

제4장

3차원 양자역학

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V \right) \Psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi$$

비상대론적 양자역학의 슈뢰딩거 방정식

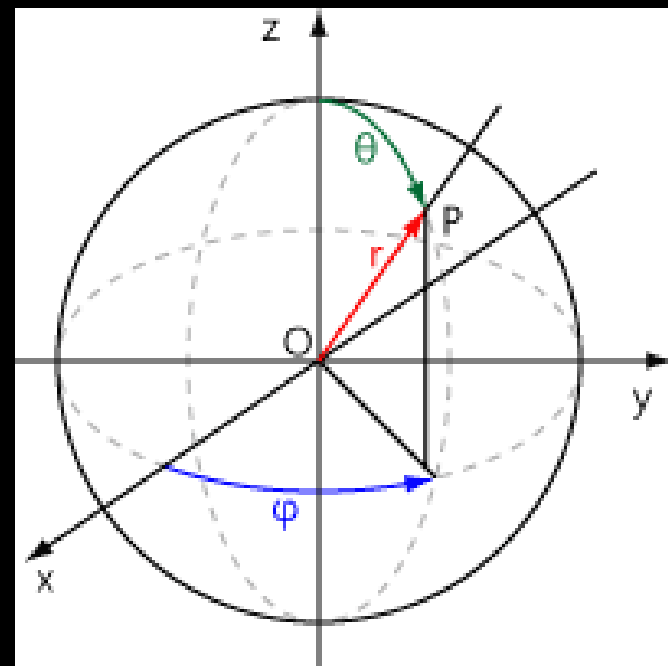
3차원에서 라플라시안Laplacian 연산자를 나타내 봅시다.

구면좌표계

$$x = r \sin \theta \cos \phi$$

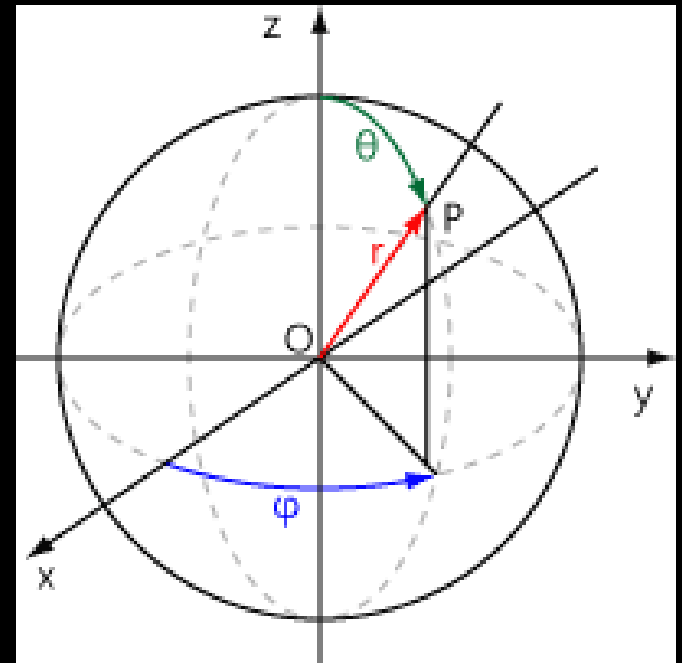
$$y = r \sin \theta \sin \phi$$

$$z = r \cos \theta$$



구면좌표계에서 벡터의 표현

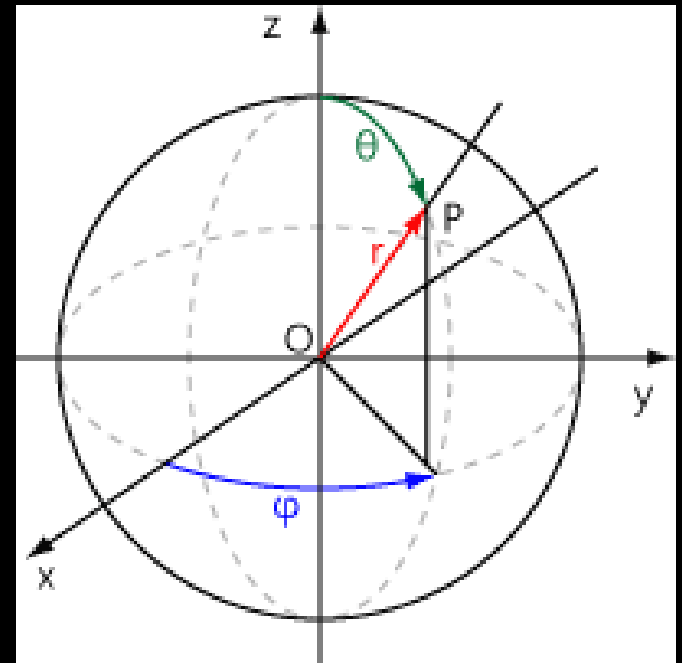
$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & \cos \theta \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \sin \phi & \cos \phi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ r d\theta \\ r \sin \theta d\phi \end{pmatrix}$$



구면좌표계에서 벡터의 표현

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & \cos \theta \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \sin \phi & \cos \phi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ r d\theta \\ r \sin \theta d\phi \end{pmatrix}$$
$$\equiv T$$

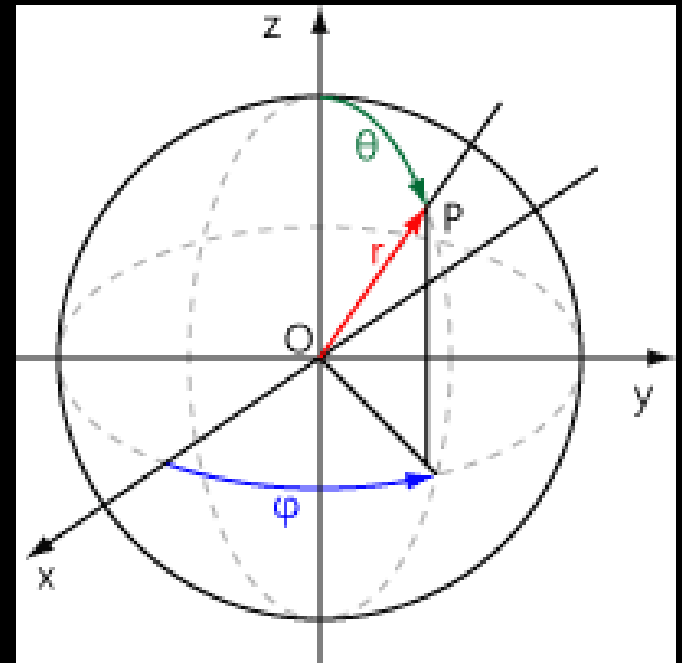
$$T^T T = I$$



구면좌표계에서 벡터의 표현

$$\begin{pmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \\ \hat{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & \cos \theta \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \sin \phi & \cos \phi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{r} \\ \hat{\theta} \\ \hat{\phi} \end{pmatrix} \equiv T$$

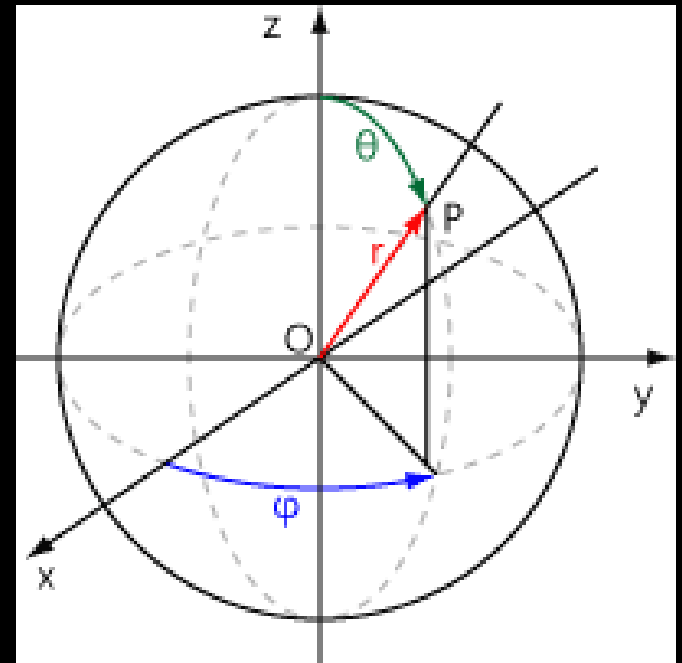
$$T^T T = I$$



구면좌표계에서 벡터의 표현

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & \cos \theta \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \sin \phi & \cos \phi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ r \frac{\partial}{\partial \theta} \\ r \sin \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \end{pmatrix} \equiv T$$

$$T^T T = I$$



미분연산자

$$\nabla = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{\partial}{r \partial \theta} + \hat{\phi} \frac{\partial}{r \sin \theta \partial \phi}$$

미분연산자

$$\nabla = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{\partial}{r \partial \theta} + \hat{\phi} \frac{\partial}{r \sin \theta \partial \phi}$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2 \sin \theta} \right) = \nabla \cdot \left(\frac{\hat{\theta}}{r \sin \theta} \right) = \nabla \cdot \left(\frac{\hat{\phi}}{r} \right) = 0$$

미분연산자

$$\nabla = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{\partial}{r \partial \theta} + \hat{\phi} \frac{\partial}{r \sin \theta \partial \phi}$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2 \sin \theta} \right) = \nabla \cdot \left(\frac{\hat{\theta}}{r \sin \theta} \right) = \nabla \cdot \left(\frac{\hat{\phi}}{r} \right) = 0$$

$$\nabla \cdot \nabla = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V \right) \Psi = E \Psi$$

구면좌표계에서 슈뢰딩거 방정식을 풀어봅시다.

