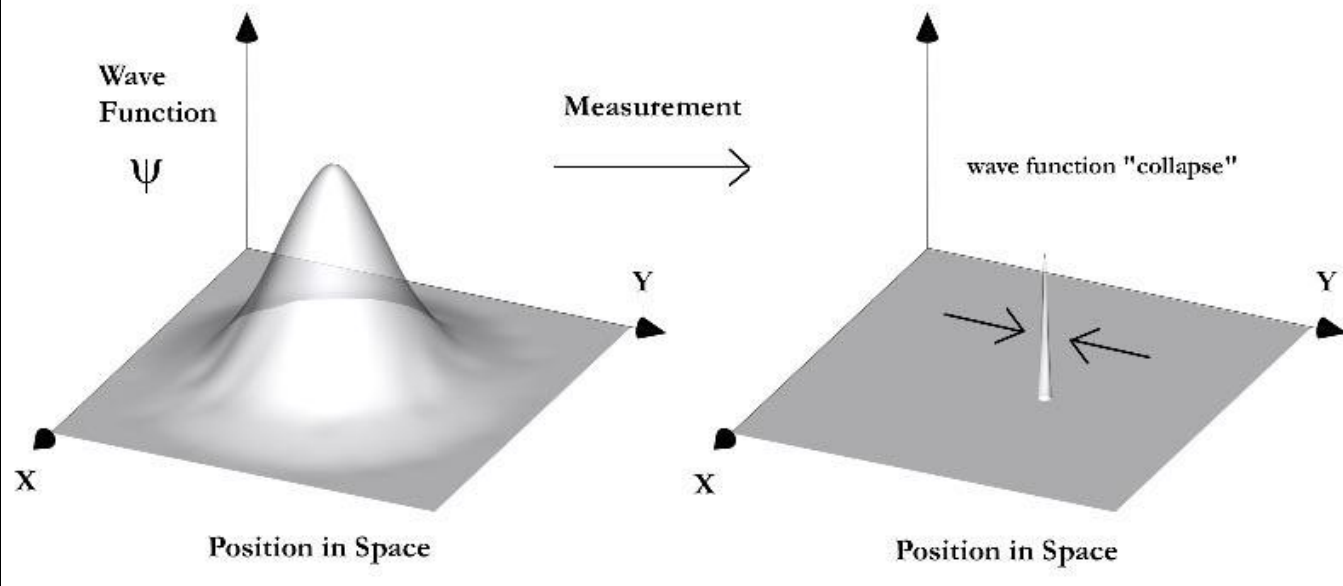
양자 역학은 자연 현상을 성공적으로 설명해 준다는 것을
앞으로 보게 될 것입니다.

그렇다면 양자 역학이 기술하는 세상에 대한
직관적인 의미는 어떠한 것일까요?

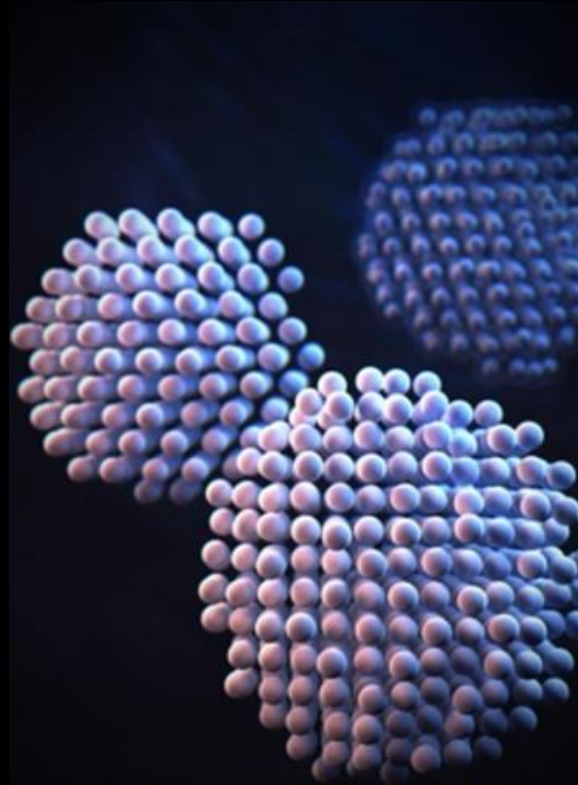


첫째로, 자연은 근본적으로 파동이라는 것입니다.
이 파동은 슈뢰딩거 방정식으로 결정됩니다.

