

제2장

시간에 무관한 슈뢰딩거 방정식

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V \right) \Psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi$$

비상대론적 양자역학의 슈뢰딩거 방정식

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V \right) \Psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi$$

1차원 문제:
이 방정식은 선형 2차 편미분 방정식입니다.

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V \right) \Psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi$$

1차원 문제:

이 방정식은 선형 2차 편미분 방정식입니다.

편미분 방정식이므로 변수분리가 필요합니다.

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V \right) \Psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi$$

1차원 문제:

이 방정식은 선형 2차 편미분 방정식입니다.
변수분리 후 2개의 선형독립인 해가 존재합니다.

슈뢰딩거 방정식을 푸는 과정

0. 변수분리
separation of variables

$$\Psi(x, t) = \psi(x)T(t)$$

1. 일반해 찾기
general solution

$$\psi(x) = A\psi_1 + B\psi_2$$

2. 경계조건 부여 boundary conditions

$$\psi_n(x) = A\psi_{1n} + \cancel{B\psi_2}$$

3. 규격화 조건 normalization

$$\psi_n(x) = A(n)\psi_{1n}$$

4. 정규직교조건을 만족하는 기저함수 구성
orthonormal basis

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_m^*(x) \psi_n(x) dx = \delta_{mn}$$

5. 일반적인 해를 기저함수의 중첩으로 표현
superposition

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n$$

6. 초기조건을 대입해서 계수를 확정
initial condition

$$c_n = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \psi_n^*(x) dx$$

슈뢰딩거 방정식을 푸는 과정

0. 변수분리
1. 일반해 찾기
2. 경계조건 부여
3. 규격화 조건
4. 정규직교조건을 만족하는 기저함수 구성
5. 일반적인 해를 기저함수의 중첩으로 표현
6. 초기조건을 대입해서 계수를 확정

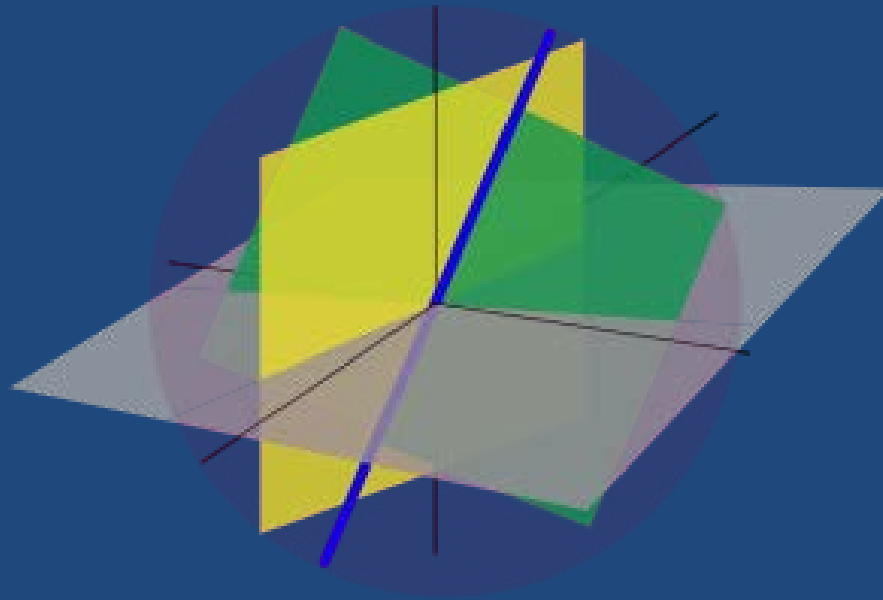
슈뢰딩거 방정식을 푸는 과정

0. 변수분리
1. 일반해 찾기
2. 경계조건 부여
3. 규격화 조건
4. 정규직교조건을 만족하는 기저함수 구성
5. 일반적인 해를 기저함수의 중첩으로 표현
6. 초기조건을 대입해서 계수를 확정

참 쉽죠!

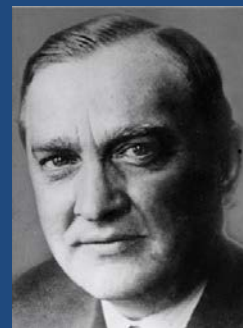
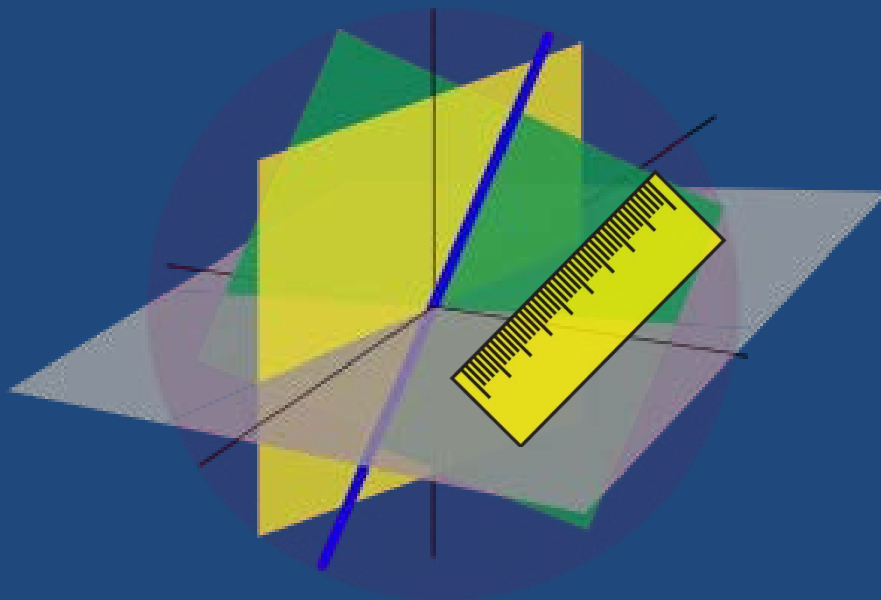


벡터 공간



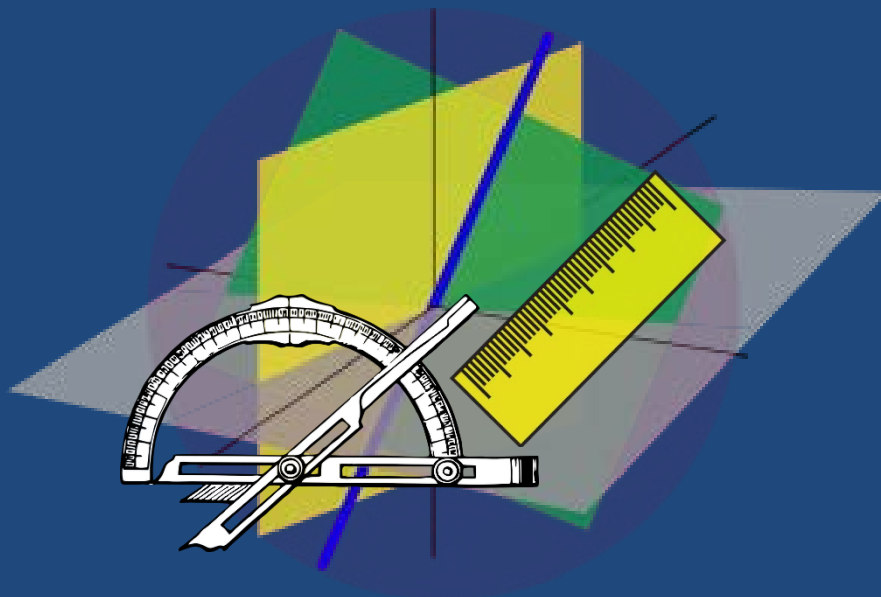
벡터 공간이란 선형연산이 가능한 벡터들이 정의된
수학적 공간을 말합니다.

바나흐 공간



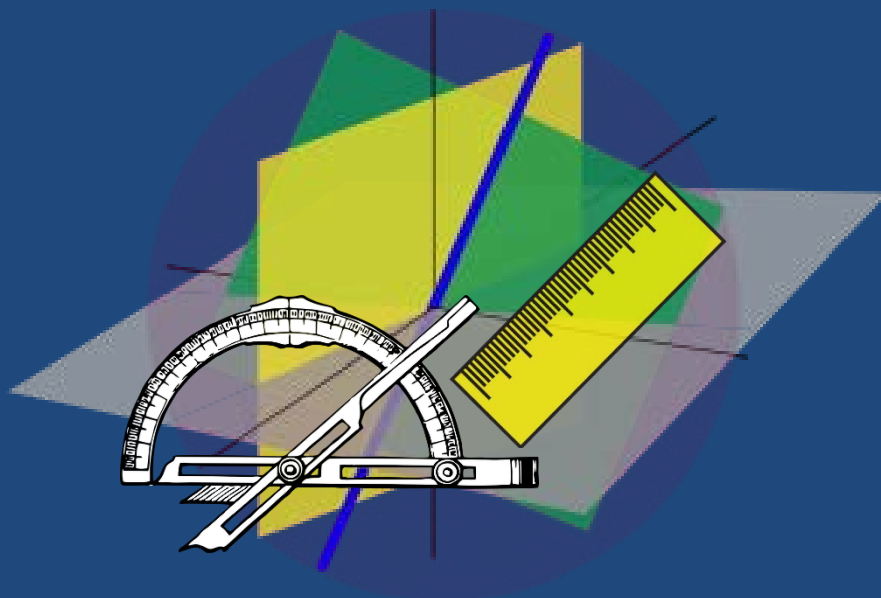
벡터 공간에 거리_{norm} 를 정의할 수 있으면
바나흐 공간이라고 부릅니다.

힐베르트 공간



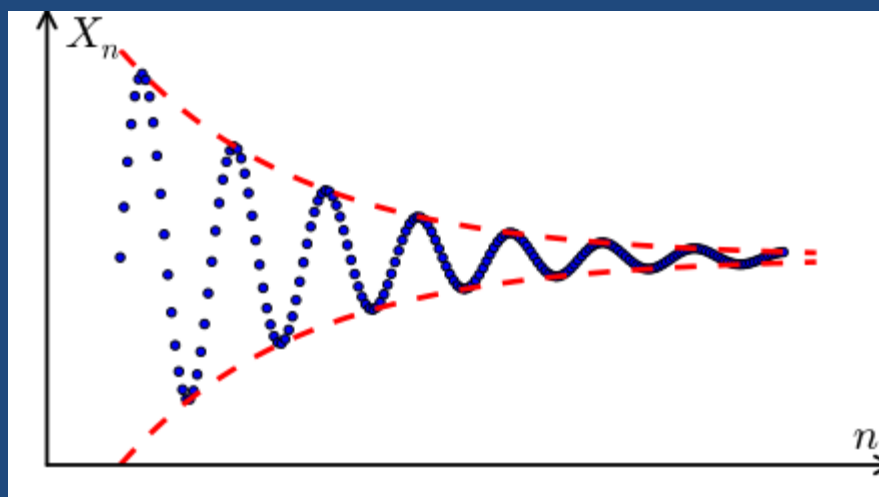
바나흐 공간에 각도를 측정하는 **내적**inner product을
잘 정의할 수 있으면
힐베르트 공간이라고 부릅니다.

힐베르트 공간



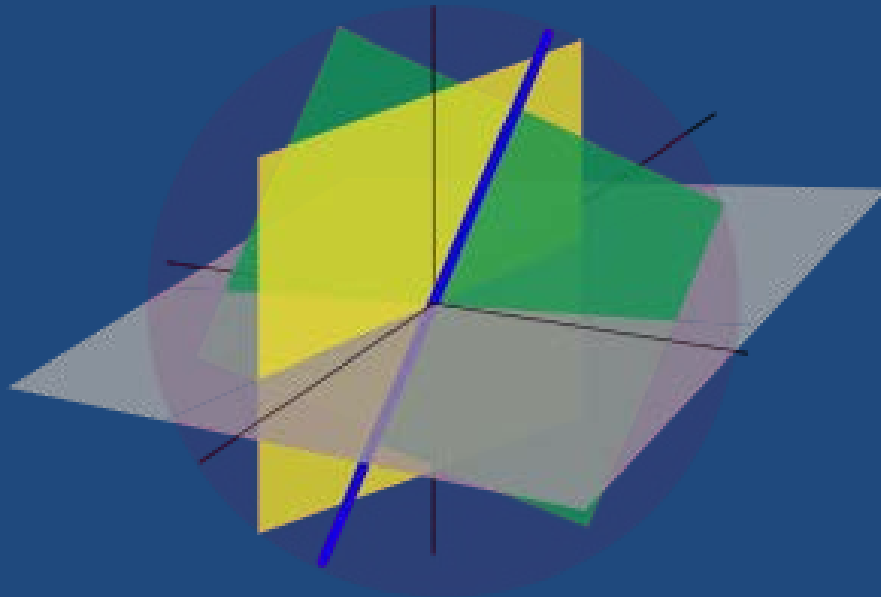
바나흐 공간에 각도를 측정하는 내적^{inner product}을
잘 정의할 수 있으면
힐베르트 공간이라고 부릅니다.

힐베르트 공간



힐베르트 공간은 빈 틈이 없이 꽉 차 있어야 합니다.
즉, **Cauchy complete**해야 합니다.

벡터 공간으로서의 함수 공간



슈뢰딩거 방정식의 해로 주어지는 함수들도
힐베르트 공간을 생성합니다.
즉, 벡터와 내적이 정의가 됩니다.

벡터 공간으로서의 함수 공간

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_m^*(x) \psi_n(x) dx = \delta_{mn}$$

우리가 구한 고유함수가 이 함수 공간의 기저벡터가 되고,
내적은 위와 같은 (르베그) 적분으로 정의가 됩니다.

벡터 공간으로서의 함수 공간

$$c_n = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \psi_n^*(x) dx$$

힐베르트 공간의 완비성(completeness) 때문에
경계조건을 만족하는 임의의 초기조건에 대해서
위와 같이 모든 계수들을 결정할 수 있게 됩니다.

선형대수학적 용어로의 전환

$$\psi_n(x) \longrightarrow |\psi_n\rangle$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_m^*(x) \psi_n(x) dx \longrightarrow \langle \psi_m | \psi_n \rangle$$

디랙은 슈뢰딩거 방정식의 해가 만들어내는 함수공간의 구조를
선형대수학적 용어로 다시 풀어냈습니다.

벡터 공간으로서의 함수 공간

$$\langle \psi_m | \psi_n \rangle = \delta_{mn}$$

슈뢰딩거 방정식의 미분 연산자가
에르미트 연산자이기 때문에,
서로 다른 고유함수는 항상 직교하게 됩니다.