슈뢰딩거 방정식을 푸는 과정

슈뢰딩거 방정식을 푸는 과정

0. 변수분리
1. 일반해 찾기
2. 경계조건 부여
3. 규격화 조건
4. 정규직교조건을 만족하는 기저함수 구성
5. 일반적인 해를 기저함수의 중첩으로 표현
6. 초기조건을 대입해서 계수를 확정

0. 변수분리
separation of variables

$$\Psi(r, \theta, \phi, t) = R(r)Y(\theta, \phi)T(t)$$

변수별 방정식

각도 방향

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y(\theta, \phi)}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y(\theta, \phi)}{\partial \phi^2} = -\ell(\ell + 1)Y(\theta, \phi)$$

반지름 방향

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) + (V(r) - E)R(r) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r^2} \ell(\ell + 1)R(r)$$

반지름 방향 방정식

반지름 방향

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) + (V(r) - E)R(r) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r^2} \ell(\ell + 1)R(r)$$

$u(r) = rR(r)$ 로 변수 치환을 하면 다음과 같이 간단해집니다.

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u(r)}{dr^2} + \left(V(r) + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\ell(\ell + 1)}{r^2} \right) u(r) = Eu(r)$$

반지름 방향 방정식

반지름 방향

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) + (V(r) - E)R(r) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r^2} \ell(\ell + 1)R(r)$$

$u(r) = rR(r)$ 로 변수 치환을 하면 다음과 같이 간단해집니다.

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u(r)}{dr^2} + \left(V(r) + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\ell(\ell + 1)}{r^2} \right) u(r) = Eu(r)$$

구심력 항을 포함한 유효 퍼텐셜 effective potential

각도 방향의 변수분리

ϕ -방향

$$\frac{d^2 \Phi(\phi)}{d\phi^2} + m^2 \Phi(\phi) = 0$$

θ -방향

$$\sin \theta \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} \right) + (\ell(\ell + 1) \sin^2 \theta - m^2) \Theta(\theta) = 0$$

1. 일반해 찾기
general solution

$$\psi(x) = A\psi_1 + B\psi_2$$

2. 경계조건 부여 boundary conditions

$$\psi_n(x) = A\psi_{1n} + \cancel{B\psi_2}$$

각도 방향의 해

ϕ -방향

$$\frac{d^2 \Phi(\phi)}{d\phi^2} + m^2 \Phi(\phi) = 0$$

$$\Phi(\phi) = e^{\pm im\phi}$$

각도방향의 대칭성때문에, m 은 정수가 되어야 합니다.

각도 방향의 해

θ -방향

$$\sin \theta \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} \right) + (\ell(\ell + 1) \sin^2 \theta - m^2) \Theta(\theta) = 0$$

$x = \cos \theta$ 로 변수 치환을 합니다.

$$(1 - x^2) \frac{d^2 \Theta}{dx^2} - 2x \frac{d\Theta}{dx} + \left(\ell(\ell + 1) - \frac{m^2}{(1 - x^2)} \right) \Theta = 0$$

이 방정식은 연관 르장드르 방정식 associated Legendre equation 이 됩니다.

복잡한 방정식의 일반해를 해석적으로 푸는 방법

STEP 1. **파라미터가 큰 경우**의 해석적 해를 찾고, **경계조건**을 생각한다.

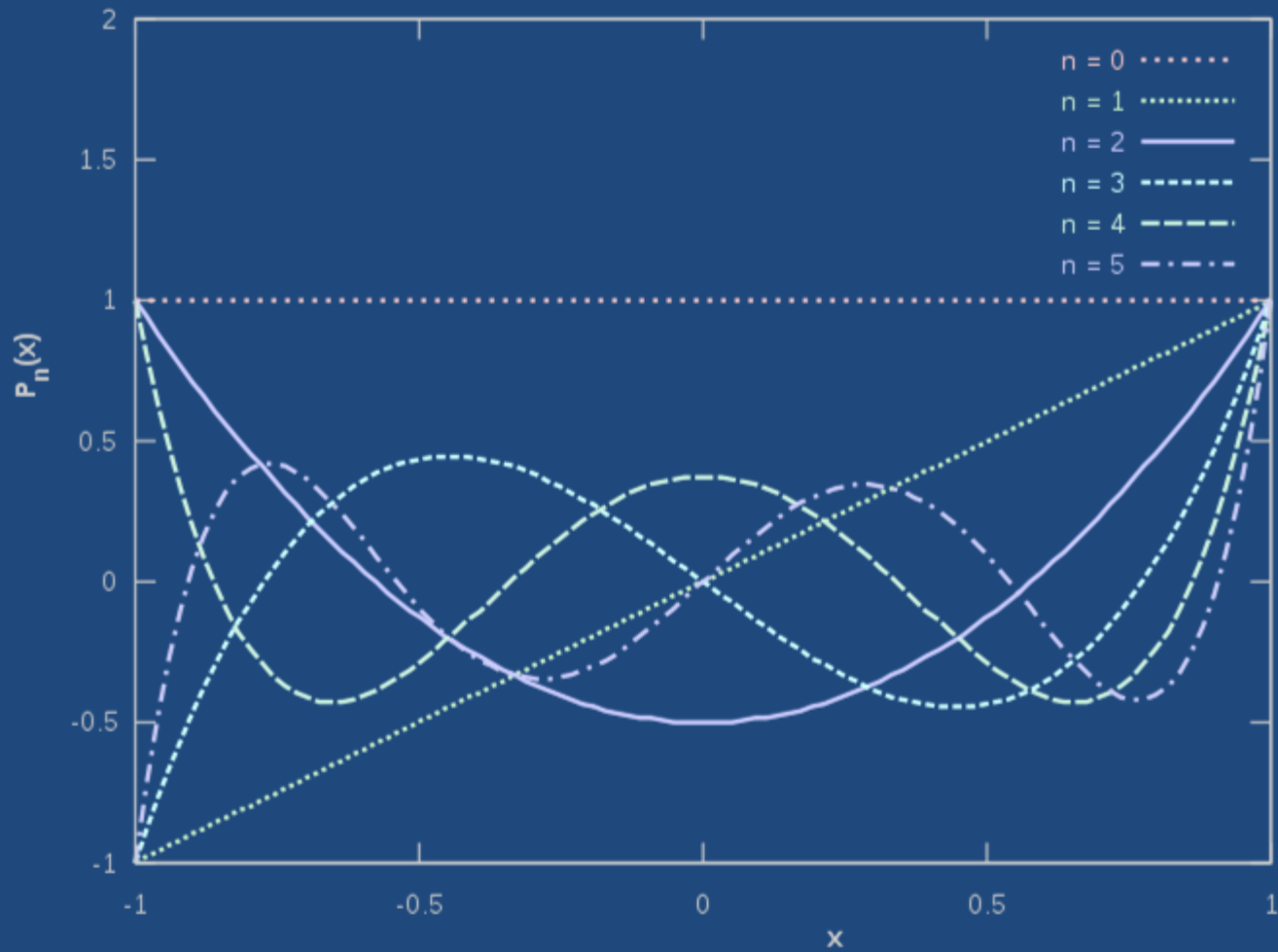
복잡한 방정식의 일반해를 해석적으로 푸는 방법

STEP 2. (적당한 변수선택 뒤) 프로베니우스 방법을 사용해서
무한 급수 형태로 전개한다.

복잡한 방정식의 일반해를 해석적으로 푸는 방법

STEP 3. 다시 한 번 **규격화 가능성**을 검토하고, 경우에 따라
유한차수 다항식으로 제한한다.

르장드르 다항식

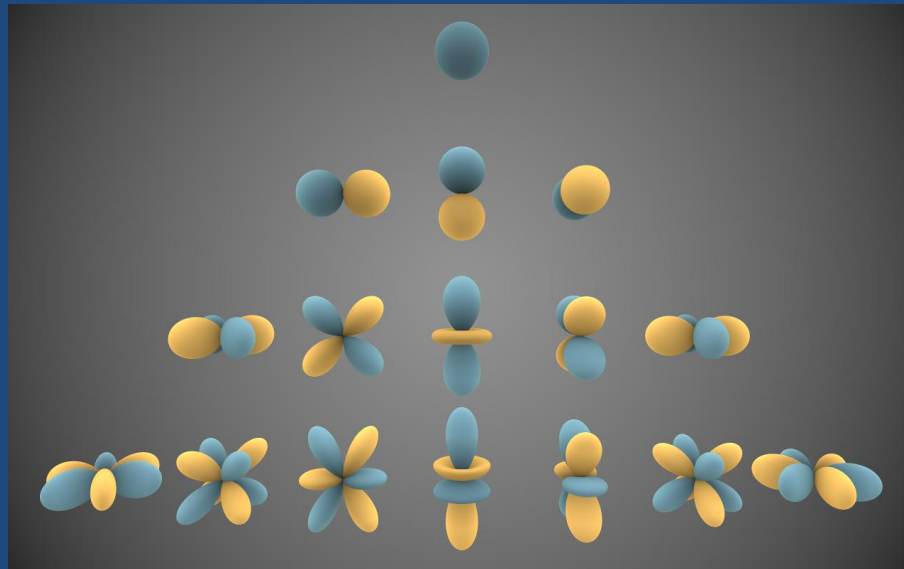


3. 규격화 조건 normalization

$$\psi_n(x) = A(n)\psi_{1n}$$

구면조화함수 spherical harmonics

$$Y_m^\ell(\theta, \phi) = \epsilon \sqrt{\frac{(2\ell + 1)(\ell - |m|)!}{4\pi(\ell + |m|)!}} e^{im\phi} P_\ell^m(\cos \theta)$$



반지름 방향의 방정식을 풀어봅시다.

반지름 방향 방정식

반지름 방향

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) + (V(r) - E)R(r) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r^2} \ell(\ell + 1)R(r)$$

$u(r) = rR(r)$ 로 변수 치환을 하면 다음과 같이 간단해집니다.