The Copenhagen Interpretation:



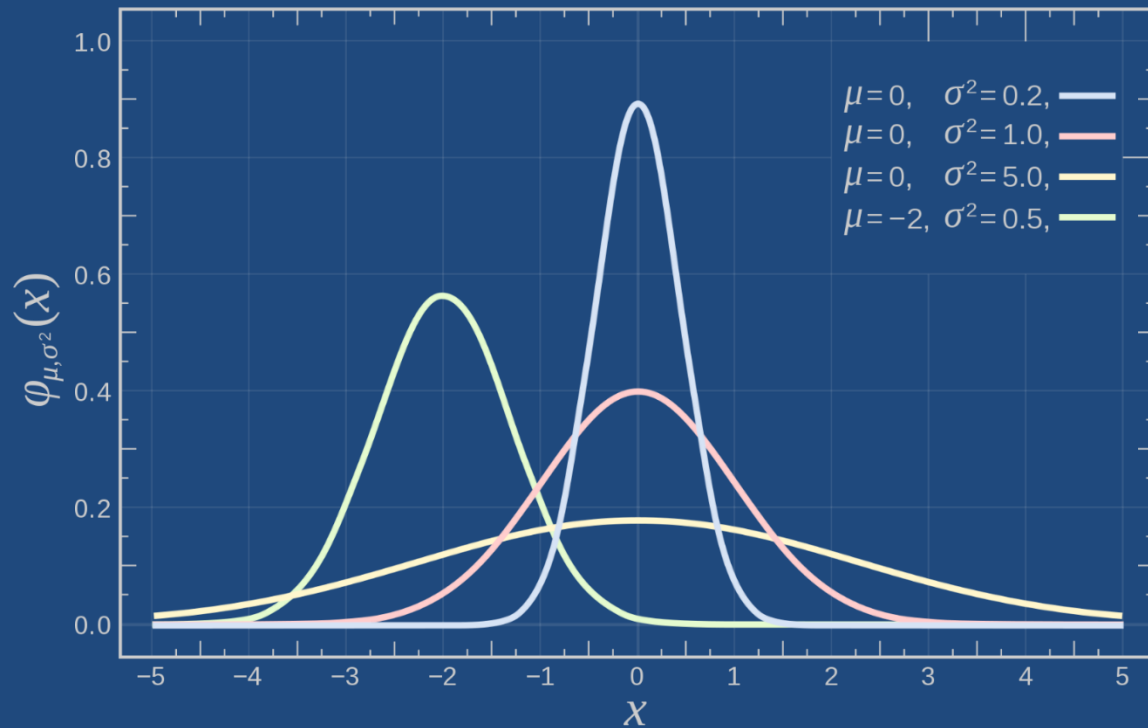
그러나 코펜하겐 해석 Copenhagen interpretation에 의하면
측정 measurement에 의해 파동 함수의 파동성이 붕괴되고
우리는 항상 입자만을 인식하게 됩니다.