가장 어려운 (?) 단계

0. 변수분리
1. 일반해 찾기
2. 경계조건 부여
3. 규격화 조건
4. 정규직교조건을 만족하는 기저함수 구성
5. 일반적인 해를 기저함수의 중첩으로 표현
6. 초기조건을 대입해서 계수를 확정

복잡한 방정식의 일반해를 해석적으로 푸는 방법

0. 변수분리
1. 일반해 찾기
2. 경계조건 부여
3. 규격화 조건
4. 정규직교조건을 만족하는 기저함수 구성
5. 일반적인 해를 기저함수의 중첩으로 표현
6. 초기조건을 대입해서 계수를 확정

복잡한 방정식의 일반해를 해석적으로 푸는 방법

STEP 1. **파라미터가 큰 경우**의 해석적 해를 찾고, **경계조건**을 생각한다.

복잡한 방정식의 일반해를 해석적으로 푸는 방법

STEP 2. (적당한 변수선택 뒤) 프로베니우스 방법을 사용해서
무한 급수 형태로 전개한다.

복잡한 방정식의 일반해를 해석적으로 푸는 방법

STEP 3. 다시 한 번 **규격화 가능성**을 검토하고, 경우에 따라
유한차수 다항식으로 제한한다.

전형적인 문제들

1차원 조화진동자:

에르미트 다항식

3차원 구면대칭 반지름방향:

라게르 다항식

3차원 구면대칭 각도방향:

르장드르 다항식

...

연산자 방법

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} (p^2 + (m\omega x)^2)$$

$$= \hbar\omega \left(a_+ a_- + \frac{1}{2} \right)$$

$(a_+)^* = a_-$

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} (p^2 + (m\omega x)^2)$$

$$= \hbar\omega \left(a_+ a_- + \frac{1}{2} \right)$$

$$(a_+)^* = a_-$$

$$[a_-, a_+] = 1$$

$$[\hat{H}, a_{\pm}] = \pm \hbar\omega a_{\pm}$$

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} (p^2 + (m\omega x)^2)$$

$$= \hbar\omega \left(a_+ a_- + \frac{1}{2} \right)$$

$$(a_+)^* = a_-$$

$$[a_-, a_+] = 1$$

$$[\hat{H}, a_{\pm}] = \pm \hbar\omega a_{\pm} \quad \hat{H}(a_{\pm}\psi) = (E \pm \hbar\omega)(a_{\pm}\psi)$$

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} (p^2 + (m\omega x)^2)$$

$$= \hbar\omega \left(\underset{\substack{\text{생성 연산자} \\ \text{creation operator}}}{a_+} \underset{\substack{\text{소멸 연산자} \\ \text{annihilation operator}}}{a_-} + \frac{1}{2} \right)$$

$$\hat{H}(a_{\pm}\psi) = (E \pm \hbar\omega)(a_{\pm}\psi)$$





ψ_0

$$a_- \psi_0 = 0$$



$$\psi_1 \propto a_+ \psi_0$$

$$\psi_0$$



$$\psi_2 \propto (a_+)^2 \psi_0$$

$$\psi_1 \propto a_+ \psi_0$$

$$\psi_0$$



$$\psi_n \propto (a_+)^n \psi_0$$

...

$$\psi_2 \propto (a_+)^2 \psi_0$$

$$\psi_1 \propto a_+ \psi_0$$

$$\psi_0$$

$$a_+ a_- \psi_n = n \psi_n$$

$$a_- a_+ \psi_n = (n + 1) \psi_n$$

$$a_+ \psi_n = \sqrt{n + 1} \psi_{n+1}$$

$$a_- \psi_n = \sqrt{n} \psi_{n-1}$$



$$\psi_n \propto (a_+)^n \psi_0$$

...

$$\psi_2 \propto (a_+)^2 \psi_0$$

$$\psi_1 \propto a_+ \psi_0$$

$$\psi_0$$

$$a_+ a_- \psi_n = n \psi_n$$

$$a_- a_+ \psi_n = (n + 1) \psi_n$$

$$a_+ \psi_n = \sqrt{n + 1} \psi_{n+1}$$

$$a_- \psi_n = \sqrt{n} \psi_{n-1}$$

$$\psi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a_+)^n \psi_0$$



$$\psi_n \propto (a_+)^n \psi_0$$

...

$$\psi_2 \propto (a_+)^2 \psi_0$$

$$\psi_1 \propto a_+ \psi_0$$

$$\psi_0$$

기저 벡터의 직교성

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_m^*(x) \psi_n(x) dx = \delta_{mn}$$

연산자 방법으로 간단하게 증명할 수 있습니다.

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} (p^2 + (m\omega x)^2)$$

$$E = \hbar\omega \left(a_+ a_- + \frac{1}{2} \right)$$

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} (p^2 + (m\omega x)^2)$$

$$E = \hbar\omega \left(\textcolor{yellow}{n} + \frac{1}{2} \right)$$

푸리에 변환 Fourier transformation



조제프 푸리에

푸리에 급수 Fourier series 란?

푸리에 급수

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2n\pi x}{T} + b_n \sin \frac{2n\pi x}{T} \right)$$

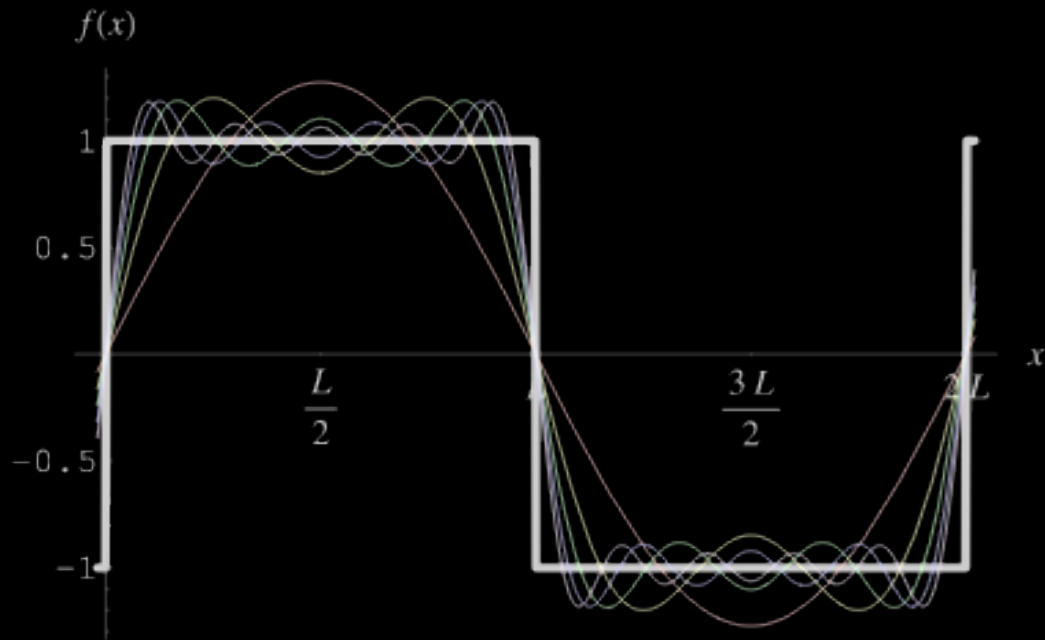
일정 **주기**를 가지는 임의의 함수는 사인과 코사인의 조합으로
언제나 표현할 수 있습니다.

푸리에 급수

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2n\pi x}{T} + b_n \sin \frac{2n\pi x}{T} \right)$$

이것은 함수가 다양한 **모드**의 조합으로 표현된다는 것을 의미합니다.

푸리에 급수



이것은 함수가 다양한 **모드**의 조합으로 표현된다는 것을 의미합니다.

푸리에 급수

$$a_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos \frac{2n\pi x}{T} dx$$

$$b_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin \frac{2n\pi x}{T} dx$$

각 모드에 해당하는 계수는 함수 공간의 직교성에 의해
위와 같은 적분을 사용해서 구할 수 있습니다.

푸리에 급수 $\rightarrow$ 푸리에 변환

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx} dk$$

함수의 주기가 무한대가 되면,
급수가 적분으로 바뀝니다.

푸리에 급수 $\rightarrow$ 푸리에 변환

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

다시 한 번 함수 공간의 완비성에 의해,
위와 같은 역변환도 존재합니다.

푸리에 변환의 완비성

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx} dk$$

푸리에 변환을 두 번 하면, 처음의 함수로 돌아옵니다.

푸리에 변환의 완비성

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx} dk \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x') e^{ikx} e^{-ikx'} dx' dk \end{aligned}$$

푸리에 변환을 두 번 하면, 처음의 함수로 돌아옵니다.

푸리에 변환의 완비성

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx} dk \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x') e^{ik(x-x')} dx' dk \end{aligned}$$

푸리에 변환을 두 번 하면, 처음의 함수로 돌아옵니다.

푸리에 변환의 완비성

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx} dk \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x') e^{ik(x-x')} dx' dk \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \delta(x - x') dx' \end{aligned}$$

푸리에 변환을 두 번 하면, 처음의 함수로 돌아옵니다.

각각의 모드 자체는 규격화가 가능하지 않아서
물리적인 의미가 없지만,
여러 모드들이 중첩되어 있는 파동은
물리적 의미를 가지게 됩니다.

선형 방정식을 만족하는 임의의 함수는
각 푸리에 모드의 중첩으로 볼 수 있습니다.

$$\nabla^2 \phi + m^2 \phi = 0$$

일반적으로 아래와 같이 전개됩니다.

$$\phi = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} (a_p e^{-ip \cdot x} + a_p^\dagger e^{ip \cdot x})$$

파동을 푸리에 변환하면, 같은 파동을
에너지 ω_p 를 가지는 입자들의 중첩으로 보게 됩니다.

$$\phi = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} (a_p e^{-ip \cdot x} + a_p^\dagger e^{ip \cdot x})$$

각 푸리에 모드의 계수들은
에너지 ω_p 를 가지는 입자들의 개수와 관련됩니다.

$$\phi = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} (a_p e^{-ip \cdot x} + a_p^\dagger e^{ip \cdot x})$$

장을 양자화하게 되면,
푸리에 모드의 계수들이 연산자가 됩니다.

$$\left[a_p, a_{p'}^\dagger \right] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(p - p')$$

이것은 에너지 ω_p 를 가지는 각각의 입자들을
조화진동자로 생각하는 것과 같습니다.

$$\left[a_p, a_{p'}^\dagger \right] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(p - p')$$

$$H = \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right)$$

$$H = \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right)$$



$$H = \sum_{i=1}^n \hbar\omega_i \left(a_i^\dagger a_i + \frac{1}{2} \right)$$

$$H = \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right)$$



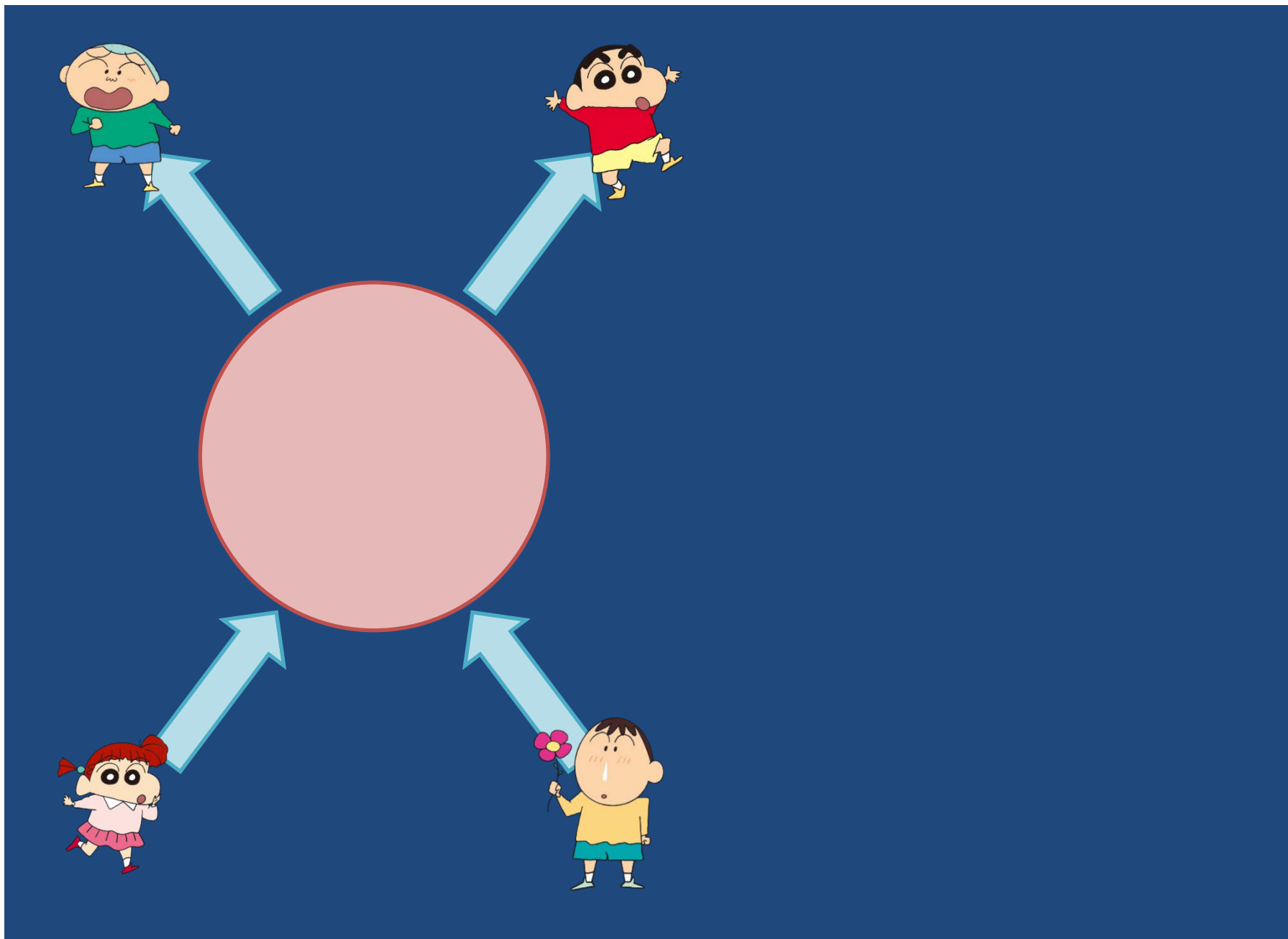
$$H = \sum_{i=1}^n \hbar\omega_i \left(a_i^\dagger a_i + \frac{1}{2} \right)$$



$$H = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \hbar\omega_p \left(a_p^\dagger a_p + \frac{1}{2} \right)$$

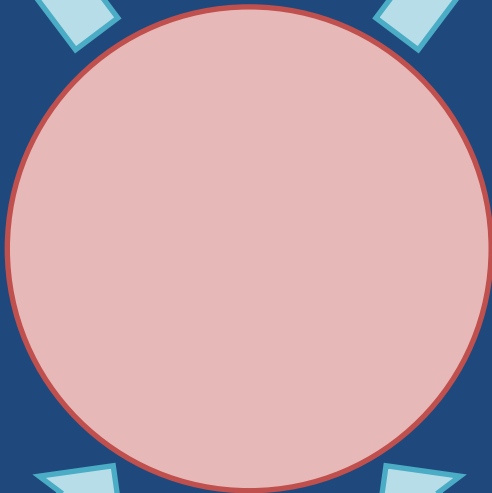
$$\begin{aligned}
 H &= \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \hbar \omega_{\mathbf{p}} \left(a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} + \frac{1}{2} \right) \\
 &= \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \hbar \omega_{\mathbf{p}} \left(n_{\mathbf{p}} + \frac{1}{2} \right)
 \end{aligned}$$

장의 해밀토니안은 각 모드($\mathbf{p}$)에 대해서
 에너지 ($\hbar \omega_{\mathbf{p}}$) $\times$ 입자의 수 ($n_{\mathbf{p}}$)
 와 같이 표현됩니다.