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u(r)}{dr^2} + \left(V(r) + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\ell(\ell + 1)}{r^2} \right) u(r) = Eu(r)$$

구심력 항을 포함한 유효 퍼텐셜 effective potential

반지름 방향 방정식

반지름 방향

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) + (V(r) - E)R(r) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r^2} \ell(\ell + 1)R(r)$$

한 번 더 $\rho \equiv \kappa r$ 로 변수 치환을 하면 다음과 같이 정리됩니다.

$$\frac{d^2 u(\rho)}{d\rho^2} = \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho} + \frac{\ell(\ell + 1)}{\rho^2} \right) u(\rho)$$

속박 상태에서 $\kappa \equiv \sqrt{-2mE}/\hbar$ 및 $\rho_0 \equiv \frac{me^2}{2\pi\epsilon_0\hbar^2\kappa}$ 으로 정의할 수 있습니다.

복잡한 방정식의 일반해를 해석적으로 푸는 방법

STEP 1. **파라미터가 큰 경우**의 해석적 해를 찾고, **경계조건**을 생각한다.

반지름 방향 방정식

$$\rho \rightarrow \infty \text{일 때} \quad \frac{d^2 u(\rho)}{d\rho^2} \simeq u(\rho) \quad \rightarrow \quad u = Ae^{-\rho} + Be^{+\rho}$$

반지름 방향 방정식

$$\rho \rightarrow \infty \text{ 일 때 } \frac{d^2 u(\rho)}{d\rho^2} \simeq u(\rho) \quad \rightarrow \quad u = Ae^{-\rho} + Be^{+\rho}$$

반지름 방향 방정식

$$\rho \rightarrow \infty \text{ 일 때 } \frac{d^2 u(\rho)}{d\rho^2} \simeq u(\rho) \quad \rightarrow \quad u = Ae^{-\rho} + Be^{+\rho}$$

$$\rho \rightarrow 0 \text{ 일 때 } \frac{d^2 u(\rho)}{d\rho^2} \simeq \frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2} u(\rho) \quad \rightarrow \quad u = C\rho^{\ell+1} + D\rho^{-\ell}$$

반지름 방향 방정식

$$\rho \rightarrow \infty \text{ 일 때 } \frac{d^2 u(\rho)}{d\rho^2} \simeq u(\rho) \quad \rightarrow \quad u = Ae^{-\rho} + Be^{+\rho}$$

$$\rho \rightarrow 0 \text{ 일 때 } \frac{d^2 u(\rho)}{d\rho^2} \simeq \frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2} u(\rho) \quad \rightarrow \quad u = C\rho^{\ell+1} + D\rho^{-\ell}$$

반지름 방향 방정식

$$\rho \rightarrow \infty \text{일 때} \quad \frac{d^2 u(\rho)}{d\rho^2} \simeq u(\rho) \quad \rightarrow \quad u = Ae^{-\rho} + Be^{+\rho}$$

$$\rho \rightarrow 0 \text{일 때} \quad \frac{d^2 u(\rho)}{d\rho^2} \simeq \frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2} u(\rho) \quad \rightarrow \quad u = C\rho^{\ell+1} + D\rho^{-\ell}$$

$u(\rho) = \rho^{\ell+1} e^{-\rho} v(\rho)$ 와 같이 함수를 다시 정의해서 방정식을 써 봅시다.

반지름 방향 방정식

$$\rho \rightarrow \infty \text{일 때} \quad \frac{d^2 u(\rho)}{d\rho^2} \simeq u(\rho) \quad \rightarrow \quad u = Ae^{-\rho} + Be^{+\rho}$$

$$\rho \rightarrow 0 \text{일 때} \quad \frac{d^2 u(\rho)}{d\rho^2} \simeq \frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2} u(\rho) \quad \rightarrow \quad u = C\rho^{\ell+1} + D\rho^{-\ell}$$

$u(\rho) = \rho^{\ell+1}e^{-\rho}v(\rho)$ 와 같이 함수를 다시 정의해서 방정식을 써 봅시다.

$$\rho v'' + 2(\ell + 1 - \rho)v' + (\rho_0 - 2(\ell + 1))v = 0$$

복잡한 방정식의 일반해를 해석적으로 푸는 방법

STEP 2. (적당한 변수선택 뒤) 프로베니우스 방법을 사용해서
무한 급수 형태로 전개한다.

반지름 방향 방정식

$$\rho v'' + 2(\ell + 1 - \rho)v' + (\rho_0 - 2(\ell + 1))v = 0$$

$$v = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \rho^j \quad \rightarrow \quad c_{j+1} = \frac{2(j + \ell + 1) - \rho_0}{(j + 1)(j + 2\ell + 2)} c_j$$

복잡한 방정식의 일반해를 해석적으로 푸는 방법

STEP 3. 다시 한 번 **규격화 가능성**을 검토하고, 경우에 따라
유한차수 다항식으로 제한한다.

반지름 방향 방정식

$$\rho v'' + 2(\ell + 1 - \rho)v' + (\rho_0 - 2(\ell + 1))v = 0$$

$$v = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \rho^j \quad \rightarrow \quad c_{j+1} = \frac{2(j + \ell + 1) - \rho_0}{(j + 1)(j + 2\ell + 2)} c_j$$

$j \gg 1$ 인 경우 $v \sim e^{2\rho}$ 가 되므로 발산하게 됩니다.

따라서 유한한 차수의 다항식(연관 라게르 다항식 $L_{n-\ell-1}^{2\ell+1}$)만 허용됩니다.

반지름 방향 방정식

$$\rho v'' + 2(\ell + 1 - \rho)v' + (\rho_0 - 2(\ell + 1))v = 0$$

$$v = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \rho^j \quad \rightarrow \quad c_{j+1} = \frac{2(j + \ell + 1) - \rho_0}{(j + 1)(j + 2\ell + 2)} c_j$$

$j \gg 1$ 인 경우 $v \sim e^{2\rho}$ 가 되므로 발산하게 됩니다.

따라서 유한한 차수의 다항식(연관 라게르 다항식 $L_{n-\ell-1}^{2\ell+1}$)만 허용됩니다.

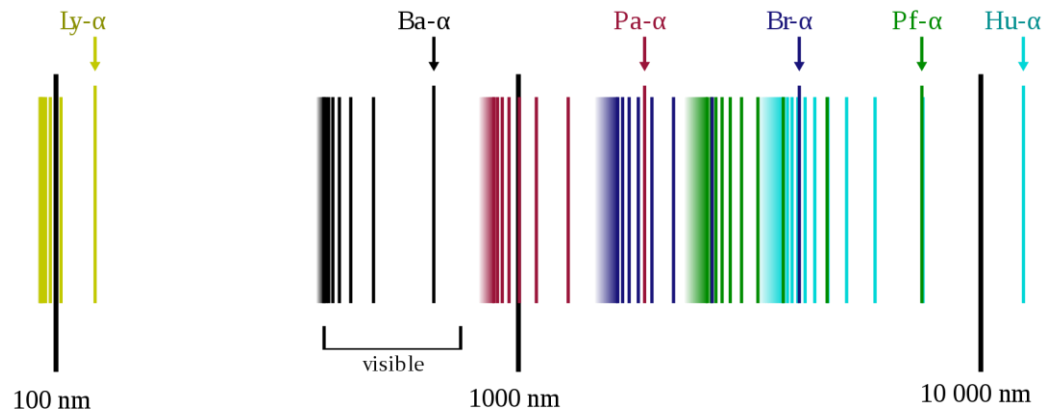
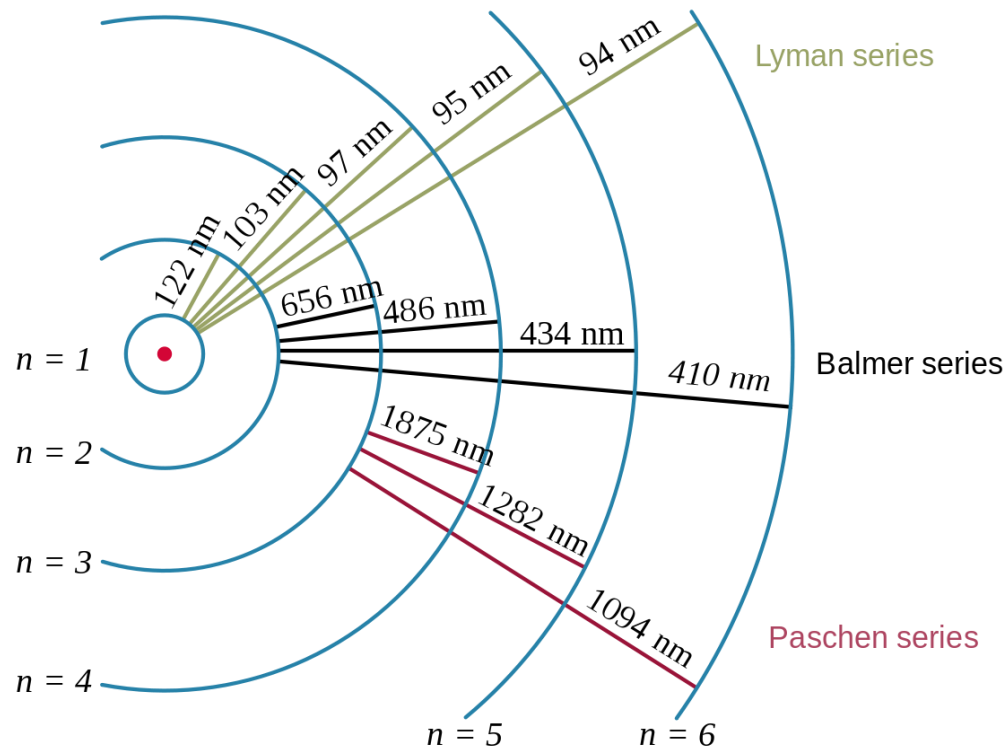
$$2(j_{\max} + \ell + 1) - \rho_0 = 0 \quad \rightarrow \quad j_{\max} + \ell + 1 \equiv n$$
$$\rho_0 = 2n$$

에너지의 양자화

$$\begin{aligned} E &= -\frac{\hbar^2}{2m} \kappa^2 = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{me^2}{2\pi\epsilon_0 \hbar^2 \rho_0} \right)^2 = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{me^2}{2\pi\epsilon_0 \hbar^2 (2n)} \right)^2 \\ &= -\frac{mc^2 \alpha^2}{2n^2} = -\frac{E_1}{n^2} \end{aligned}$$

이 결과는 보어 모델에서 얻은 에너지의 결과와 같습니다.

$$\alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} : \text{미세구조상수}$$



리드베리 공식

$$\frac{1}{\lambda} = RZ^2 \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right)$$



리드베리 공식도 다시 얻을 수 있습니다.