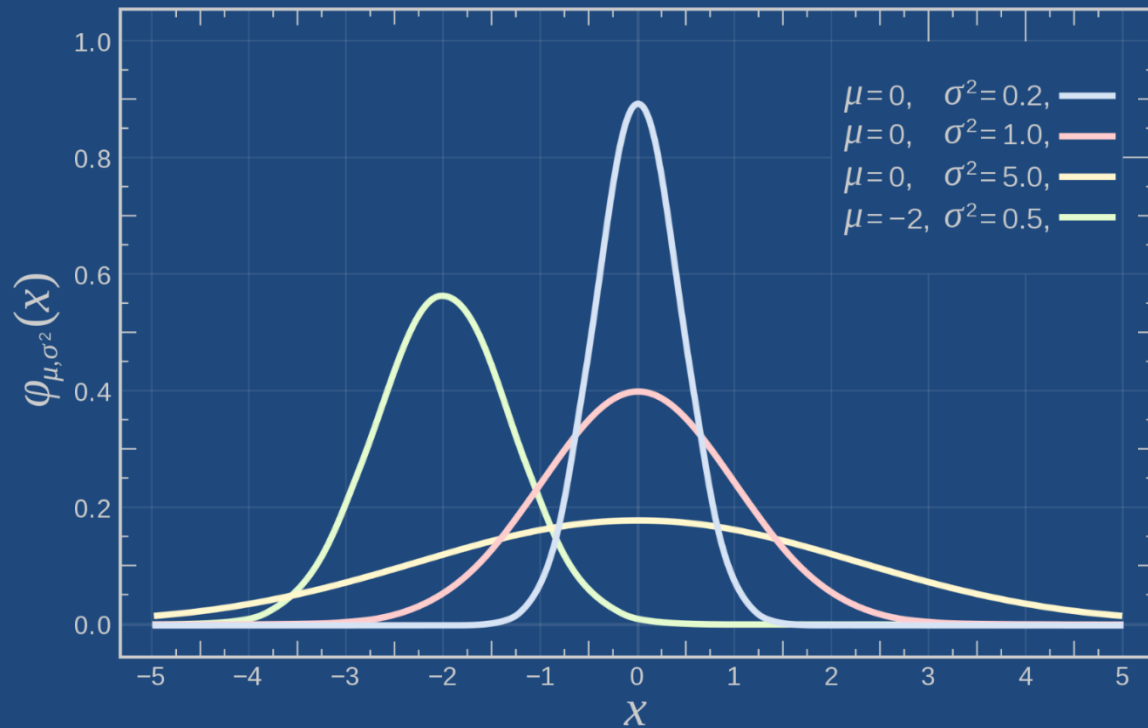
우리는 입자에 대해서 여기에 있다, 또는 저기에 있다,
즉 정확한 위치에 대한 진술을 할 수 있습니다.



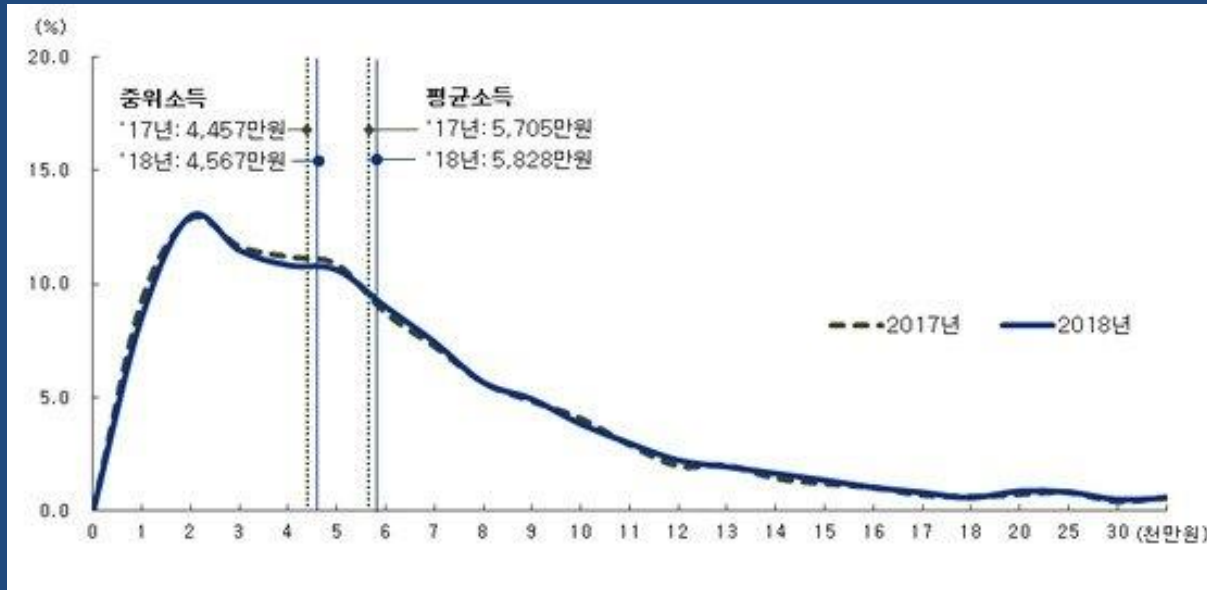
그러나 파동에 대해서 여기 또는 저기라는 말을
할 수 있을까요?