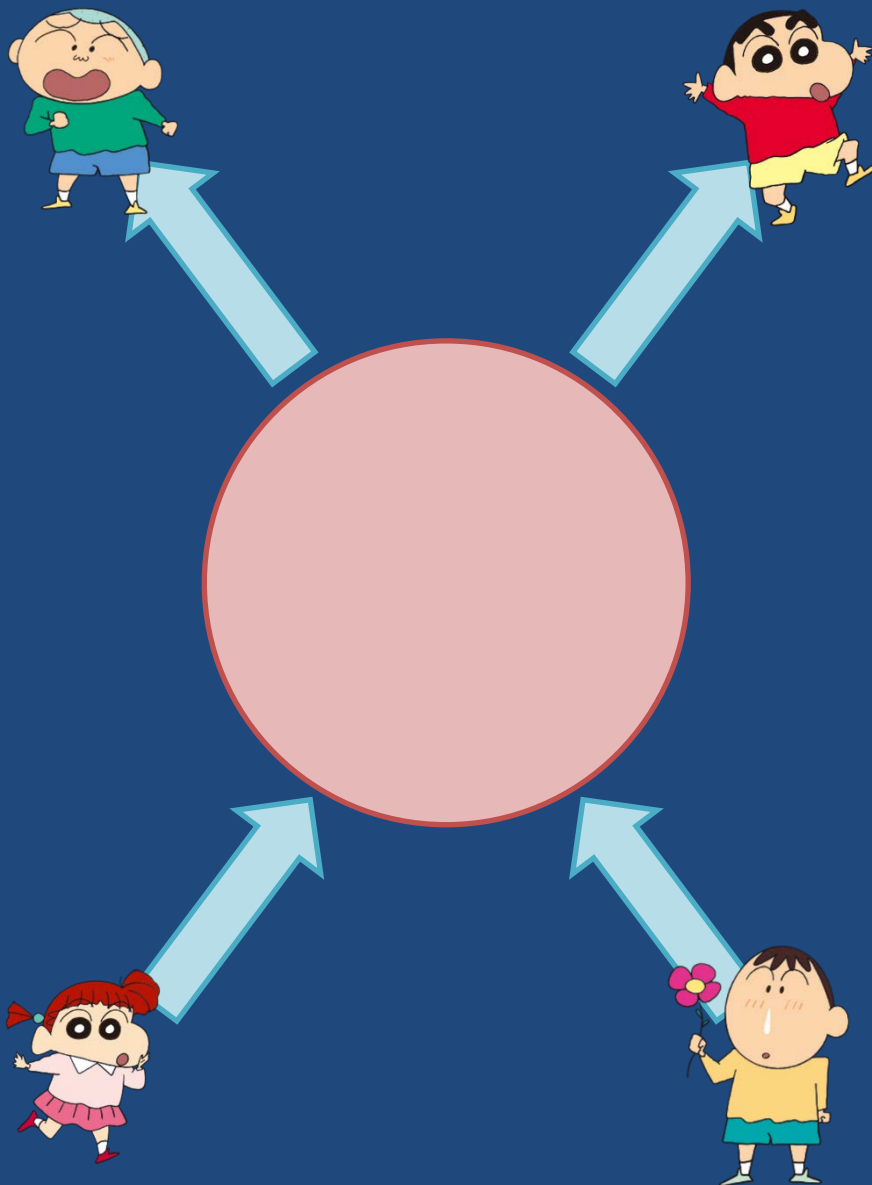


최종상태



초기상태





최종상태

$$| \text{Shin-chan} \text{ Kikichi} \rangle = a^\dagger a^\dagger |0\rangle$$

초기상태

$$| \text{Misae} \text{ Nohy} \rangle = a^\dagger a^\dagger |0\rangle$$



최종상태

$$| \text{boy in green} \text{ boy in red} \rangle$$

$$= a^\dagger a^\dagger |0\rangle$$

$$e^{-i \int \frac{H}{\hbar} dt}$$



초기상태

$$| \text{girl} \text{ boy with flower} \rangle$$

$$= a^\dagger a^\dagger |0\rangle$$



$$e^{-i \int \frac{H}{\hbar} dt}$$

확률

$$\approx \left| \langle \text{boy in red} \text{ boy in green} \mid e^{-i \int \frac{H}{\hbar} dt} \mid \text{girl in pink} \text{ boy in yellow} \rangle \right|^2$$



$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \hbar \omega_p \left(a_p^\dagger a_p + \frac{1}{2} \right)$$

장의 해밀토니안에는 발산하는 항이 있습니다.
각 입자의 바닥상태 에너지를 모두 더하면
무한대가 되기 때문입니다.

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \hbar \omega_p \left(a_p^\dagger a_p + \frac{1}{2} \right)$$

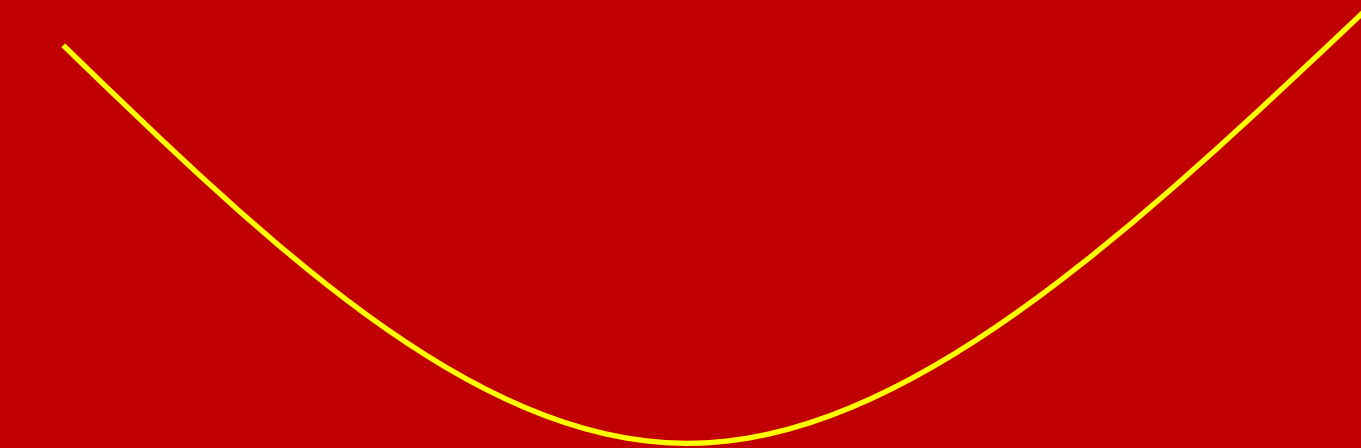
이것을 진공 에너지 vacuum energy라고 부릅니다.
진공 에너지를 어떻게 계산해야 하는지에 대해서
약간의 어려움이 있습니다.

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$$

어쩌면 진공 에너지가 우주 상수를 설명할 수도 있습니다.
그러나 이론적으로 계산되는 진공 에너지와
측정된 우주 상수 사이에는 큰 차이가 있습니다.
이것을 우주상수문제라고 부릅니다.