수소원자의 파동함수

$$\psi_{n\ell m} = \sqrt{\left(\frac{2}{na}\right)^3 \frac{(n-\ell-1)!}{2n[(n+1)!]^3}} e^{-\frac{r}{na}} \left(\frac{2r}{na}\right)^\ell L_{n-\ell-1}^{2\ell+1}\left(\frac{2r}{na}\right) Y_\ell^m(\theta, \phi)$$

$a \equiv 4\pi\epsilon_0\hbar^2/me^2$: 보어 반지름 Bohr radius

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\ell = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

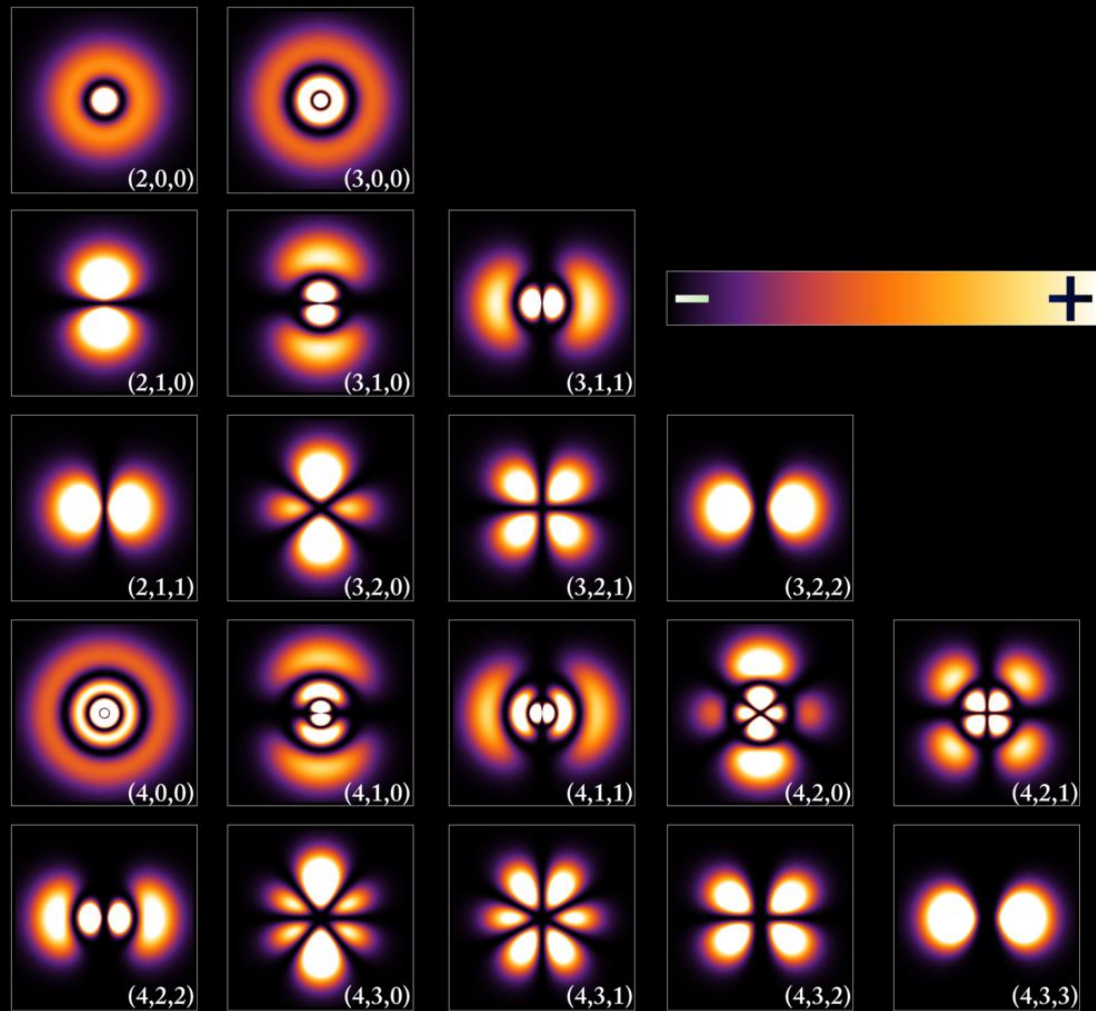
즉, n 개

$$m = -\ell, -\ell+1, \dots, 0, \dots, +\ell$$

즉, 각 ℓ 에 대해 $2\ell+1$ 개

따라서, 각 n 에 대해 허용되는 (ℓ, m) 은 n^2 개 입니다.

수소원자의 파동함수



에너지의 양자화

디랙 방정식을 풀어서 상대론적 효과를 고려하면 다음과 같습니다.

$$E = mc^2 \left(1 + \left(\frac{\alpha}{n - \left(j + \frac{1}{2}\right) + \sqrt{\left(j + \frac{1}{2}\right)^2 - \alpha^2}} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}}$$
$$\simeq mc^2 - \frac{E_1}{n^2} \left(1 + \frac{\alpha^2}{n^2} \left(\frac{n}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4} \right) + O(\alpha^4) \right)$$

정지에너지

상대론적 보정 + 스핀-궤도 결합

$$\alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} : \text{미세구조상수}$$

각운동량과 연산자 방법

증명하고자 하는 것의 요약

연산자들이 다음과 같은 관계를 갖는다고 합시다.

$$[L_i, L_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}L_k$$

증명하고자 하는 것의 요약

연산자들이 다음과 같은 관계를 갖는다고 합시다.

$$[L_i, L_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}L_k$$

그러면 이 연산자들에 대응되는 상태는 L^2 와 L_z 의 고유상태로 표현될 수 있으며, 다음과 같이 표현됩니다.

$$L^2|\ell, m\rangle = \hbar^2\ell(\ell + 1)|\ell, m\rangle$$

$$L_z|\ell, m\rangle = \hbar m|\ell, m\rangle$$

증명하고자 하는 것의 요약

연산자들이 다음과 같은 관계를 갖는다고 합시다.

$$[L_i, L_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}L_k$$

그러면 이 연산자들에 대응되는 상태는 L^2 와 L_z 의 고유상태로 표현될 수 있으며, 다음과 같이 표현됩니다.

$$L^2|\ell, m\rangle = \hbar^2\ell(\ell + 1)|\ell, m\rangle$$

$$L_z|\ell, m\rangle = \hbar m|\ell, m\rangle$$

여기에서 ℓ 은 정수 또는 반정수이며,
 m 은 $-\ell$ 에서 ℓ 사이의 정수 또는 반정수가 됩니다.

각운동량의 연산자 관계

$$[L_i, L_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}L_k$$

$$L^2 \equiv L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$$

$$L_{\pm} \equiv L_x \pm iL_y$$

$$L_{\pm}L_{\mp} = L^2 - L_z^2 \pm \hbar L_z$$

$$[L^2, \vec{L}] = [L^2, L_{\pm}] = 0$$

$$[L_z, L_{\pm}] = \pm\hbar L_{\pm}$$

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} (p^2 + (m\omega x)^2)$$

$$= \hbar\omega \left(a_+ a_- + \frac{1}{2} \right)$$

$$(a_+)^* = a_-$$

$$[a_-, a_+] = 1$$

$$[\hat{H}, a_{\pm}] = \pm \hbar\omega a_{\pm} \quad \hat{H}(a_{\pm}\psi) = (E \pm \hbar\omega)(a_{\pm}\psi)$$

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} (p^2 + (m\omega x)^2)$$

$$= \hbar\omega \left(\underset{\substack{\text{생성 연산자} \\ \text{creation operator}}}{a_+} \underset{\substack{\text{소멸 연산자} \\ \text{annihilation operator}}}{a_-} + \frac{1}{2} \right)$$

$$\hat{H}(a_{\pm}\psi) = (E \pm \hbar\omega)(a_{\pm}\psi)$$

각운동량의 생성/소멸 연산자

$L_z\psi = \mu\psi$ 및 $L^2\psi = \lambda\psi$ 라고 하면,

$$L^2(L_{\pm}\psi) = \lambda(L_{\pm}\psi)$$

$$L_z(L_{\pm}\psi) = (\mu \pm \hbar)(L_{\pm}\psi)$$

이 되므로, $L_{\pm}$ 은 L^2 의 고윳값은 그대로 두고 L_z 의 상태만 올리거나 내리게 됩니다.

$$L_{\pm}\psi_{\ell m} = \hbar\sqrt{(\ell \mp m)(\ell \pm m + 1)}\psi_{\ell m \pm 1}$$

→ ψ_t 과 ψ_b 이 존재해야 함



$$L_+\psi_t = 0$$

...

$$\psi_{b+2} \propto (L_+)^2\psi_b$$

$$\psi_{b+1} \propto L_+\psi_b$$

$$L_-\psi_b = 0$$

$$L_{\pm}\psi_{\ell m} = \hbar\sqrt{(\ell \mp m)(\ell \pm m + 1)}\psi_{\ell m \pm 1}$$

→ ψ_t 과 ψ_b 이 존재해야 함

$$\begin{aligned} L_z\psi_t &= \hbar\ell\psi_t \\ L^2\psi_t &= \lambda\psi_t \end{aligned}$$

$$L^2\psi_t = \hbar^2\ell(\ell + 1)\psi_t$$



$$L_+\psi_t = 0$$

...

$$\psi_{b+2} \propto (L_+)^2\psi_b$$

$$\psi_{b+1} \propto L_+\psi_b$$

$$L_-\psi_b = 0$$

$$L_{\pm}\psi_{\ell m} = \hbar\sqrt{(\ell \mp m)(\ell \pm m + 1)}\psi_{\ell m \pm 1}$$

→ ψ_t 과 ψ_b 이 존재해야 함

$$\begin{aligned} L_z\psi_b &= \hbar\bar{\ell}\psi_b \\ L^2\psi_b &= \lambda\psi_b \end{aligned}$$

$$L^2\psi_b = \hbar^2\bar{\ell}(\bar{\ell} - 1)\psi_b$$



$$L_+\psi_t = 0$$

...

$$\psi_{b+2} \propto (L_+)^2\psi_b$$

$$\psi_{b+1} \propto L_+\psi_b$$

$$L_-\psi_b = 0$$

따라서 정합성을 위해 다음이 요청됩니다.