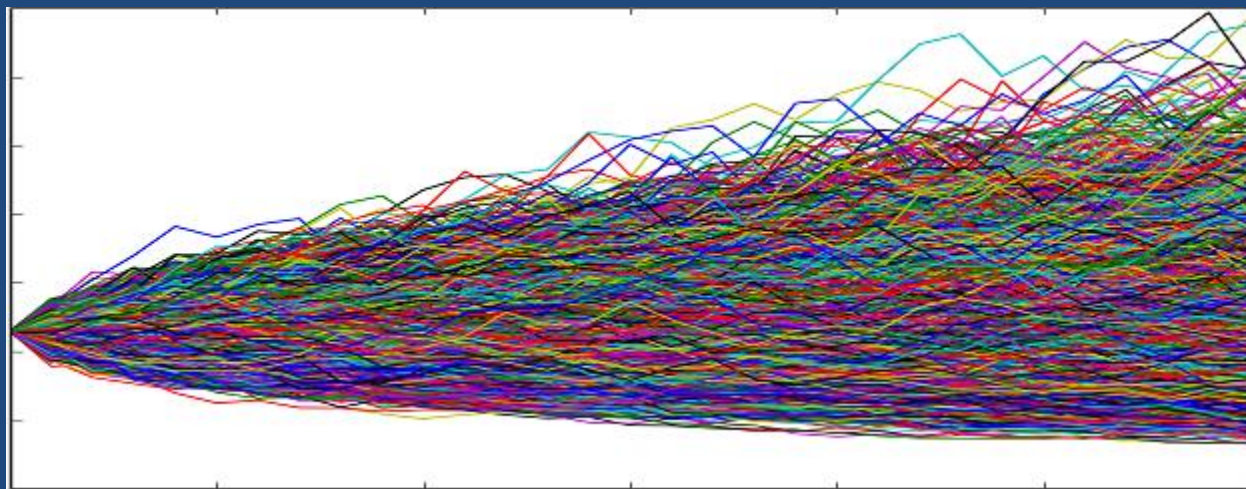
구체적으로 그림과 같은 정규 분포를 생각해 봅시다.
역시 이러한 분포에서는 여기 또는 저기라는 위치를
특정하는 것이 불가능합니다.



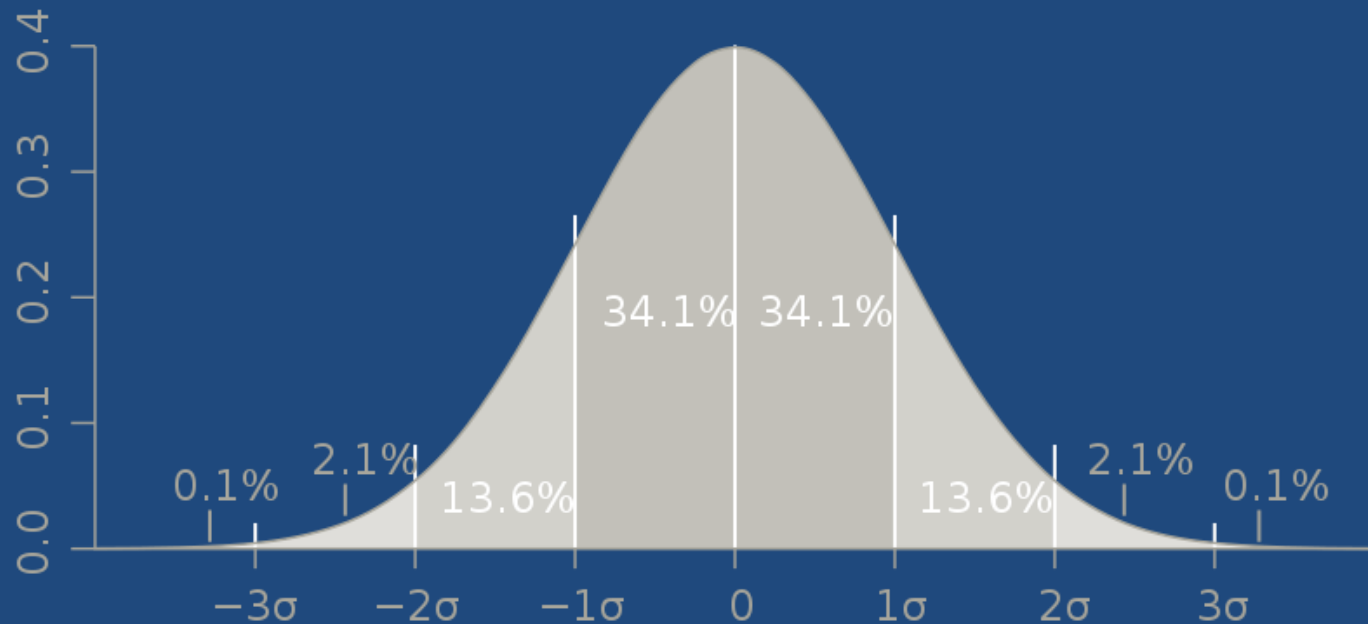
그러나 이 분포에서
가장 지배적인 부분을 지정하는 것은 가능합니다.
이렇게 확률 분포를 대표하는 값을
평균값 또는 기댓값이라고 합니다.