속박 bound 과 산란 scattering 상태

$V(x)$

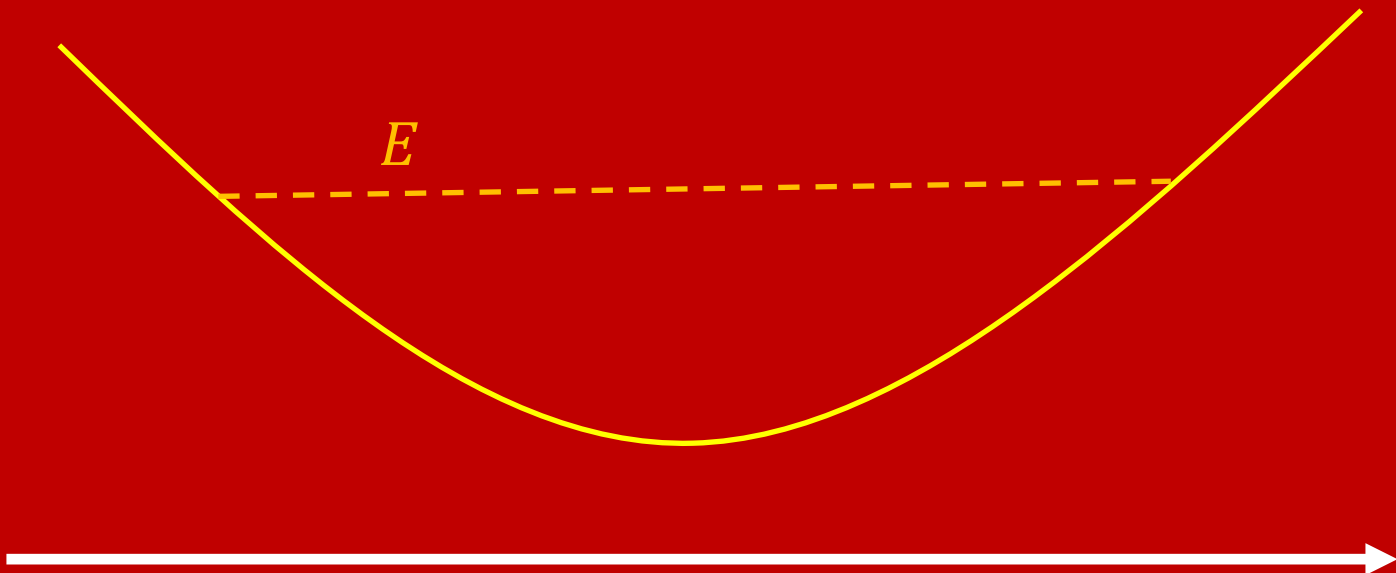


x

$V(x)$

E

x

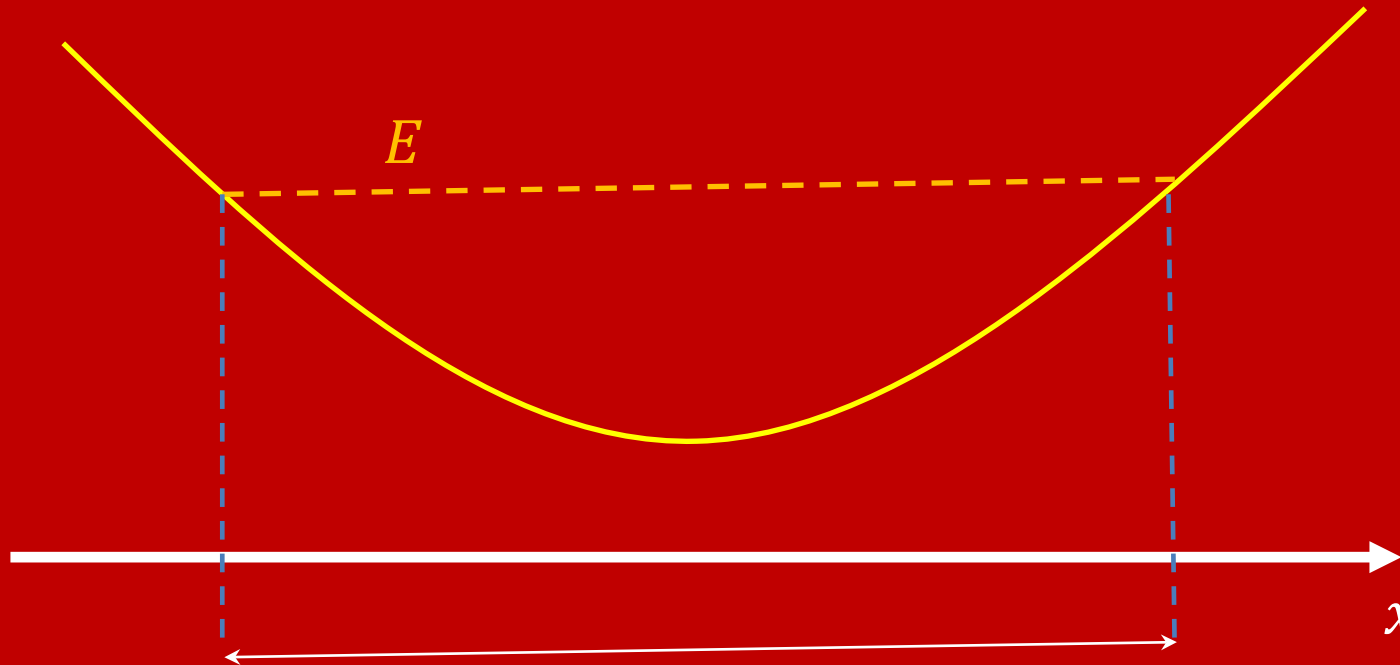


$V(x)$

E

x

고전적으로 허용된 영역



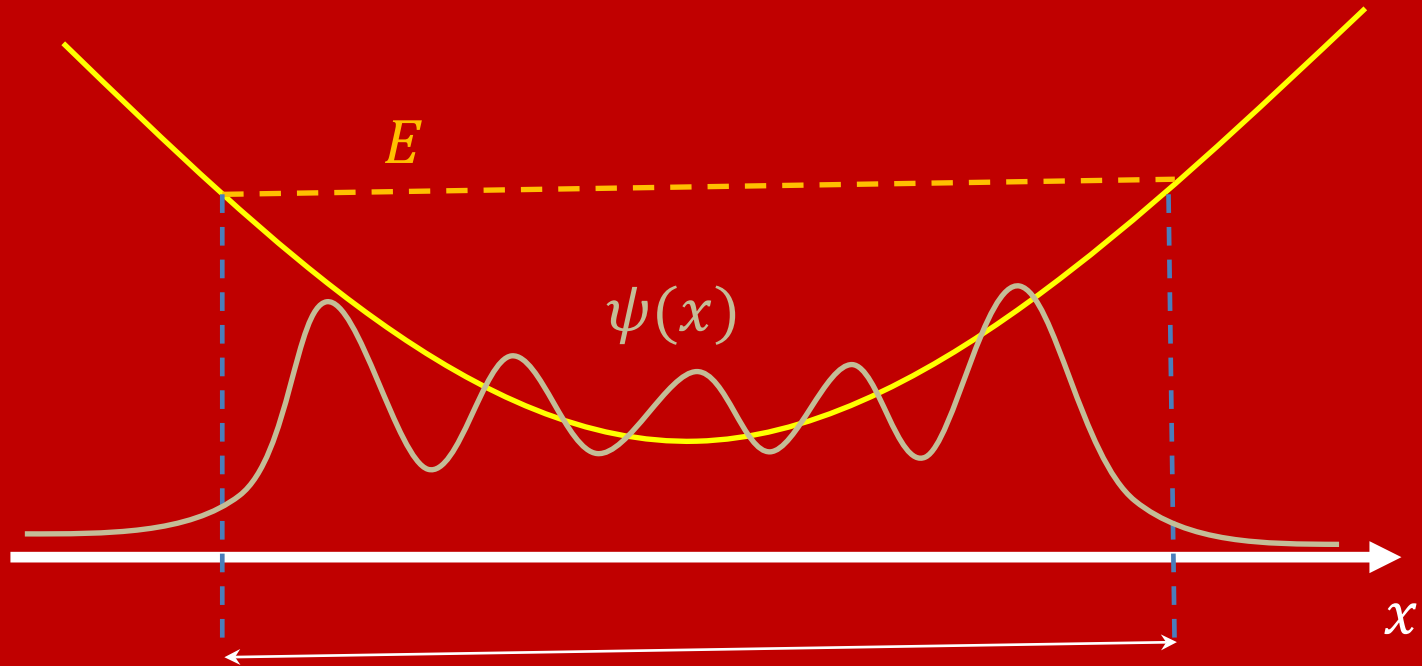
$V(x)$

E

$\psi(x)$

x

고전적으로 허용된 영역



$V(x)$

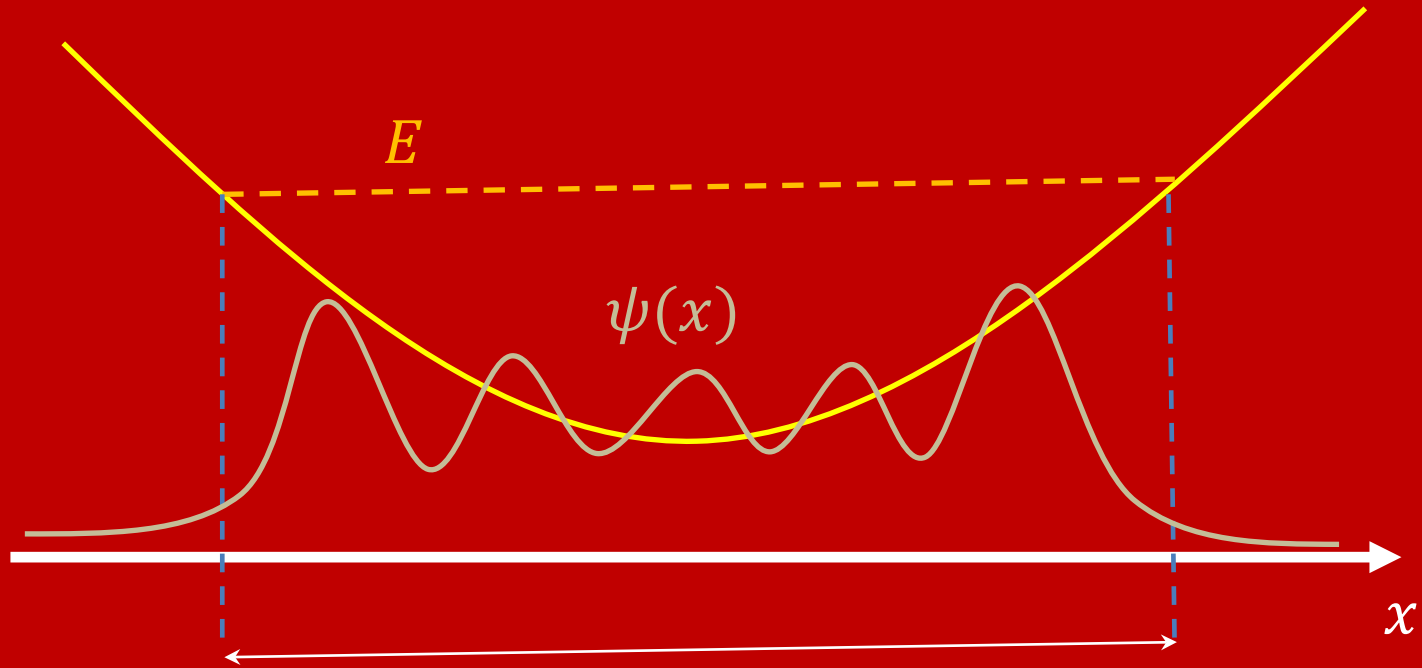
E

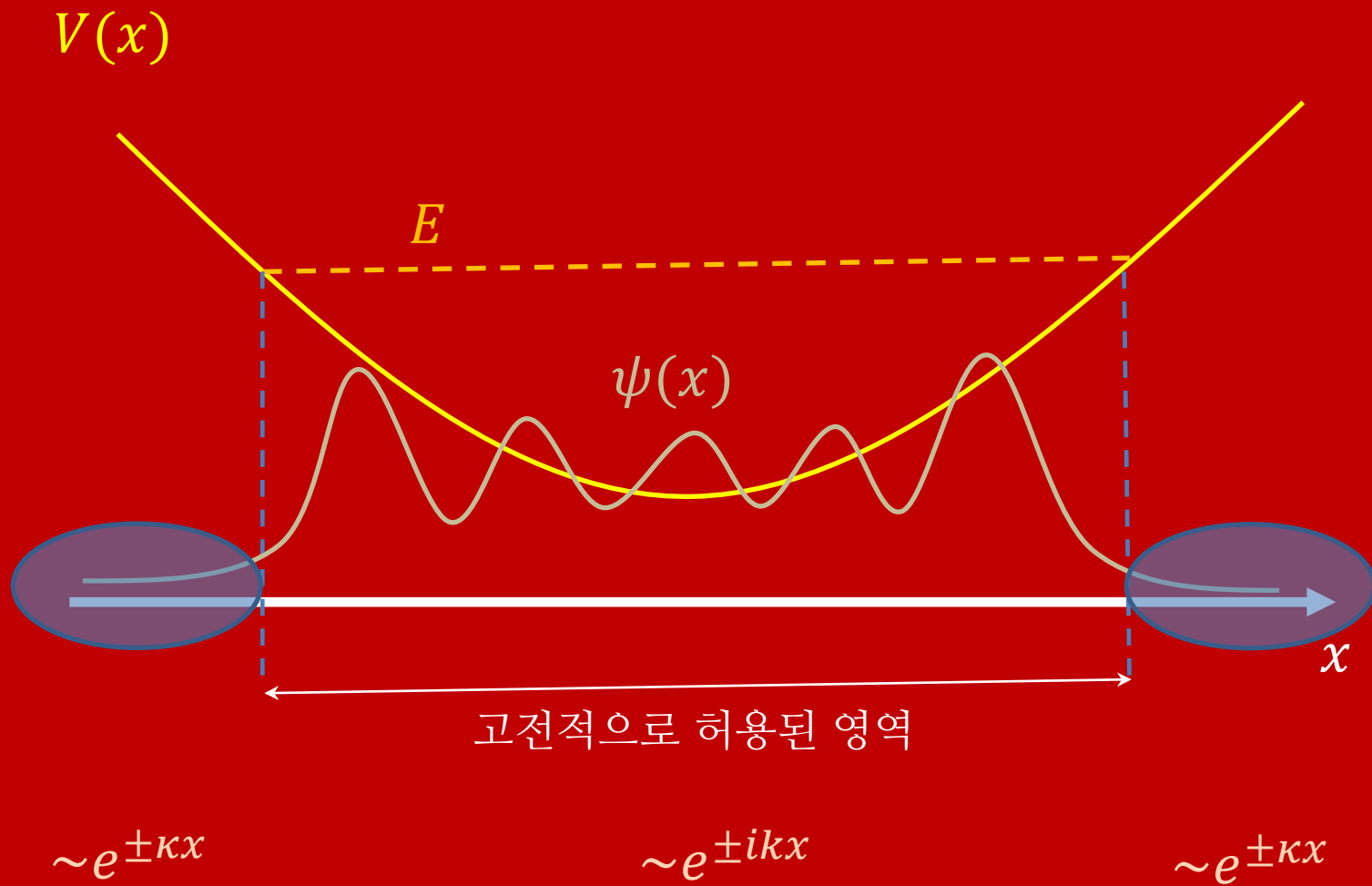
$\psi(x)$

x

고전적으로 허용된 영역

$\sim e^{\pm ikx}$





$V(x)$

E

$\psi(x)$

x

양자역학적으로
가능한 영역

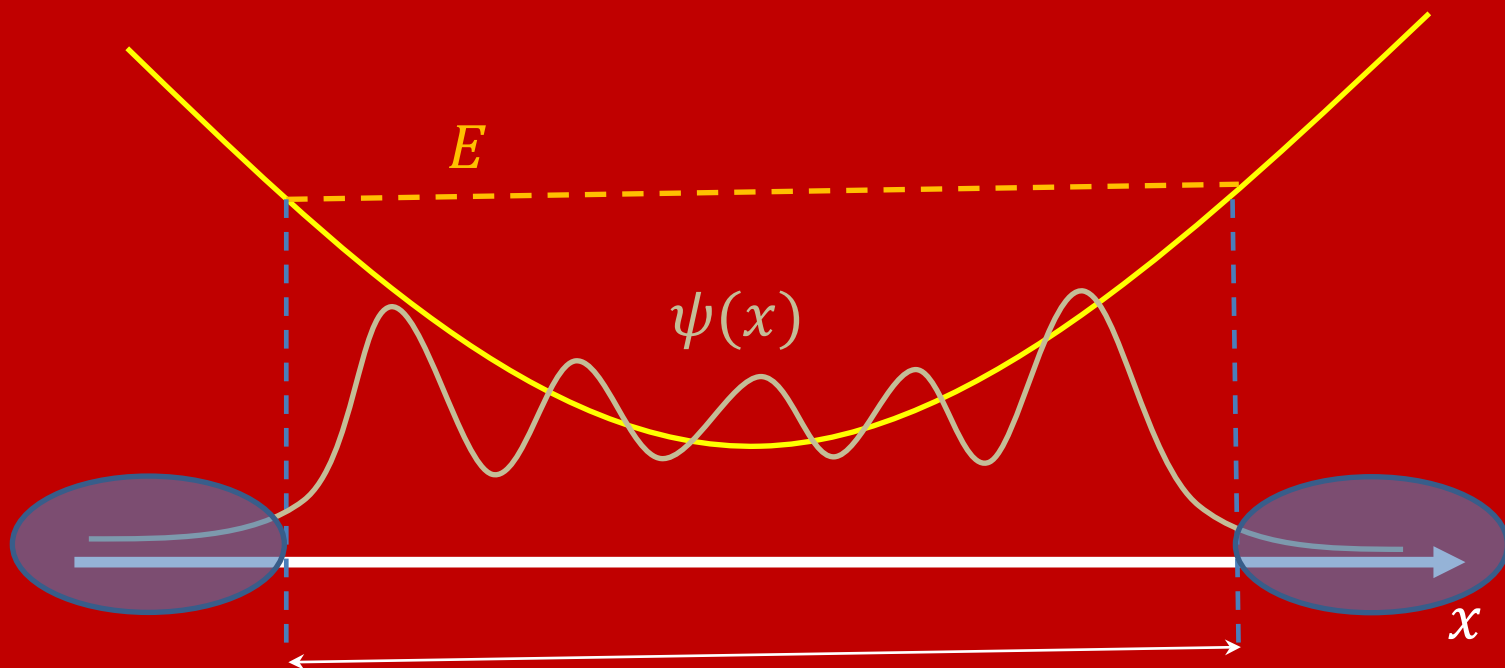
$\sim e^{\pm \kappa x}$

고전적으로 허용된 영역

$\sim e^{\pm i k x}$

양자역학적으로
가능한 영역

$\sim e^{\pm \kappa x}$



$V(x)$

E

$\psi(x)$

x

양자역학적으로
가능한 영역