L^2 의 고유상태는 $L_{\pm}$ 에 대해 변하지 않으므로,

$$\bar{\ell}(\bar{\ell} - 1) = \ell(\ell + 1)$$

따라서 $\bar{\ell} = -\ell$ 이고, $L_{\pm}$ 은 정수번 가해질 수 있으므로,
 ℓ 은 정수 또는 반정수가 되어야 합니다.

연산자들이 다음과 같은 관계를 갖는다고 합시다.

$$[L_i, L_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}L_k$$

그러면 이 연산자들에 대응되는 상태는 L^2 와 L_z 의 고유상태로 표현될 수 있으며, 다음과 같이 표현됩니다.

$$L^2|\ell, m\rangle = \hbar^2\ell(\ell + 1)|\ell, m\rangle$$

$$L_z|\ell, m\rangle = \hbar m|\ell, m\rangle$$

여기에서 ℓ 은 정수 또는 반정수이며,
 m 은 $-\ell$ 에서 ℓ 사이의 정수 또는 반정수가 됩니다.

각운동량 연산자를 구면좌표계로 다시 나타내면, 다음과 같습니다.

$$L^2 = -\hbar^2 \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

$$L_z = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \phi}$$

변수별 방정식

각도 방향

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y(\theta, \phi)}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y(\theta, \phi)}{\partial \phi^2} = -\ell(\ell + 1)Y(\theta, \phi)$$

반지름 방향

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) + (V(r) - E)R(r) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r^2} \ell(\ell + 1)R(r)$$

각운동량 연산자를 구면좌표계로 다시 나타내면, 다음과 같습니다.

$$L^2 = -\hbar^2 \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

$$L_z = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \phi}$$

따라서 구면조화함수는 두 연산자의 고유상태가 됩니다.

좀 더 일반적인 각운동량

$$[L_i, L_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}L_k$$

로렌츠 대칭성이 존재하는 시공간에서,
위와 같은 수학적 성질을 가지는 연산자가 정의될 수 있습니다.
일반적으로 각운동량은 **정수 또는 반정수**의
고윳값을 가질 수 있습니다.

우리는 **스핀**을 통해서 반정수의 고윳값을 가지는
각운동량에 대해서 알아볼 수 있습니다.

이번에는 각운동량이 반정수가 되는 예를 찾아봅시다.

다음과 같은 연산자를 생각합시다.

$$[S_i, S_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}S_k$$

다음과 같은 연산자를 생각합시다.

$$[S_i, S_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}S_k$$

그리고 이 연산자들에 대응되는 상태를 S^2 와 S_z 의 고유상태로 표현할 수 있다고 합시다.

$$S^2|s, m\rangle = \hbar^2 s(s+1)|s, m\rangle$$

$$S_z|s, m\rangle = \hbar m|s, m\rangle$$

$$S_{\pm}|s, m\rangle = \hbar\sqrt{s(s+1) - m(m \pm 1)}|s, m \pm 1\rangle$$

다음과 같은 연산자를 생각합시다.

$$[S_i, S_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}S_k$$

그리고 이 연산자들에 대응되는 상태를 S^2 와 S_z 의 고유상태로 표현할 수 있다고 합시다.

$$S^2|s, m\rangle = \hbar^2 s(s+1)|s, m\rangle$$

$$S_z|s, m\rangle = \hbar m|s, m\rangle$$

$$S_{\pm}|s, m\rangle = \hbar\sqrt{s(s+1) - m(m \pm 1)}|s, m \pm 1\rangle$$

s 가 반정수가 되려면
 S_i 는 어떤 연산자가 되어야 할까요?

$s = \frac{1}{2}$ 인 경우

$m = \frac{1}{2}$ 또는 $m = -\frac{1}{2}$ 만이 가능하므로

다음과 같이 상태를 표현할 수 있습니다.

$$\chi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a\chi_+ + b\chi_-$$

$$\chi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \chi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad |a|^2 + |b|^2 = 1$$

$$s = \frac{1}{2} \text{인 경우}$$

주어진 기저로 표현되는 고유상태는 다음과 같습니다.

$$S^2 \chi_+ = \frac{3}{4} \hbar^2 \chi_+$$

$$S^2 \chi_- = \frac{3}{4} \hbar^2 \chi_-$$

$$\therefore S^2 = \frac{3}{4} \hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$s = \frac{1}{2} \text{인 경우}$$

주어진 기저로 표현되는 고유상태는 다음과 같습니다.

$$S_z \chi_+ = \frac{1}{2} \hbar \chi_+$$

$$S_z \chi_- = -\frac{1}{2} \hbar \chi_-$$

$$\therefore S_z = \frac{1}{2} \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$s = \frac{1}{2} \text{인 경우}$$

사다리 연산자를 사용해 한 가지 조건을 더 구합니다.

$$S_+ \chi_- = \hbar \chi_+$$

$$S_- \chi_+ = \hbar \chi_-$$

$$S_+ \chi_+ = S_- \chi_- = 0$$

$$\therefore S_+ = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad S_- = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$s = \frac{1}{2} \text{인 경우}$$

$S_{\pm} = S_x \pm iS_y$ 이므로 S_x 및 S_y 를 구할 수 있습니다.

$$\therefore S_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad S_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$s = \frac{1}{2} \text{인 경우}$$

파울리 스핀 행렬을 사용하면 $S = \frac{\hbar}{2}\sigma$ 와 같이 표현됩니다.

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

z -축만 대각화 되어있는 이유?

우리가 다른 방향에 대해 스핀을 측정하면 z -축을 기준으로 잡은 기저를 변경해 주어야 합니다.

$$S_x \chi = \lambda \chi$$

z-축만 대각화 되어있는 이유?

우리가 다른 방향에 대해 스핀을 측정하면 z-축을 기준으로 잡은 기저를 변경해 주어야 합니다.

$$S_x \chi = \lambda \chi$$

$$\lambda = \pm \frac{\hbar}{2}$$

$$\chi_+ = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \chi_- = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

스핀이 정수인 경우

spin 0: 스칼라 장 예: 힉스장

spin 1: 벡터 장 예: 광자, 위크게이지보존, 글루온

spin 2: 텐서 장 예: 중력자

이런 입자들을 **보존**Boson이라고 합니다.

스핀이 반정수인 경우

spin $1/2$: 예: 전자, 쿼크, 중성미자, ...

spin $3/2$: 예: 다양한 쿼크들이 합성된 상태 (Δ 입자 등)

...

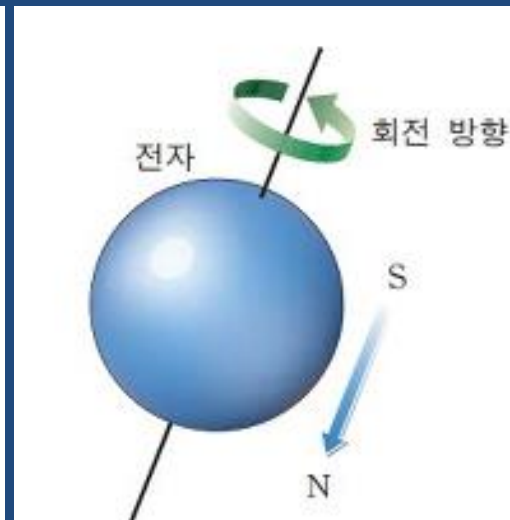
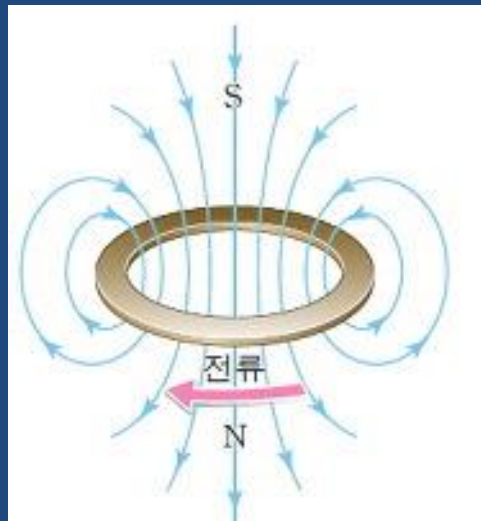
이런 입자들을 페르미온Fermion이라고 합니다.

스핀을 스핀이라고 부르는 이유?