물론 **기댓값**이 항상 어떤 분포를 대표하는 값이 되지는 않습니다.
때로는 **중간값** 또는 **최빈값**을 함께 참고해서 보아야 합니다.



다른 한 편, 어떤 분포를 대표하는 값을 선택하더라도
분포가 좌우로 넓게 퍼져 있다면
특정한 대표값을 지칭하는 것의 의미가 줄어들게 됩니다.



이렇게 기댓값 주변으로 퍼져있는 정도를 측정하는 양을
표준 편차standard deviation라고 합니다.

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}$$

정규 분포의 경우 x_0 는 기댓값_{expectation value}이고
 σ 는 표준 편차_{standard deviation}가 됩니다.
그리고 $1/\sqrt{2\pi\sigma^2}$ 은 규격화_{normalization} 상수가 됩니다.

$$\langle f(x) \rangle = \int f(x)p(x)dx$$

기댓값 expectation value

$$\Delta x = \sqrt{\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle}$$

$$= \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$$

표준 편차 standard deviation

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

고전 물리학은 미분 방정식에 의해서 결정됩니다.
여기에는 2개의 초기 조건, 즉
초기 위치 및 초기 속력이 필요합니다.

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

또는 이와 동등하게
초기 위치 및 초기 운동량에 대한 정보를 알고 있으면
모든 것을 결정할 수 있습니다.

$$\langle x \rangle = \int \Psi^* x \Psi dx$$

$$\langle p \rangle = \int \Psi^* \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \right) \Psi dx$$

이제 같은 이야기를 양자 역학에 적용하면
위치 및 운동량의 기댓값은
위와 같이 계산할 수 있습니다.

$$\langle x \rangle = \int \Psi^* x \Psi dx$$

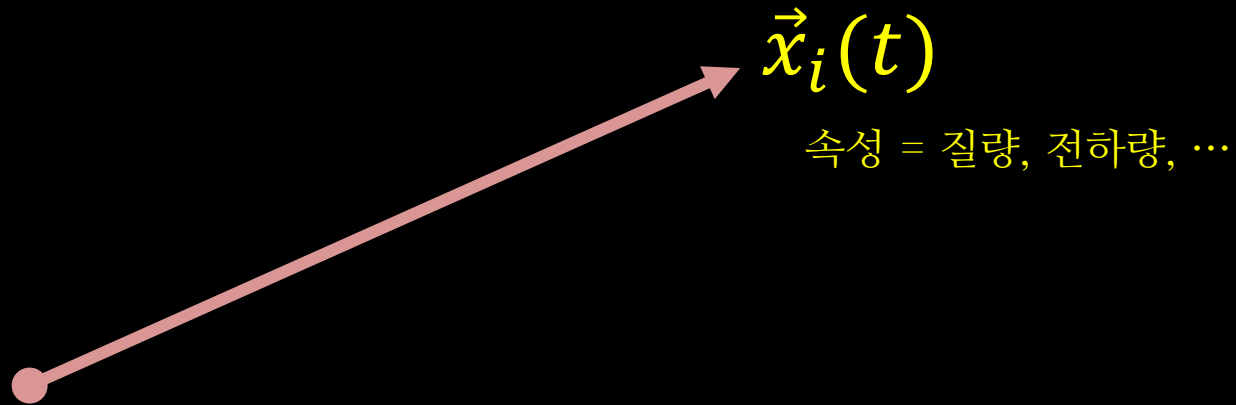
$$\langle p \rangle = \int \Psi^* \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \right) \Psi dx$$

그러면 이러한 위치 및 운동량의 정보는
기댓값 근처에 얼마나 퍼져 있을까요?
즉, 이러한 기댓값은 얼마나 정확할까요?