$\sim e^{\pm \kappa x}$

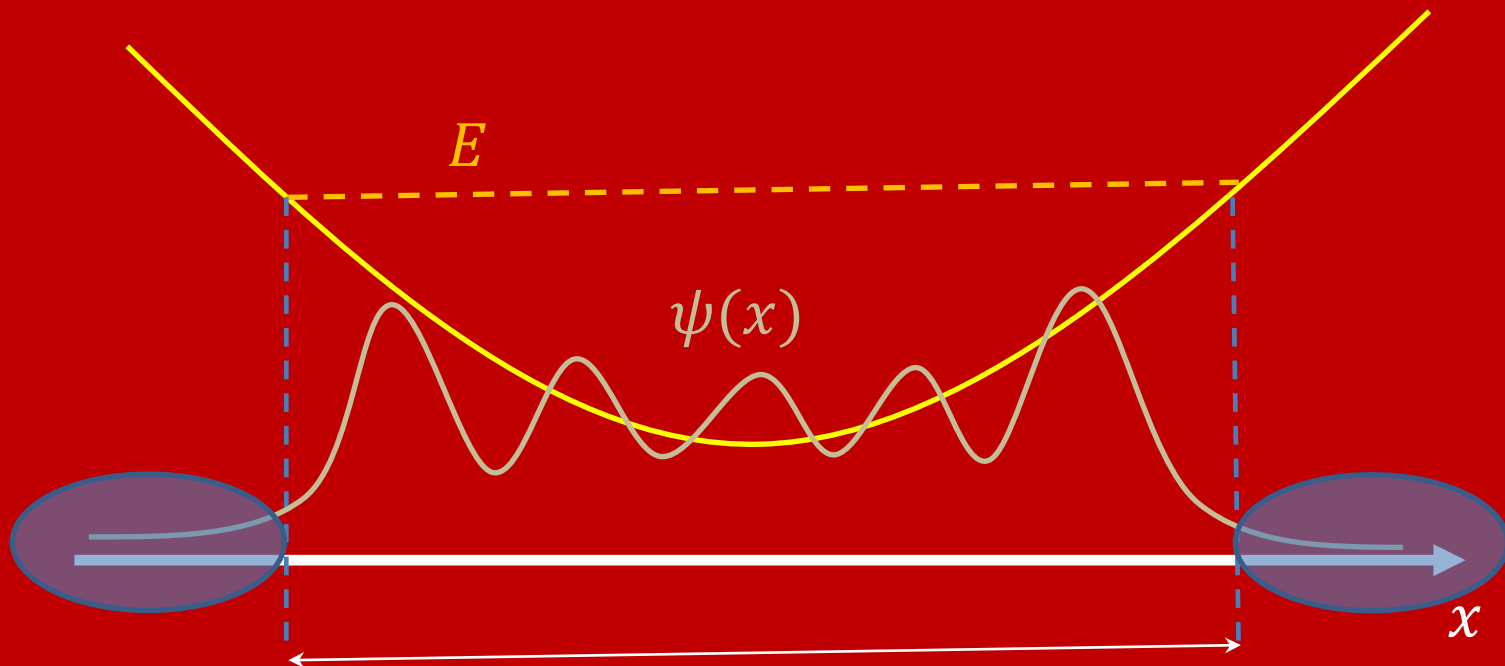
고전적으로 허용된 영역

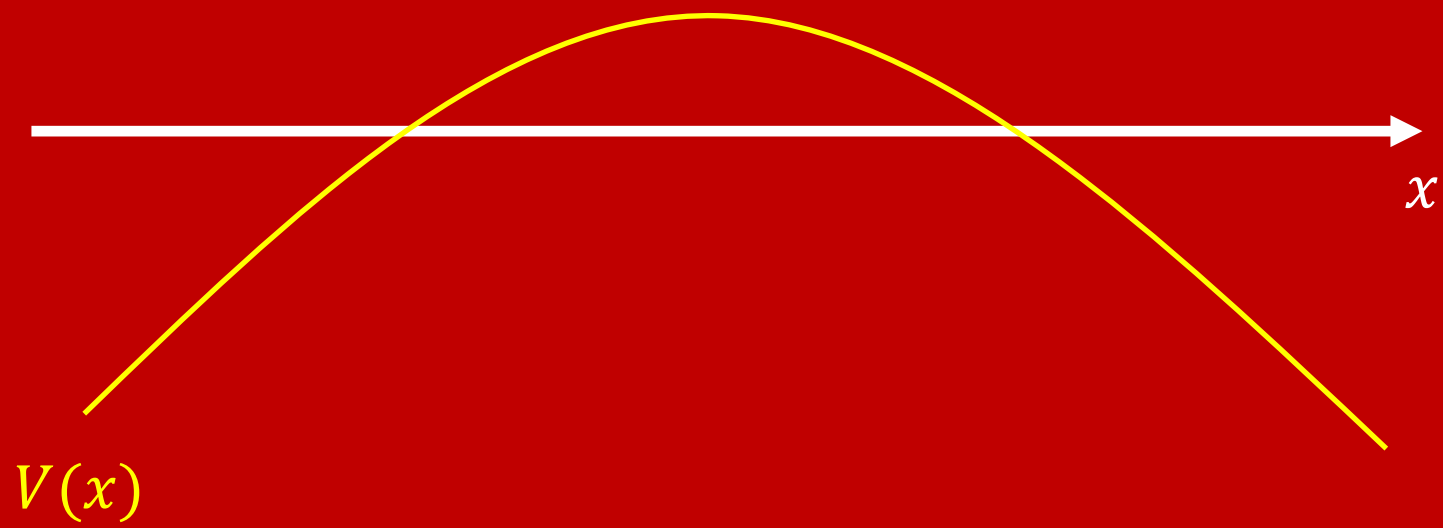
$\sim e^{\pm i k x}$

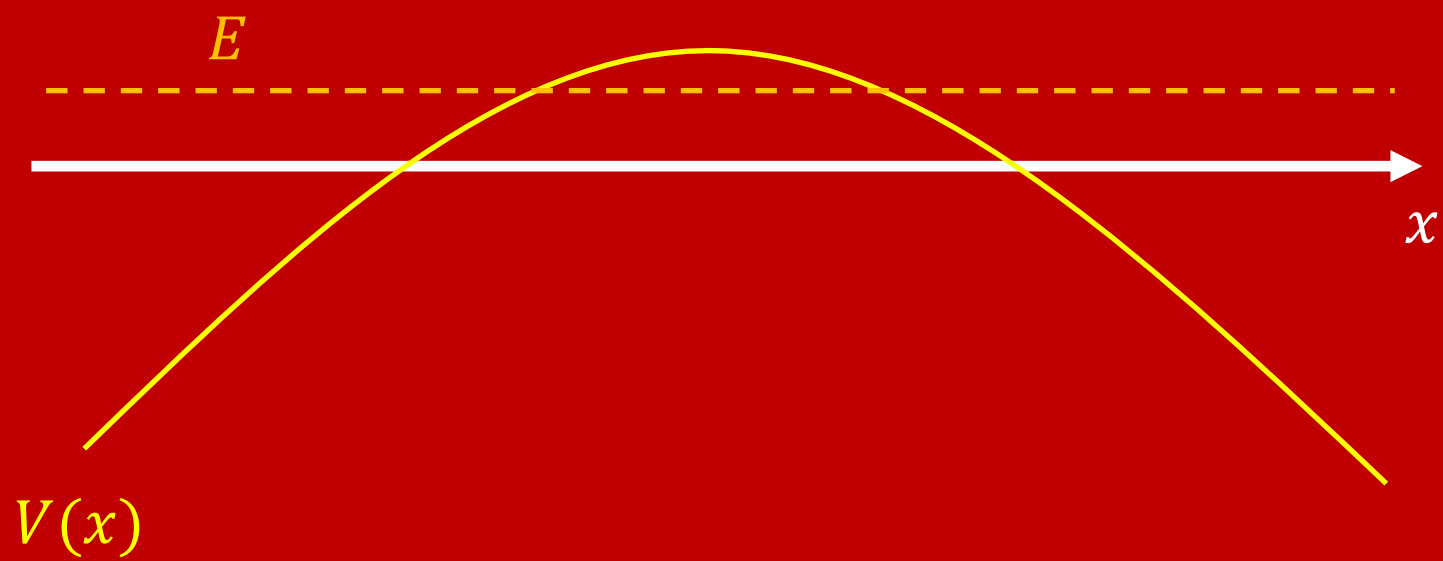
양자역학적으로
가능한 영역

$\sim e^{\pm \kappa x}$

속박 상태 bound state







고전적으로 허용된 영역

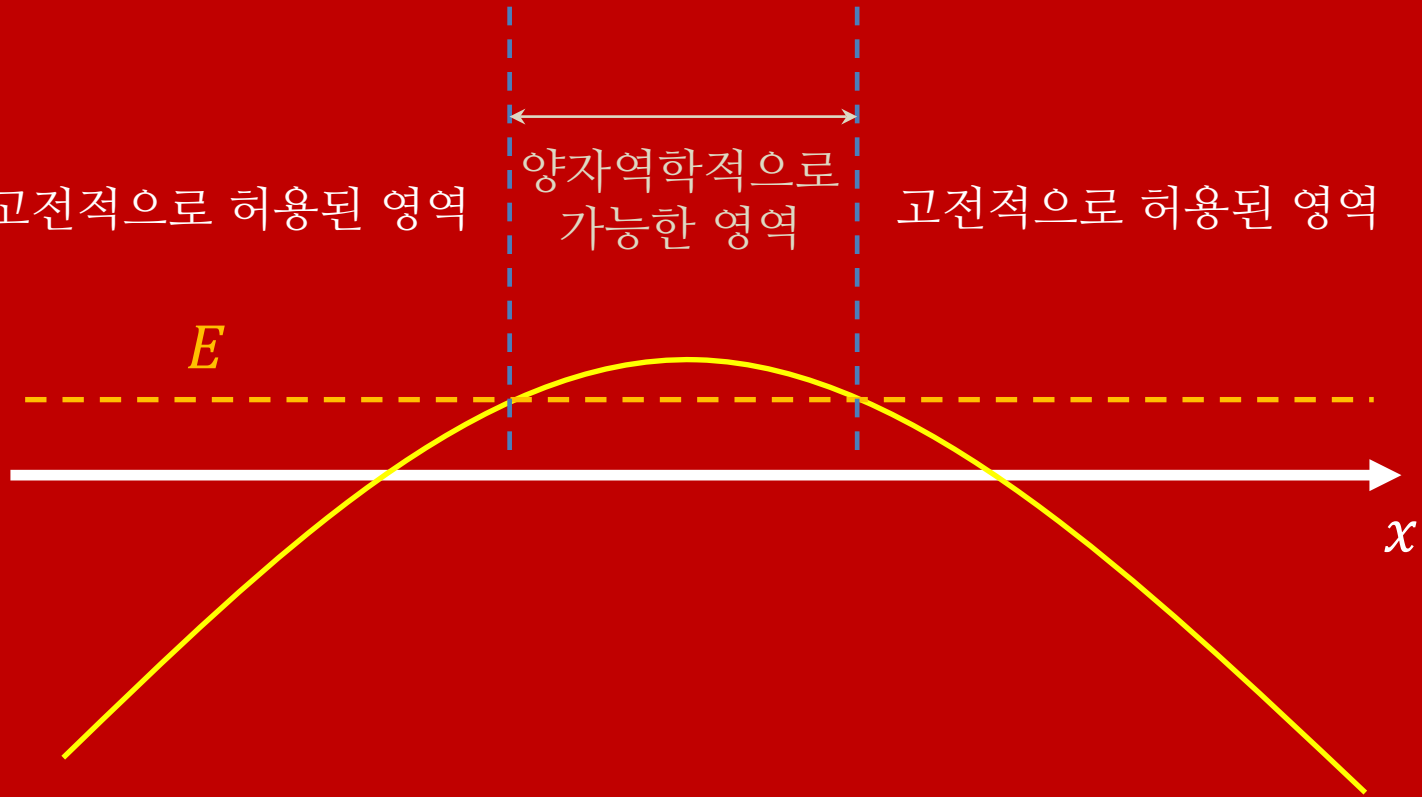
양자역학적으로
가능한 영역

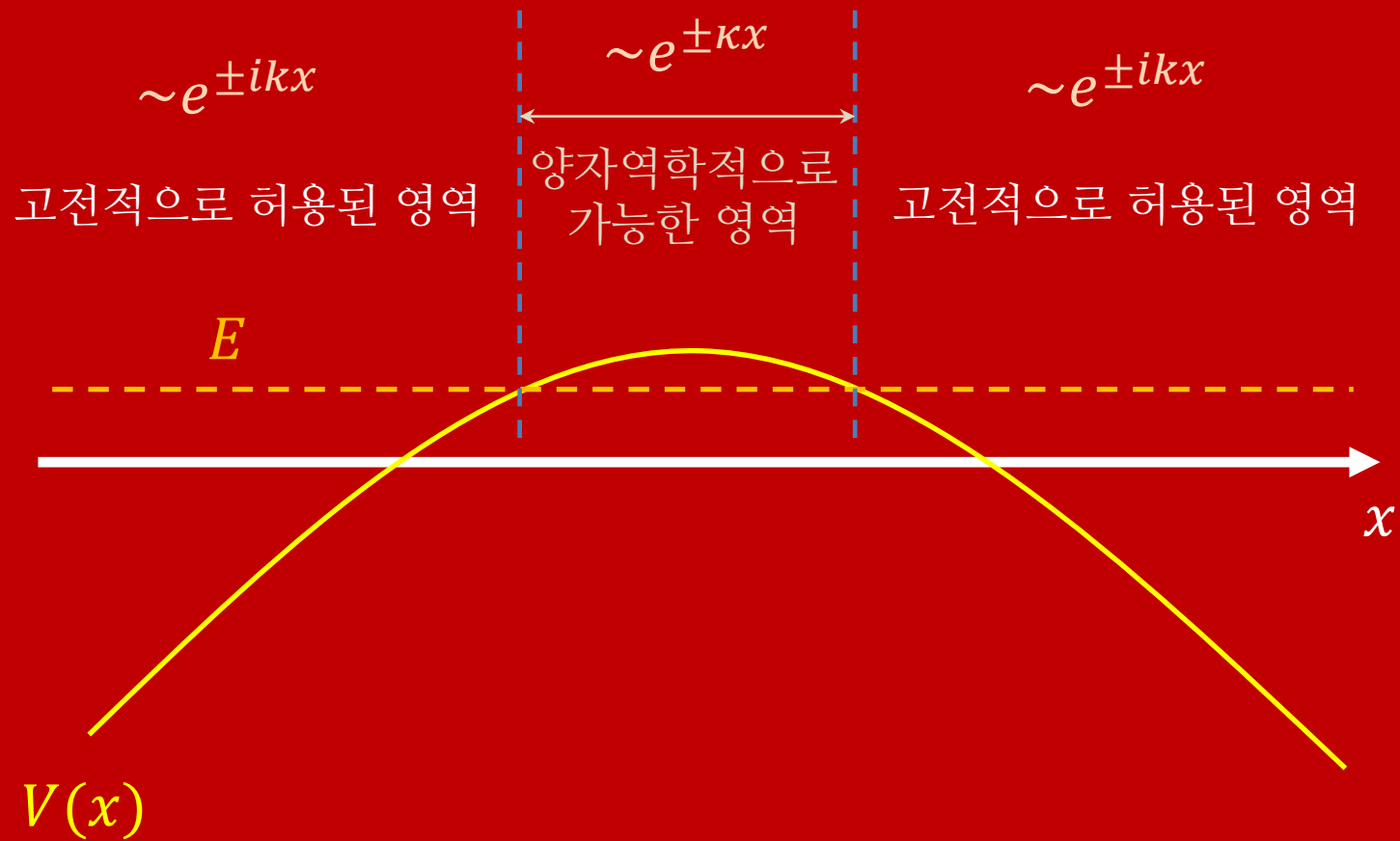
고전적으로 허용된 영역

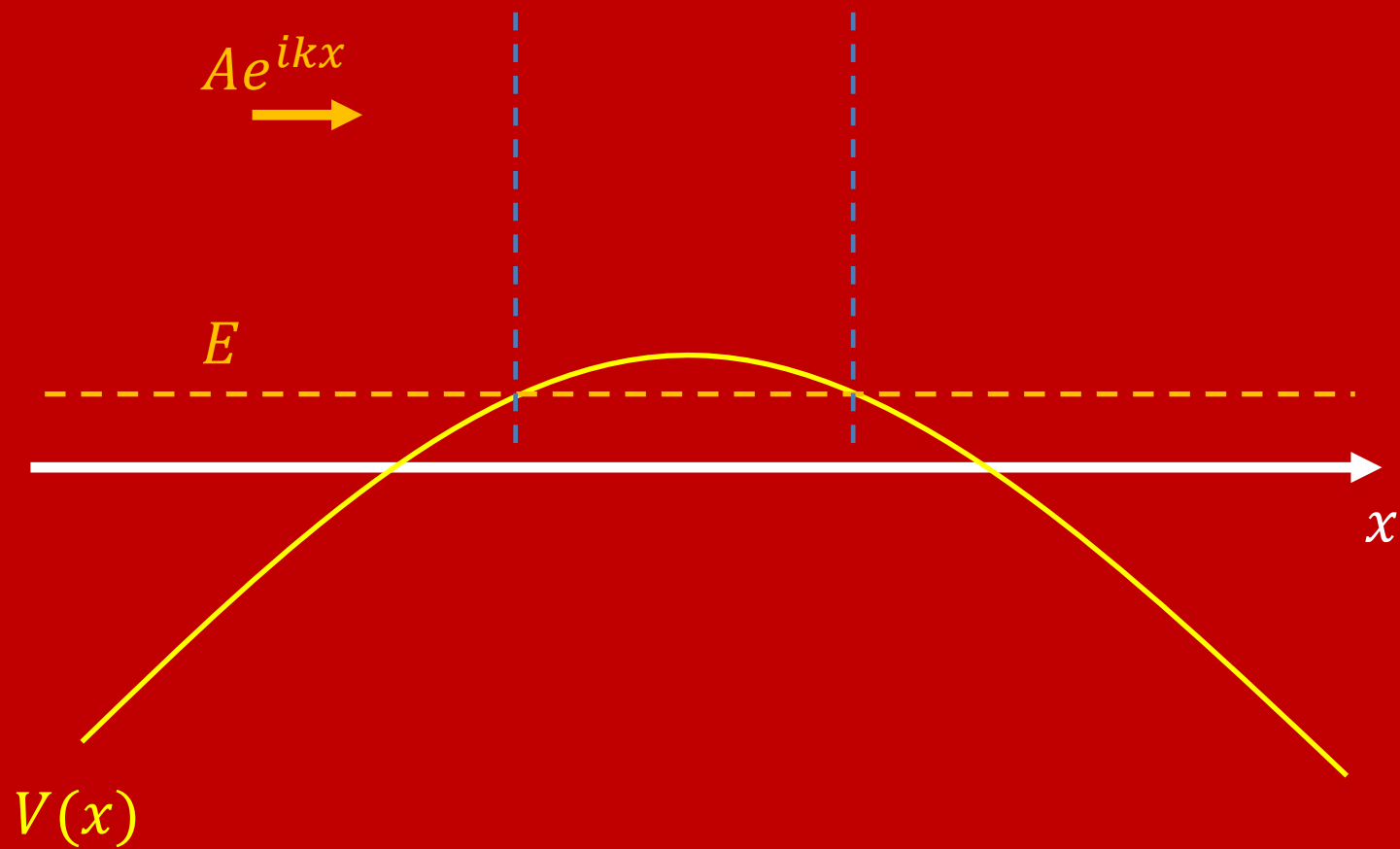
E

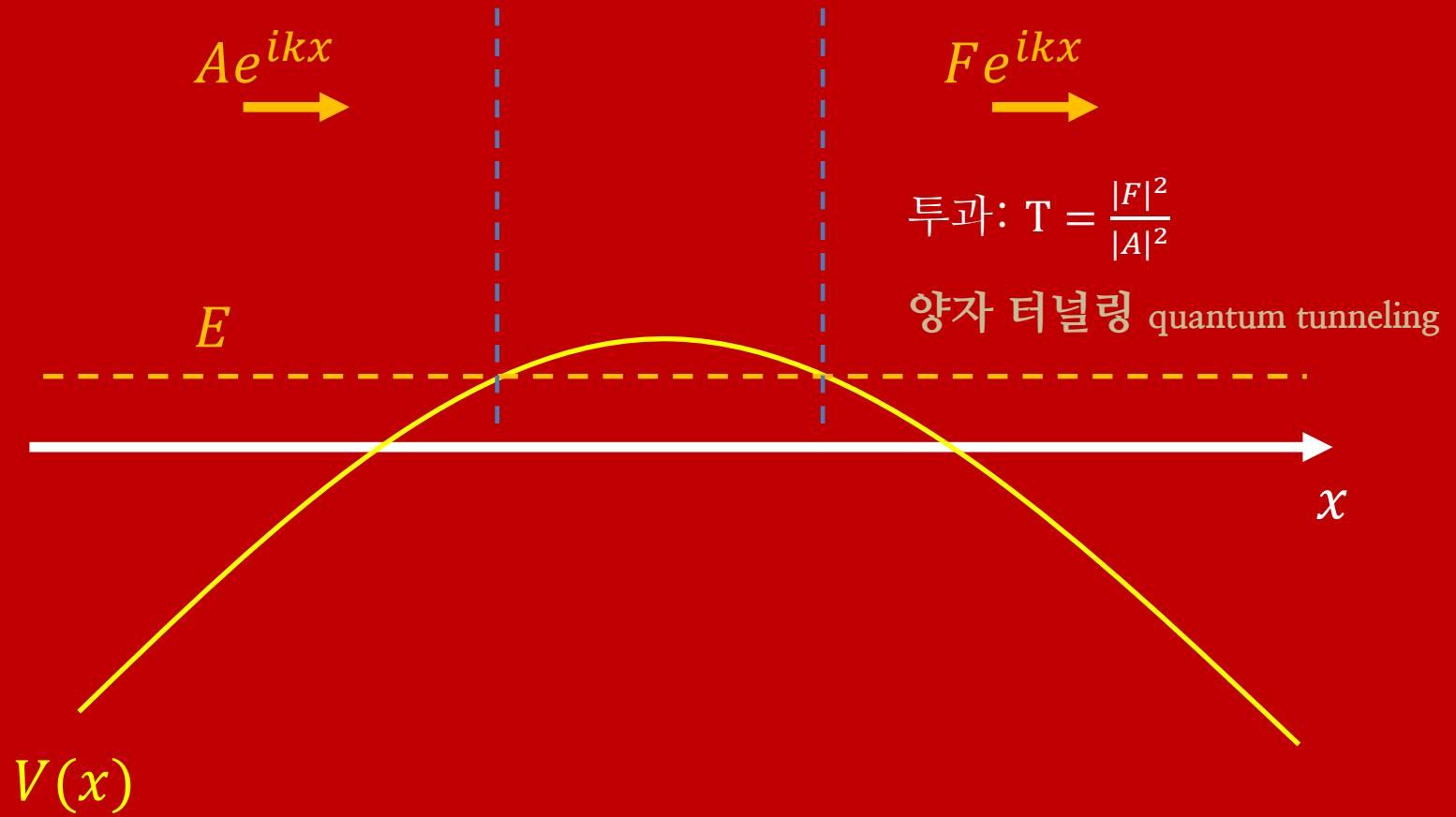
$V(x)$

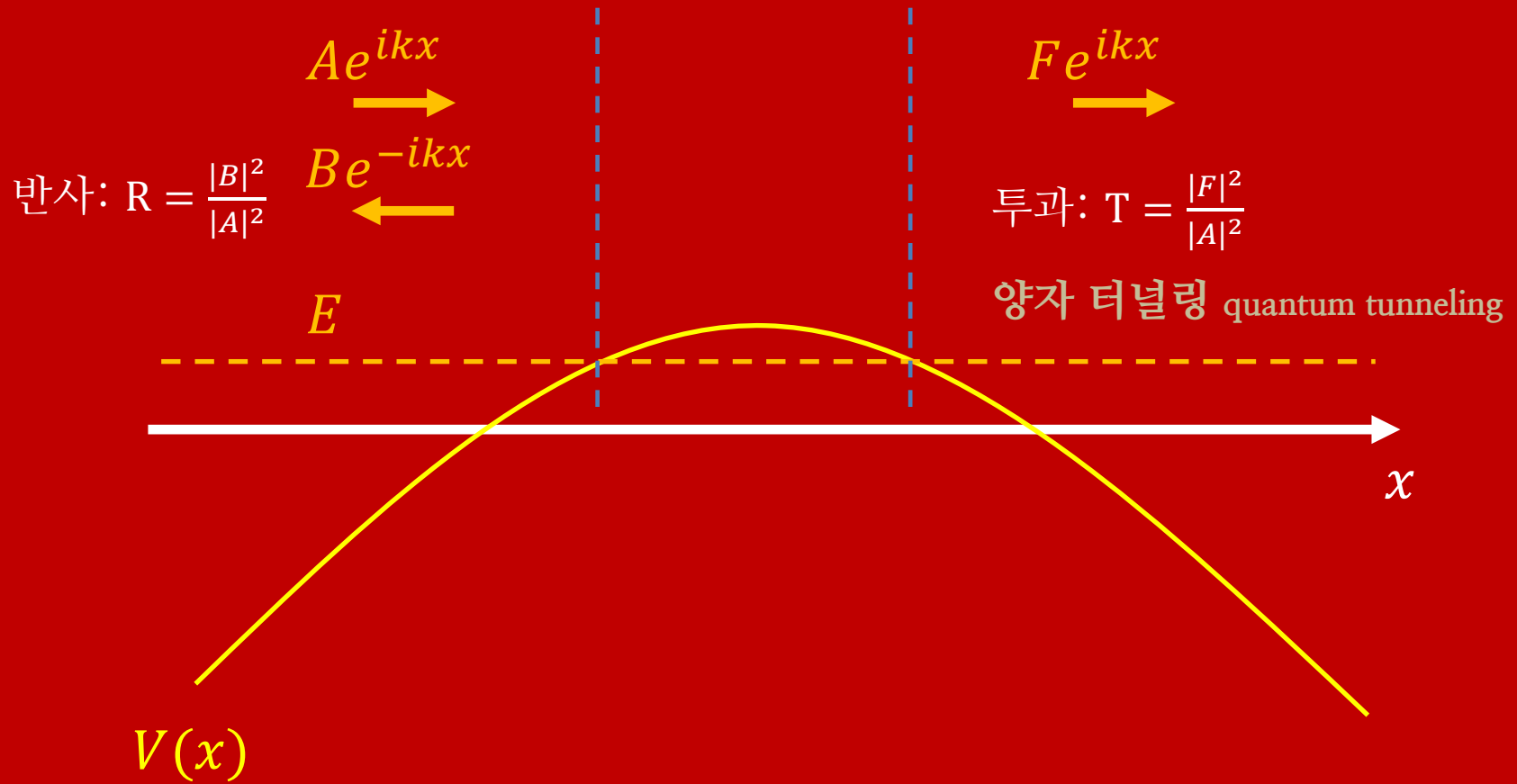
x

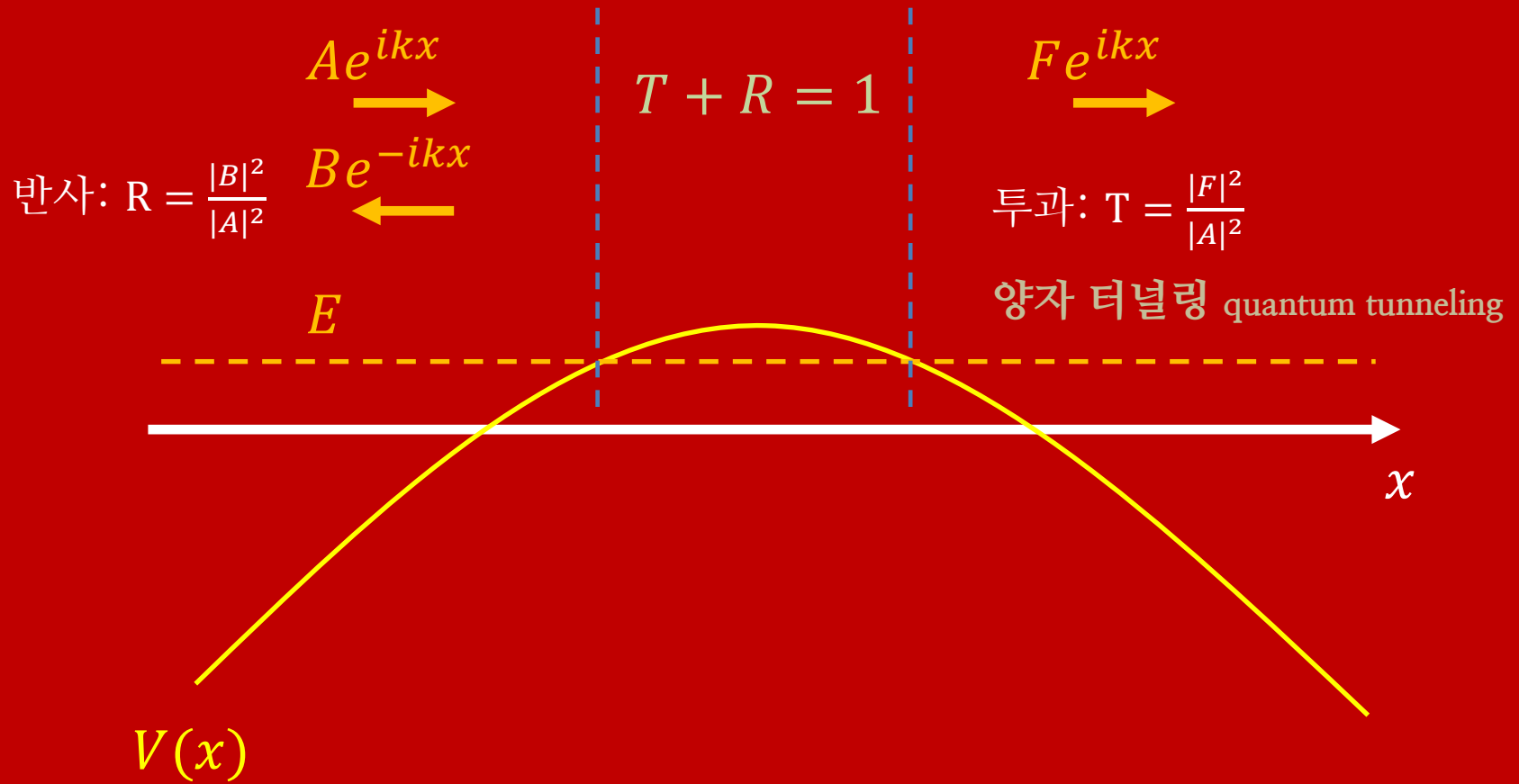


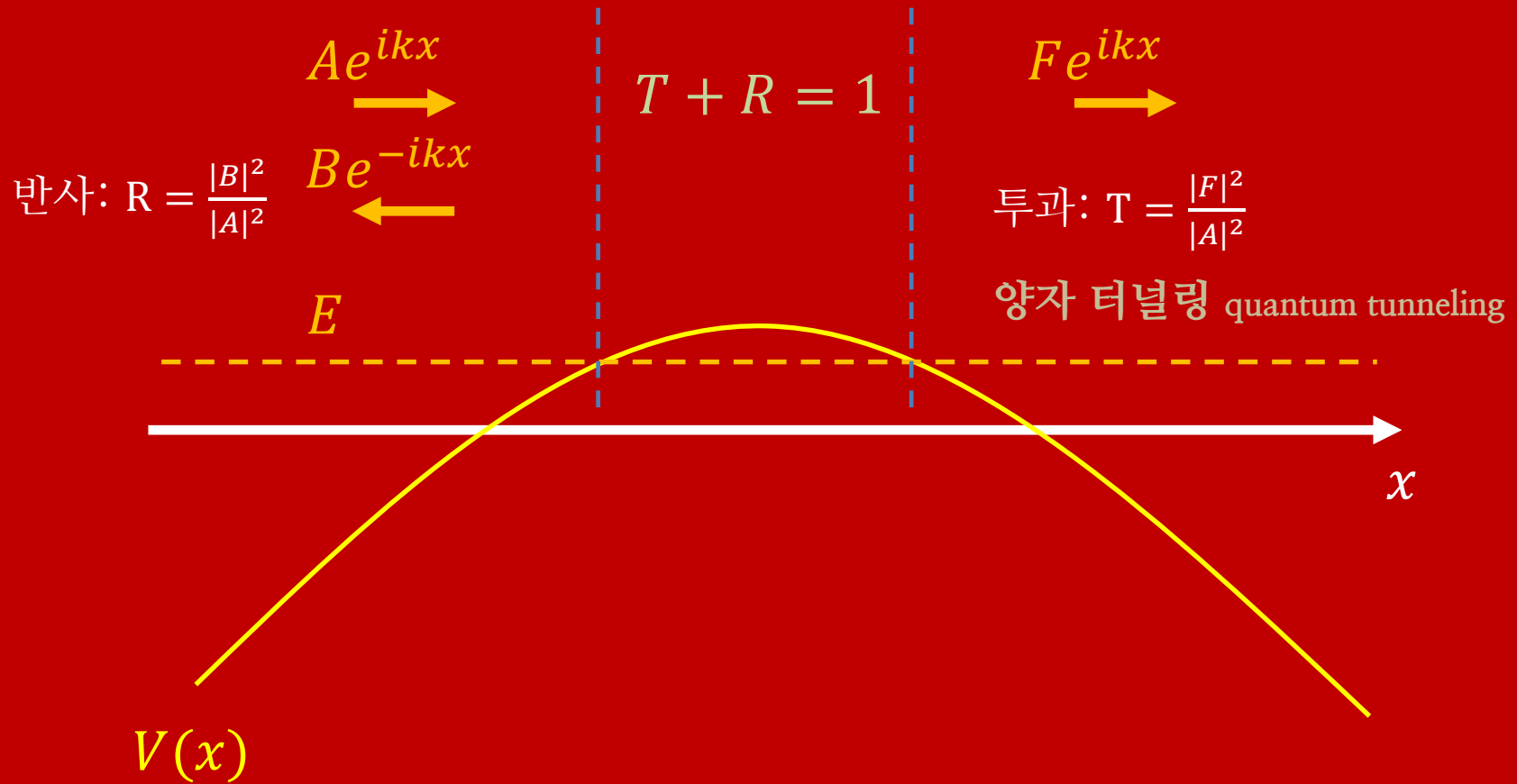






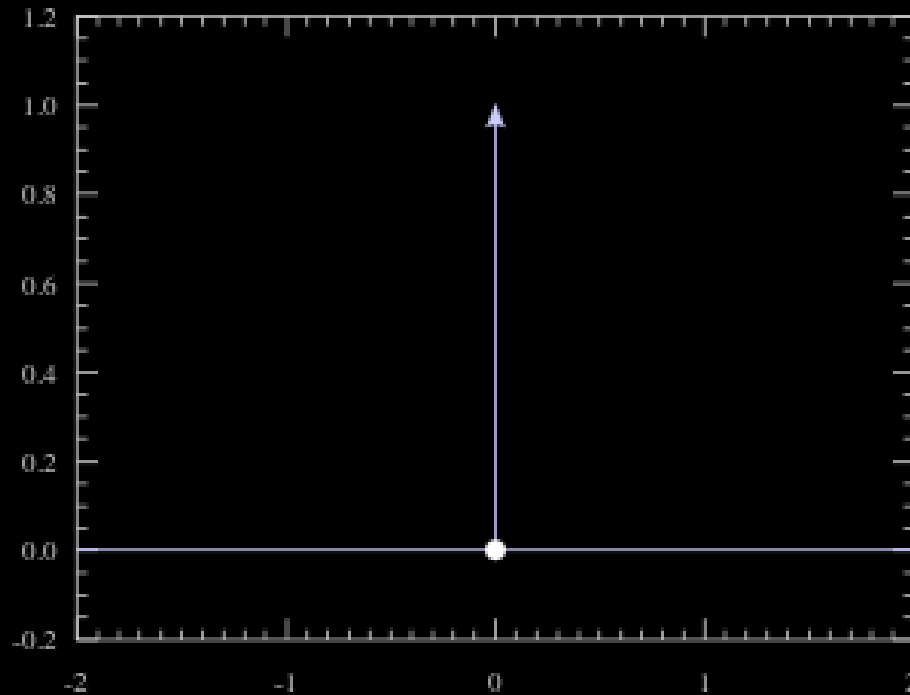