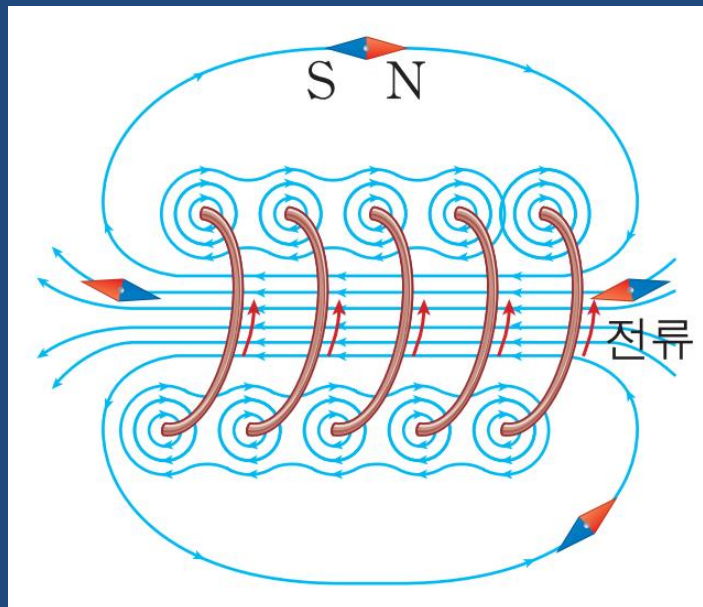
전하를 가진 입자가 회전을 하면 자기장이 생깁니다.

$$\vec{\mu} = \gamma \vec{S}$$

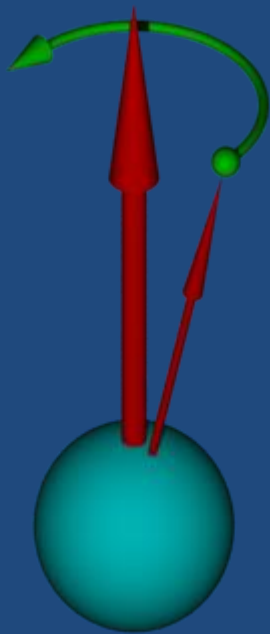


스핀은 외부 자기장과 상호작용을 하게 됩니다.

$$H = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$



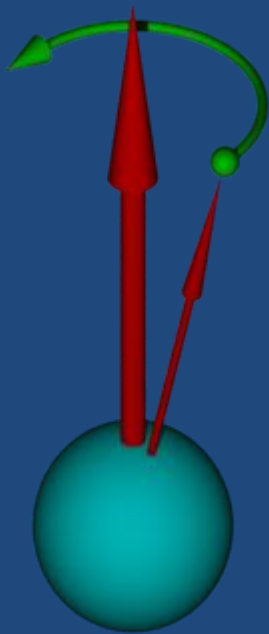
라모 세차운동 Larmor precession



z -축 방향으로 균일한 자기장 $B = B_0 \hat{k}$ 을 걸어주면
스핀의 업과 다운 상태가 서로 다른 에너지를 가지게 됩니다.

$$E_{\pm} = \mp \frac{\gamma B_0 \hbar}{2}$$

라모 세차운동 Larmor precession



z-축 방향으로 균일한 자기장 $B = B_0 \hat{k}$ 을 걸어주면 스핀의 업과 다운 상태가 서로 다른 에너지를 가지게 됩니다.

$$E_{\pm} = \mp \frac{\gamma B_0 \hbar}{2}$$

이러한 에너지 차이에 의해 스핀의 각 성분의 기댓값이 세차운동을 하게 됩니다.

$$\langle S_x \rangle = \frac{\hbar}{2} \sin \alpha \cos \gamma B_0 t \quad \langle S_y \rangle = -\frac{\hbar}{2} \sin \alpha \sin \gamma B_0 t \quad \langle S_z \rangle = \frac{\hbar}{2} \cos \alpha$$

자기공명영상

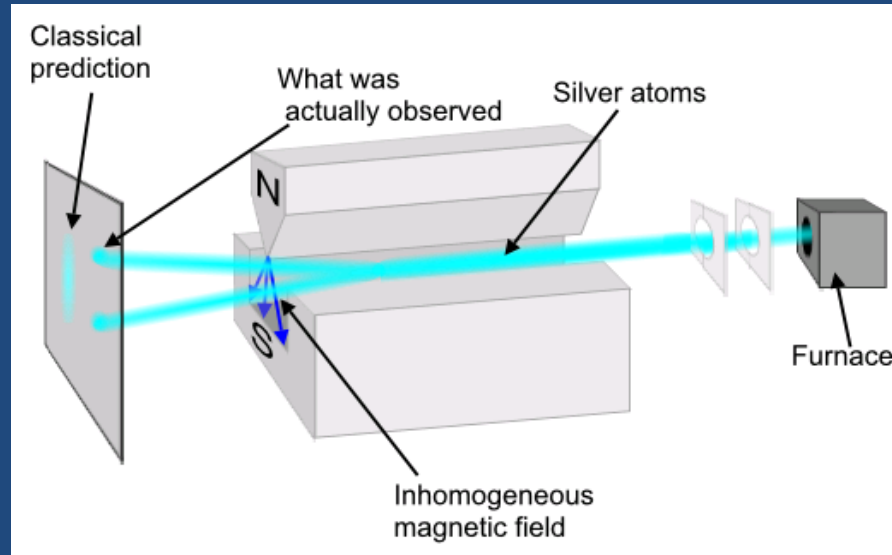
Magnetic Resonance Imaging



슈테른-게를라흐 실험 Stern-Gerlach experiment



슈테른-게를라흐 실험 Stern-Gerlach experiment



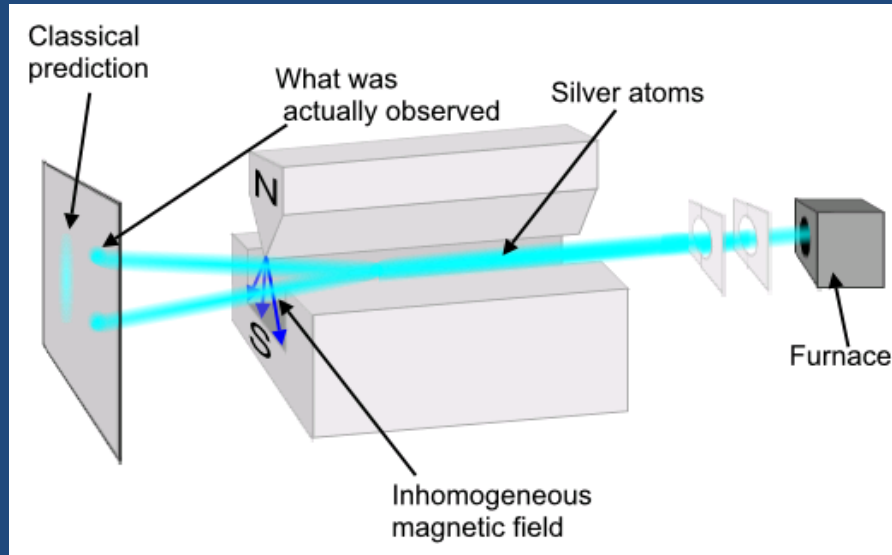
이번에는 다음과 같이 불균일한 자기장을 걸어줍니다.

$$B = -\alpha x \hat{i} + (B_0 + \alpha z) \hat{k}$$

그러면 x -방향으로는 세차운동을 하므로 평균값은 0이 됩니다.

그러나 z -방향으로는 **알짜 힘**이 작용하게 됩니다.

슈테른-게를라흐 실험 Stern-Gerlach experiment



$$\vec{F} = \nabla(\vec{\mu} \cdot \vec{B}) = \gamma\alpha(-S_x\hat{i} + S_z\hat{k})$$

따라서 고전적인 예상과는 다르게
업 또는 다운의 **두 영역**으로 입자들의 경로가 나뉘게 됩니다.

각운동량의 덧셈

$s = \frac{1}{2}$ 인 입자 두 개가 있을 때

우리는 다음과 같은 연산자의 고유상태를 구하고자 합니다.

$$S = S_1 + S_2$$

$s = \frac{1}{2}$ 인 입자 두 개가 있을 때

s 의 가능한 고유상태는 다음과 같습니다.

$$|1,1\rangle \quad |1,0\rangle \quad |1,-1\rangle \quad |0,0\rangle$$

$s = \frac{1}{2}$ 인 입자 두 개가 있을 때

s 의 가능한 고유상태는 다음과 같습니다.

$$|1,1\rangle \quad |1,0\rangle \quad |1,-1\rangle \quad |0,0\rangle$$

위의 상태들을 두 개의 입자로 어떻게 표현할 수 있을까요?

$$\left| \frac{1}{2} \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle \quad \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2}; \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle \quad \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle \quad \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2}; \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle$$

$s = \frac{1}{2}$ 인 입자 두 개가 있을 때

s 의 가능한 고유상태는 다음과 같습니다.

$$|1,1\rangle \quad |1,0\rangle \quad |1,-1\rangle \quad |0,0\rangle$$

위의 상태들을 두 개의 입자로 어떻게 표현할 수 있을까요?

$$|\uparrow\uparrow\rangle \quad |\uparrow\downarrow\rangle \quad |\downarrow\uparrow\rangle \quad |\downarrow\downarrow\rangle$$

$s = \frac{1}{2}$ 인 입자 두 개가 있을 때

먼저 $|1,1\rangle$ 은 다음과 같습니다.

$$|1,1\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle$$

$s = \frac{1}{2}$ 인 입자 두 개가 있을 때

먼저 $|1,1\rangle$ 은 다음과 같습니다.

$$|1,1\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle$$

여기에 사다리 연산자를 계속 작용합니다.

$$|1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle)$$

$$|1,-1\rangle = |\downarrow\downarrow\rangle$$

$s = \frac{1}{2}$ 인 입자 두 개가 있을 때

마지막으로 $|0,0\rangle$ 을 구하기 위해 앞의 세 벡터와 수직인 다른 벡터를 찾습니다.

$$|0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$$

일반적인 경우

다음과 같은 클렙쉬-고든 Clebsch-Gordon 계수를 사용해서 전개가 됩니다.

$$|s, m\rangle = \sum_{m_1+m_2=m} C_{m_1 m_2 m}^{s_1 s_2 s} |s_1 m_1\rangle |s_2 m_2\rangle$$

얽힘 entanglement 이란?