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$$

$$\Delta p = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2}$$

입자의 위치 및 운동량에 대한 표준 편차,
또는 불확정성uncertainty은 위와 같이 정의됩니다.



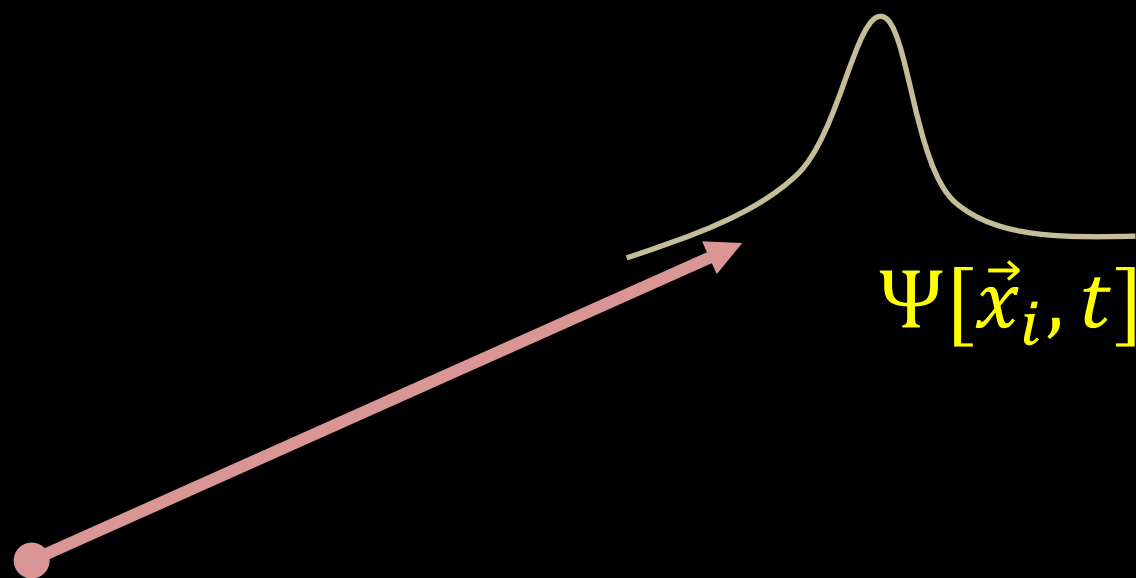
고전 물리학에서는 입자의 정확한 위치와 운동량을
결정할 수 있습니다.
즉, 표준 편차를 0으로 만들 수 있다는 것입니다.



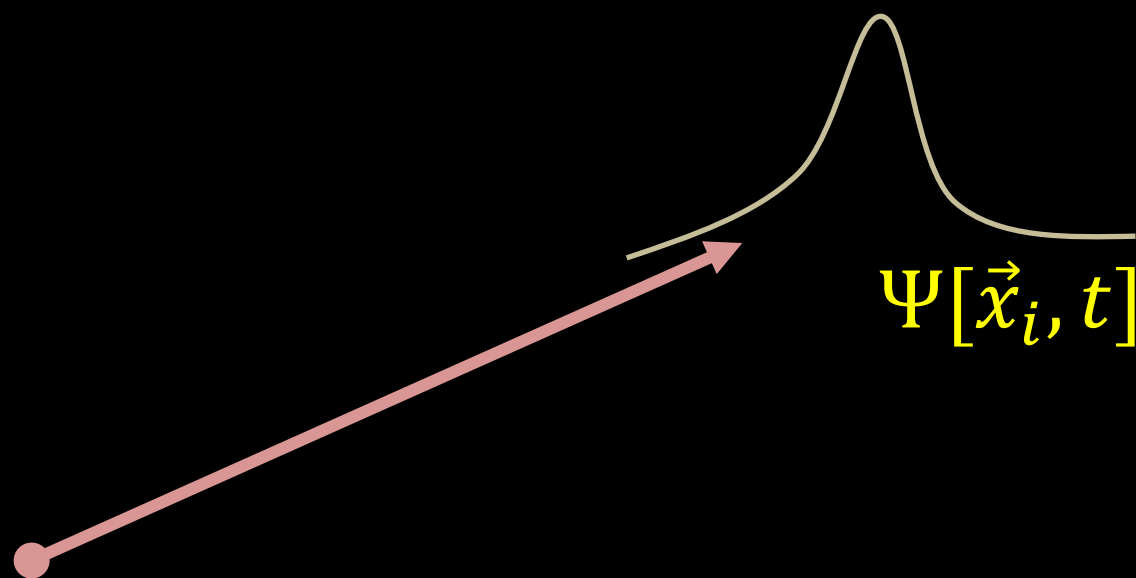
그러나 하이젠베르크는 양자 역학에서
표준 편차를 더 이상 줄일 수 없는
어떤 한계가 있다는 것을 증명합니다.