산란 상태 scattering state

디랙 δ -함수와 유한한 사각우물 퍼텐셜은
속박과 산란상태를 모두 허용할 수 있는
흥미로운 예가 됩니다.



$$\delta_a(x) = \frac{1}{a\sqrt{\pi}} e^{-x^2/a^2}$$

디랙 δ -함수는 함수들의 극한으로 정의할 수 있습니다.

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V \right) \psi = E\psi$$

시간에 의존하지 않는 슈뢰딩거 방정식은
선형 2차 상미분 방정식입니다.

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V \right) \psi = E\psi$$

따라서 모든 점에서는 ψ 및 ψ' 가 연속이어야 합니다.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V \right) \psi dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} E \psi dx$$

퍼텐셜이 δ -함수인 경우에는 발산하는 곳 근방에서
 ψ 가 연속이고
 ψ' 은 위의 방정식을 만족시켜야 합니다.



최종상태

$$| \text{boy in green} \text{ boy in red} \rangle$$

$$= a^\dagger a^\dagger |0\rangle$$

$$e^{-i \int \frac{H}{\hbar} dt}$$



초기상태

$$| \text{girl} \text{ boy with flower} \rangle$$

$$= a^\dagger a^\dagger |0\rangle$$



$$e^{-i \int \frac{H}{\hbar} dt}$$

확률

$$\approx \left| \langle \text{boy in red} \text{ boy in green} \mid e^{-i \int \frac{H}{\hbar} dt} \mid \text{girl in pink} \text{ boy in yellow} \rangle \right|^2$$





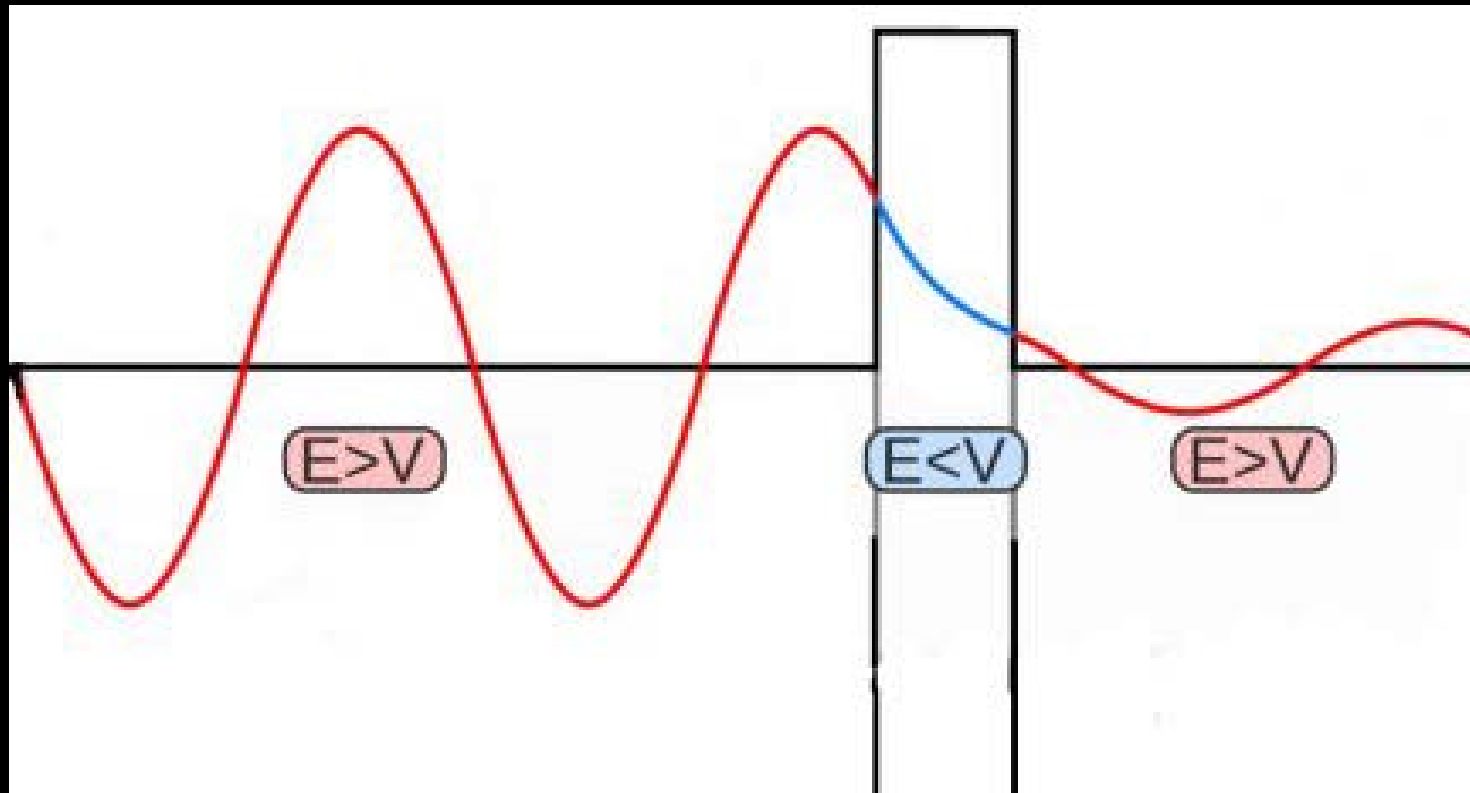
$$e^{-i \int \frac{H}{\hbar} dt}$$

확률

$$\approx \left| \langle \text{Shin-chan, Kikyo} \mid e^{-i \int \frac{H}{\hbar} dt} \mid \text{Misae, Nohy} \rangle \right|^2$$