스핀의 얽힘 entanglement

다음과 같은 경우 한 쪽 스핀이 **업**이면 다른 쪽은 **다운**이고, 그 역도 성립합니다. 즉, 한 스핀의 측정이 다른 스핀의 상태를 결정하게 됩니다.

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$$

스핀의 얽힘 entanglement

이 때 두 입자는 얽혀있다(entangled)고 합니다.

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$$

스핀의 얽힘 entanglement



스핀의 얽힘 entanglement



스핀의 얽힘과 관련한 개념적 역설로
EPR (Einstein-Podolsky-Rosen) 패러독스라는 것이 알려져 있습니다.
그러나 실제로 정보가 빛의 속도보다 빠르게 이동하거나
양자역학적 얽힘을 부정하는 현상은
실험적으로 알려져 있지 않습니다.

스핀의 얽힘 entanglement



밀도 행렬

$$\hat{\rho} \equiv |\Psi\rangle\langle\Psi| = \sum_{n=1}^N |c_n|^2 |n\rangle\langle n| = \sum_{n=1}^N p_n |n\rangle\langle n|$$

그러면 일반적으로 다음이 성립합니다.

$$\text{tr } \hat{\rho} \hat{Q} = \langle \hat{Q} \rangle$$

$$|\Psi\rangle = \sum_n c_n |n\rangle$$

폰 노이만 엔트로피 von Neumann entropy

폰 노이만은 다음과 같은 방법으로 엔트로피를 정의했습니다.

$$S_{vN} \equiv -\text{tr} \hat{\rho} \ln \hat{\rho} = - \sum_{n=1}^N p_n \ln p_n$$

이것은 새년Shannon이 정의한 정보information의 기댓값과도 같습니다.

$$I_n \equiv -\ln p_n$$

$$|\Psi\rangle = \sum_n c_n |n\rangle$$

밀도 행렬의 예

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle)$$

$$|\psi\rangle\langle\psi| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

입자 2에 대한 정보만 알고 싶다면?

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle)$$

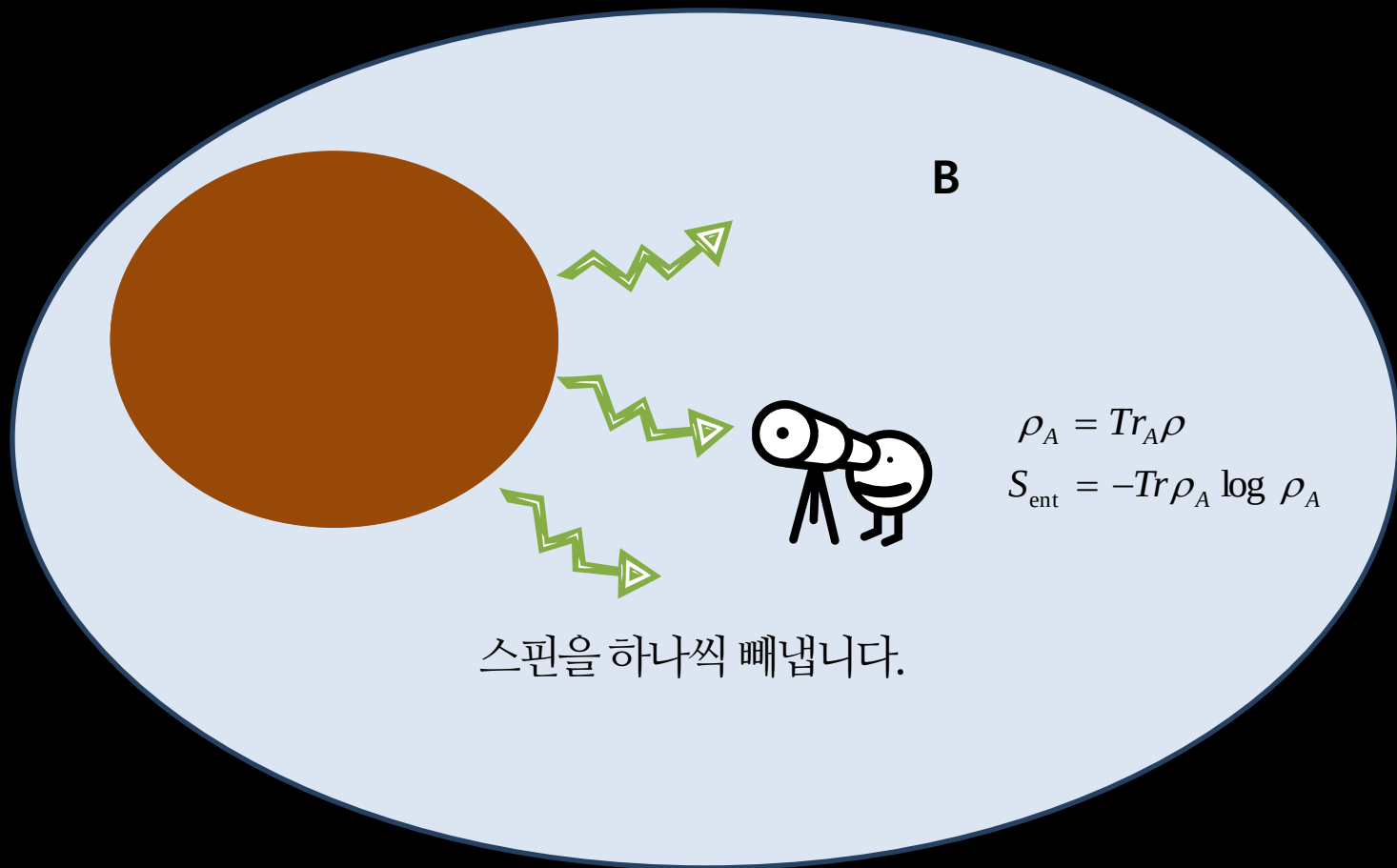
$$\rho_2 \equiv \text{Tr}_1 |\psi\rangle\langle\psi| = \text{Tr}_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

얽힘 엔트로피 entanglement entropy

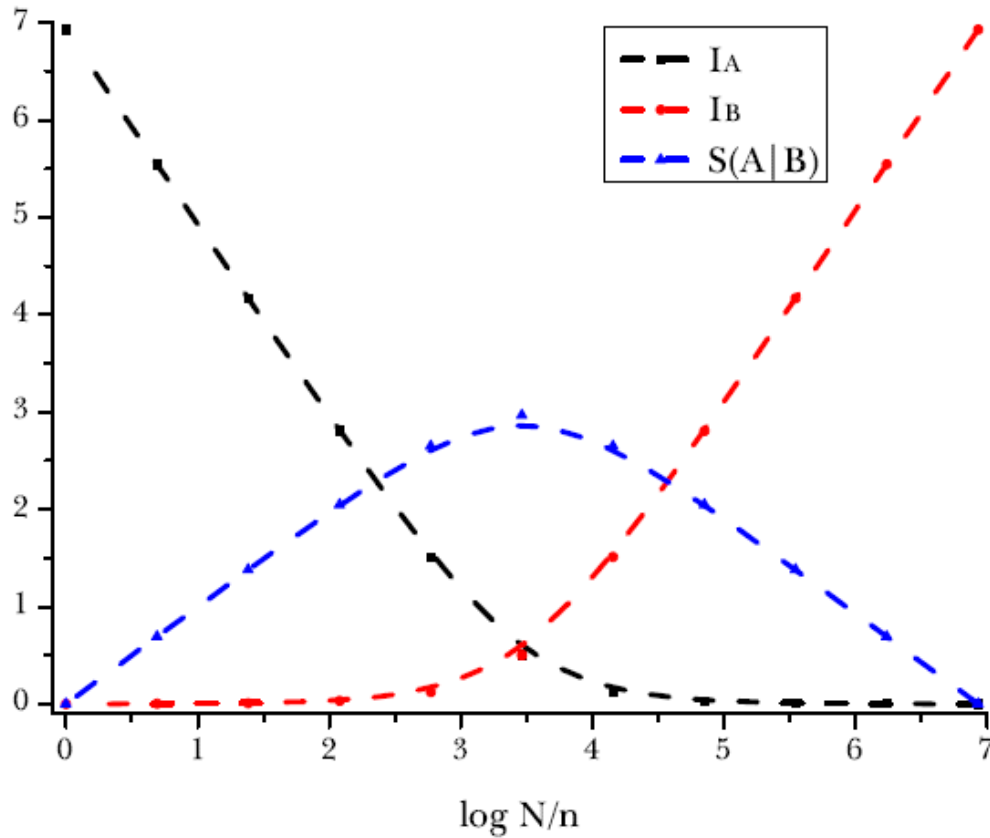
$$S(2|1) = -\text{Tr}_2 \rho_2 \ln \rho_2$$