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

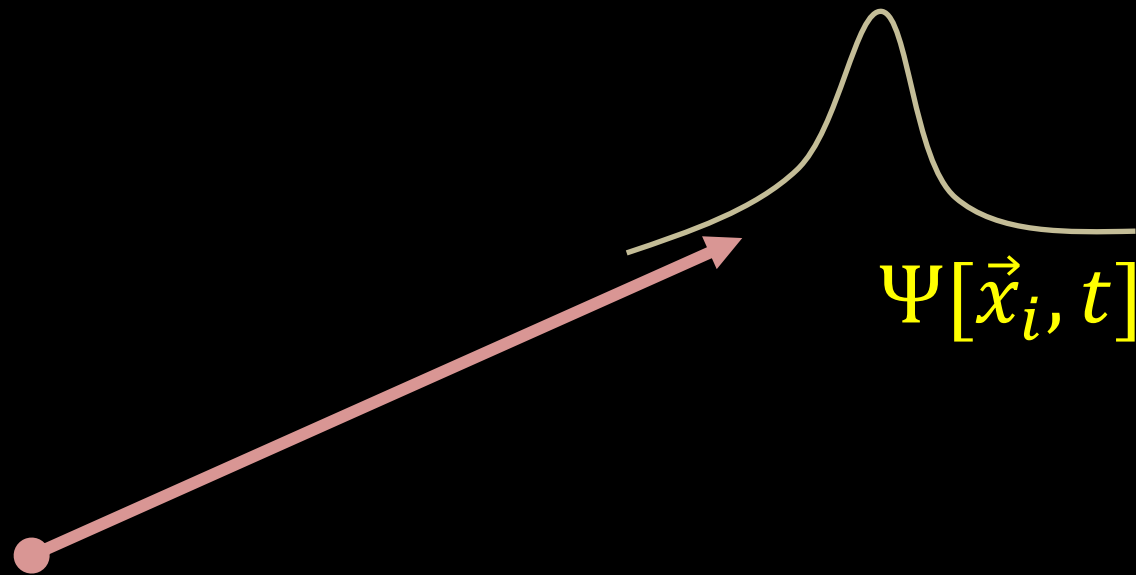
이것을 하이젠베르크의
불확정성원리uncertainty principle라고 합니다.



사실 이것은 놀라운 주장이 아닙니다.
자연이 근본적으로 파동이라면
이러한 불확정성 관계식은 자연스럽게 성립합니다.



문제는 우리가 측정을 통해서 항상
입자만을 인식한다는 점입니다.
이렇게 인식된 입자에 대한 위치와 운동량을 특정할 수 없다는 것은
놀라운 사실이 됩니다.



위치와 운동량을 완벽히 특정할 수 없으므로
고전 물리학의 방정식도 정확한 예측 능력을 잃게 됩니다.



하이젠베르크의 불확정성 관계식은
자연에 대한 ‘고전적인’ 예측 능력에 대해서
근본적인 한계가 있음을 보여주는 것입니다.



따라서 양자 역학에서의 예측 능력이라는 것은
‘통계적인’ 범위에 제한됩니다.
물론 우리는 반복된 실험을 통해
이론적인 예측과 실험 결과를 비교할 수 있습니다.

이러한 의미에서 양자 역학은
통계적 범위에서는 여전히
예측 능력을 가지고 있다고 생각할 수 있습니다.

따라서 양자 역학이
자유 의지에 대한 근본적인 설명이 된다는 주장은
약간 조심스럽게 접근할 필요가 있습니다.

감사합니다