S-행렬 S-matrix

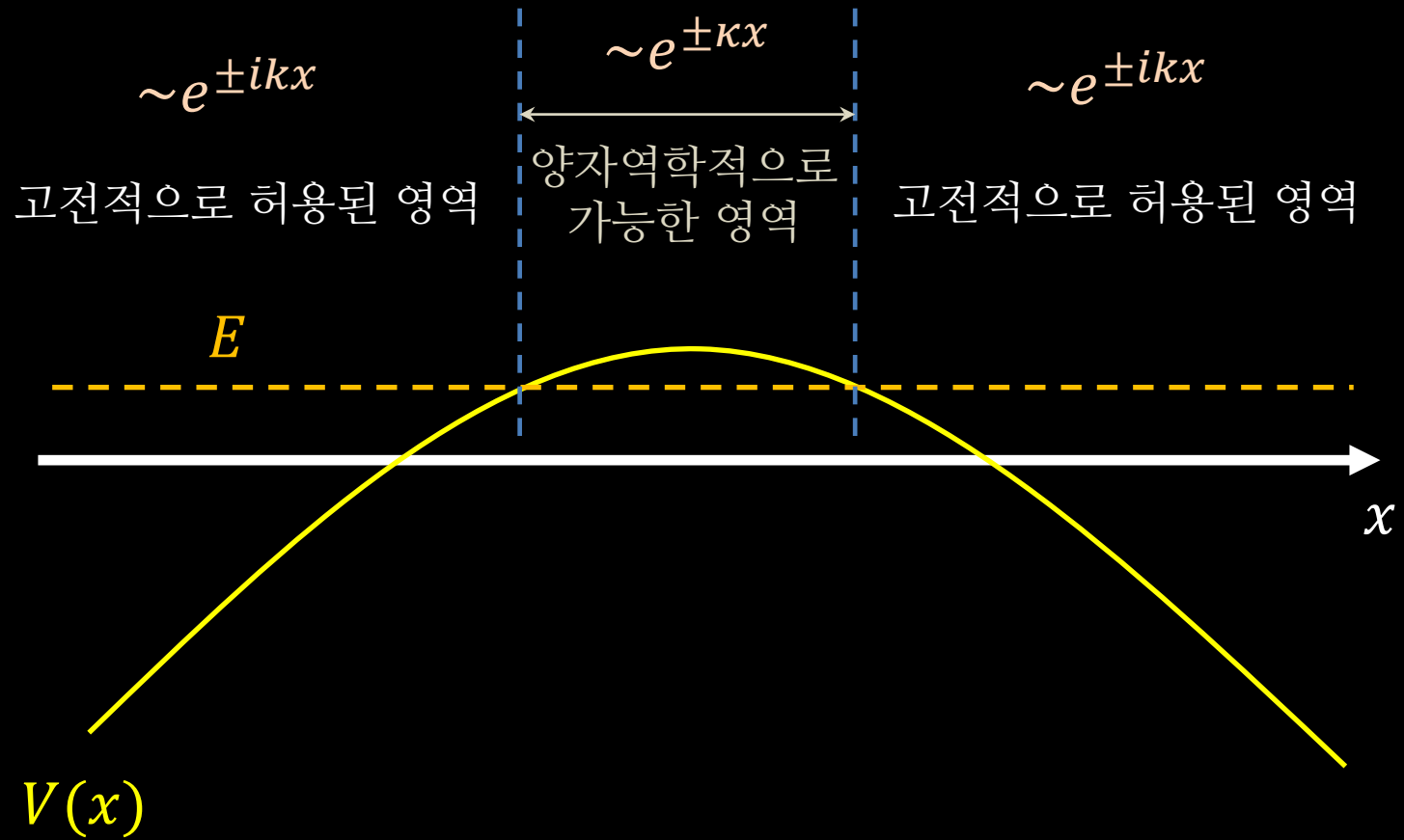




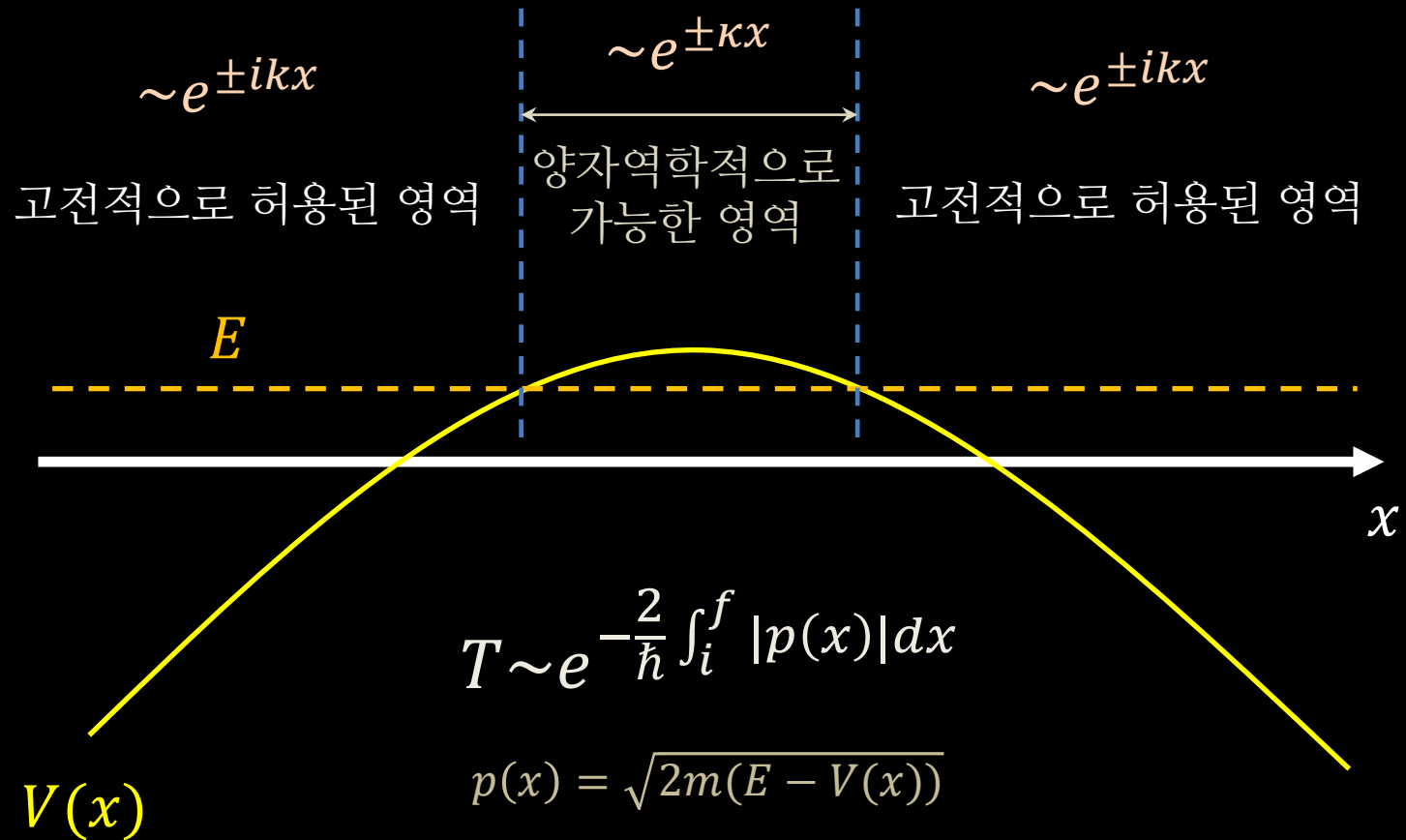
파동의 특성 때문에, 고전적으로는 도달할 수 없는 영역에도
입자가 도달할 확률이 생깁니다.
이것을 양자터널링 현상이라고 부릅니다.



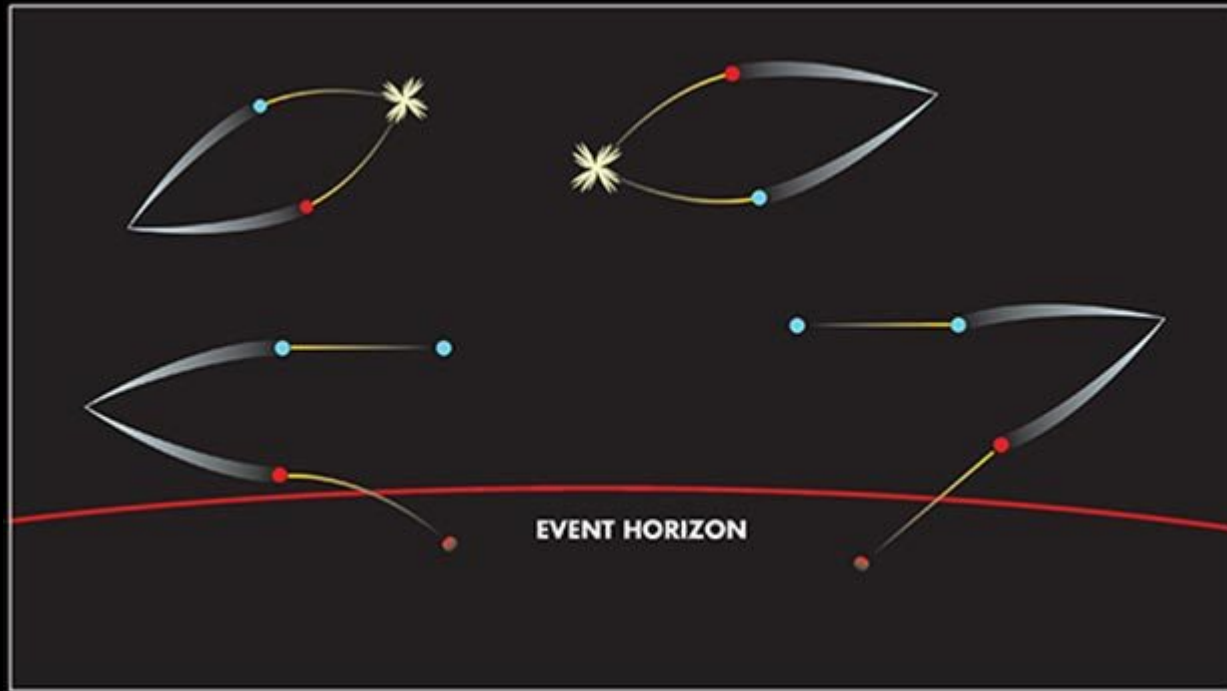
파동의 특성 때문에, 고전적으로는 도달할 수 없는 영역에도
입자가 도달할 확률이 생깁니다.
이것을 양자터널링 현상이라고 부릅니다.



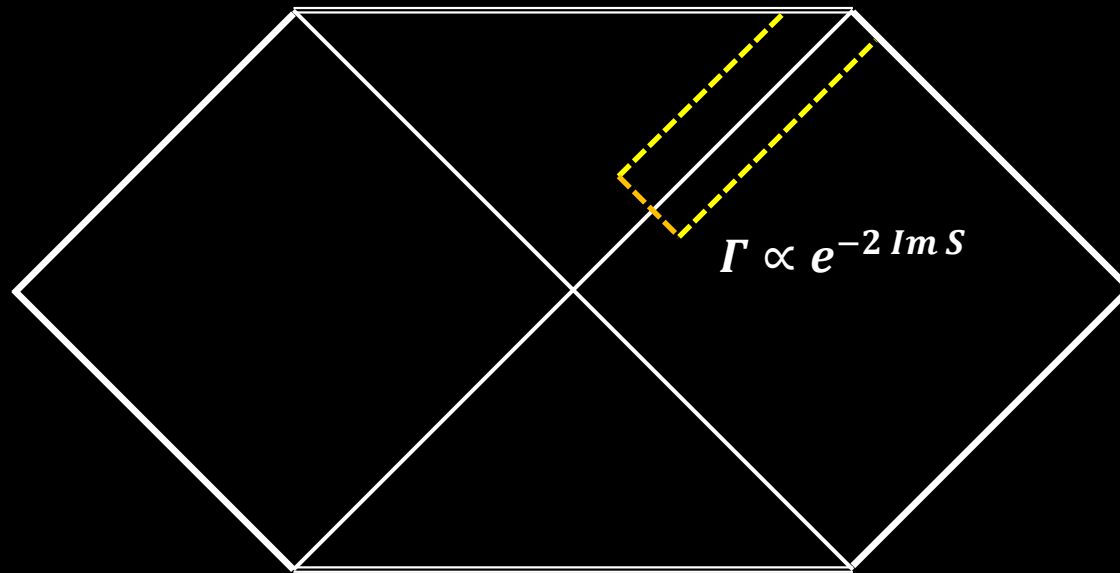
WKB 근사



고전적으로 허용되지 않은 영역에서는 p 가 허수가 됩니다.



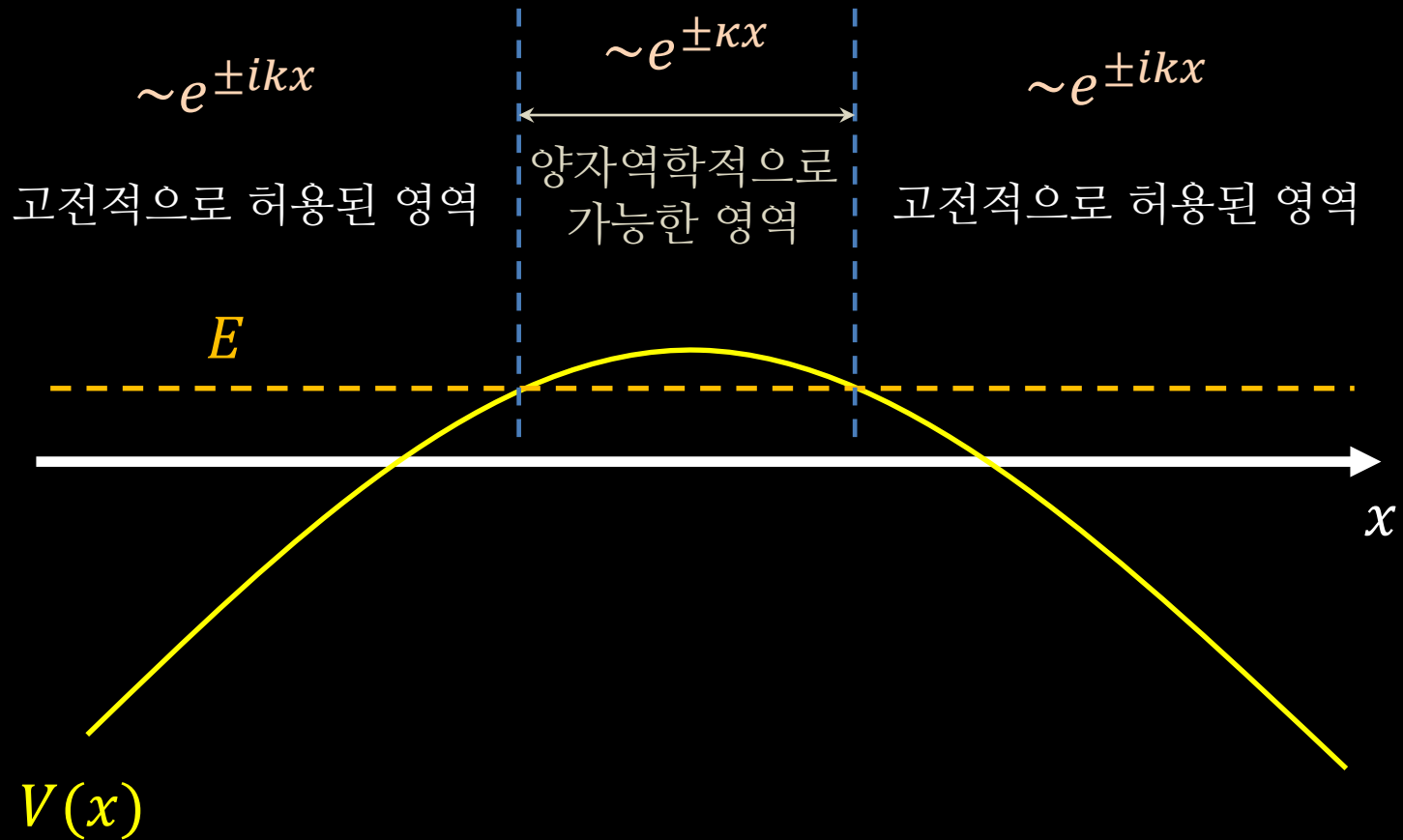
블랙홀의 사건 지평선 근처에서는
진공 요동quantum fluctuation에 의해 입자Hawking radiation가
생성될 수 있습니다.



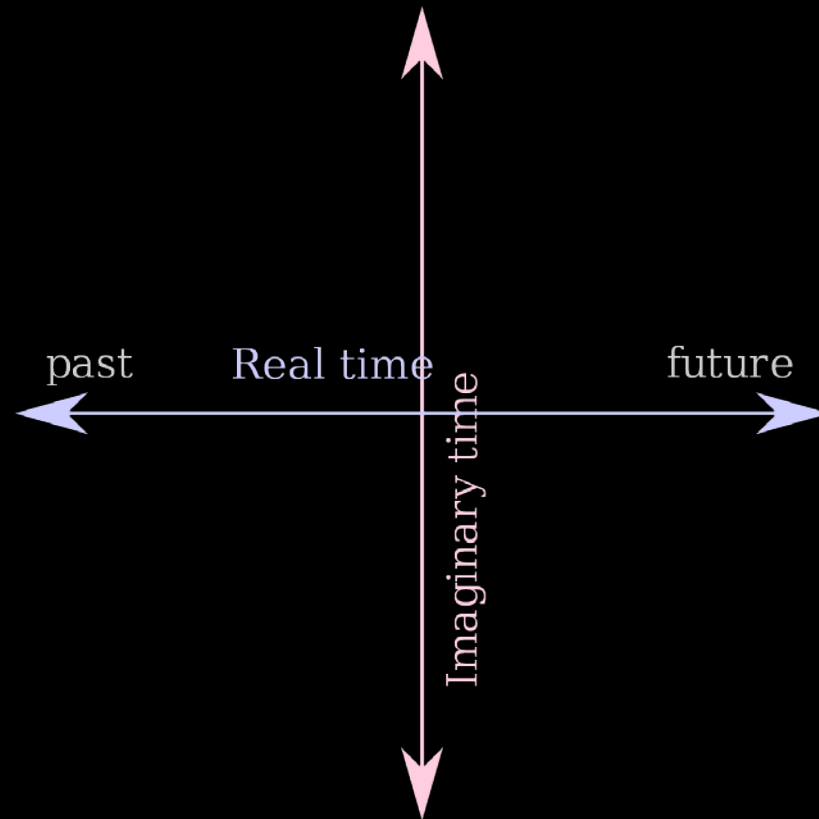
$$\text{Im } S = \text{Im} \int_{r_{in}}^{r_{out}} p_r dr = \text{Im} \int_M^{M-\omega} \int_{r_{in}}^{r_{out}} \frac{dr}{\dot{r}} dH = 4\pi\omega \left(M - \frac{\omega}{2} \right)$$

$(H = M - \omega')$

이것은 블랙홀 내부에서 외부로
입자가 터널링하는 것으로 해석할 수 있습니다.
이 확률은 WKB 근사로 쉽게 계산할 수 있습니다.



양자역학적 터널링 문제에서는 수학적인 기법으로
 허수의 **운동량** 또는 허수의 **시간**을 도입하는 것이 필요합니다.



양자역학적 터널링 문제에서는 수학적인 기법으로
허수의 운동량 또는 허수의 시간을 도입하는 것이 필요합니다.

감사합니다