$$= \ln 2 > 0$$

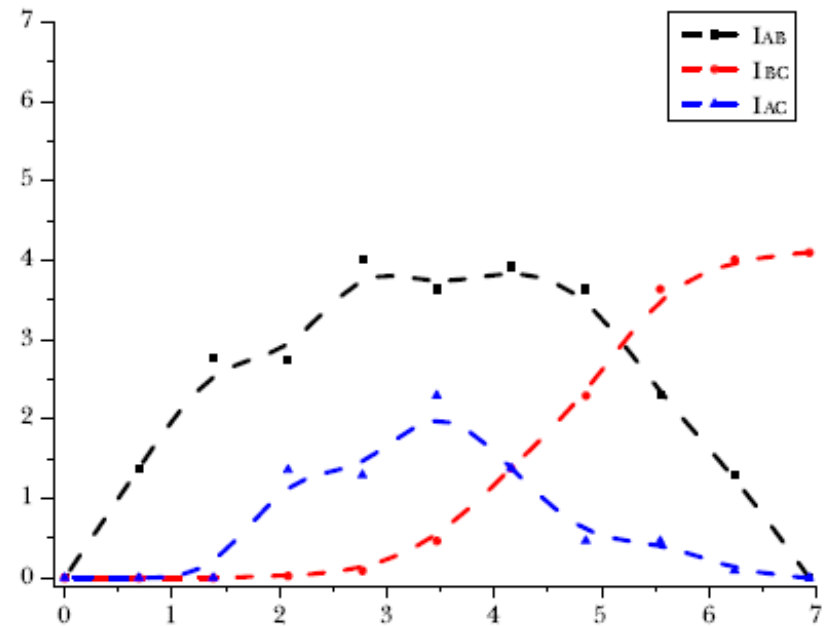
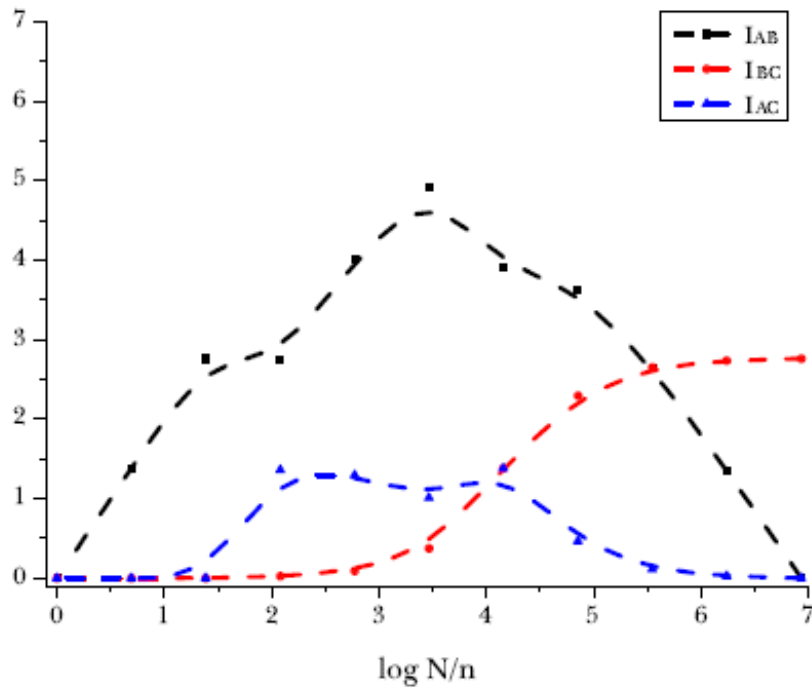
우리는 같은 계산을 N 개의 스핀으로
확장할 수 있습니다.

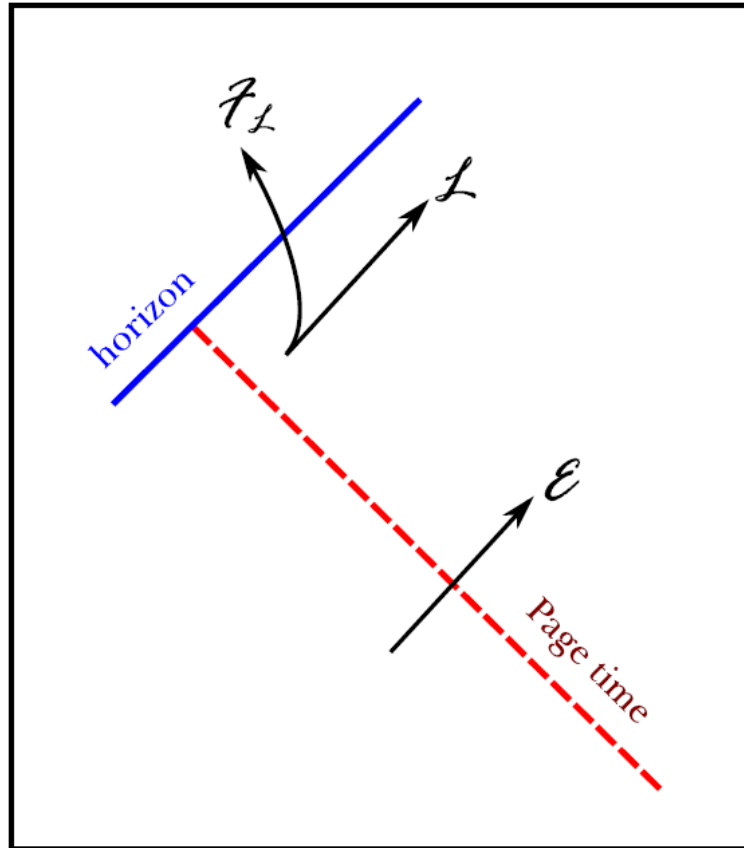


우리는 같은 계산을 N 개의 스핀으로 확장할 수 있습니다.



두 개 뿐만 아니라 세 개의 시스템 사이의
얽힘 엔트로피도 계산할 수 있습니다.





우리 우주는 서로 얽혀있습니다.
블랙홀의 정보손실문제도
얽힘에 대한 문제이기도 합니다.

아하라노프-봄 Ahararov-Bohm 효과

전자기장에서의 입자

$$m\ddot{\vec{r}} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

전기장 및 자기장의 영향을 받는 입자는
다음과 같은 힘에 의해 운동을 합니다.

전자기장에서의 입자

$$m\ddot{\vec{r}} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

전기장과 자기장은
스칼라 퍼텐셜과 벡터 퍼텐셜에 의해 기술됩니다.

전자기장에서의 입자

$$m\ddot{\vec{r}} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 + q\vec{v} \cdot \vec{A} - q\varphi$$

이러한 운동방정식은 위와 같은
라그랑지안으로부터 얻을 수 있습니다.

전자기장에서의 입자

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 + q \vec{v} \cdot \vec{A} - q\varphi$$

$$H = \frac{1}{2m} (\vec{p} - q\vec{A})^2 + q\varphi$$

이 라그랑지안에서 일반화 운동량을 구해서
해밀토니안을 구하면 위와 같습니다.

자기장을 포함한 슈뢰딩거 방정식

$$\left[\frac{1}{2m} (-i\hbar \nabla - q\vec{A})^2 + q\varphi \right] \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

따라서 자기장을 포함한 슈뢰딩거 방정식은 다음과 같습니다.

자기장을 포함한 슈뢰딩거 방정식

$$\left[\frac{1}{2m} (-i\hbar \nabla - q\vec{A})^2 \right] \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

이제 전기장은 없지만
자기장은 어떤 영역에 존재하는 경우를 생각해봅시다.

자기장을 포함한 슈뢰딩거 방정식

$$\left[\frac{1}{2m} (-i\hbar \nabla - q\vec{A})^2 \right] \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

$$\Psi = e^{i\frac{q}{\hbar} \int_0^{\vec{r}} \vec{A}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}'} \Psi'$$

그러면 우리는 파동함수를 벡터 퍼텐셜에 의존하는 부분과 의존하지 않는 부분으로 나누어 쓸 수 있습니다.

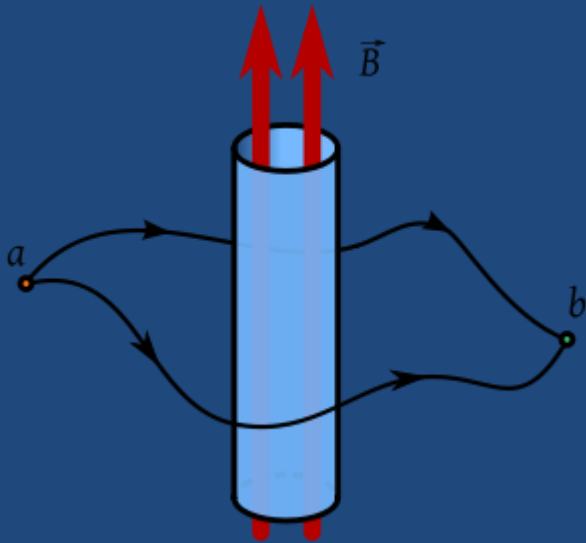
자기장을 포함한 슈뢰딩거 방정식

$$\left[\frac{1}{2m} (-i\hbar \nabla - q\vec{A})^2 \right] \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

$$\Psi = e^{i\frac{q}{\hbar} \int_0^{\vec{r}} \vec{A}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}'} \Psi'$$

따라서 공간의 어떤 영역에 벡터 퍼텐셜이 존재한다면,
입자가 움직이는 경로에 따라
위상차가 발생한다는 것을 의미합니다.

아하라노프-봄 효과

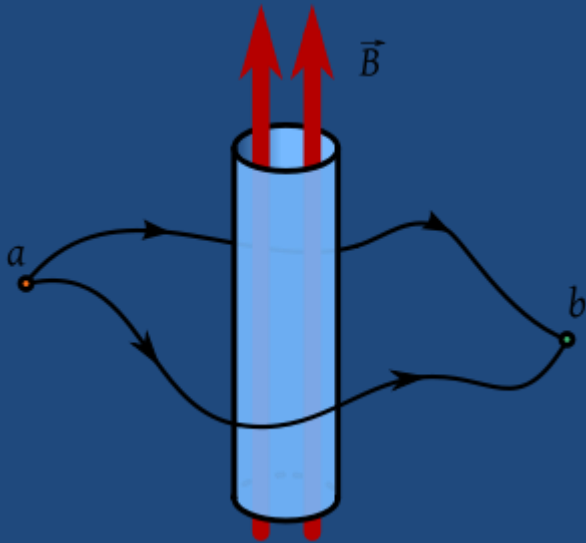


$$\vec{A} = \frac{\Phi}{2\pi r} \hat{\phi} \quad \Phi = \pi a^2 B$$

$$(\text{위상차}) = \frac{q}{\hbar} \oint \vec{A}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' = \frac{q}{\hbar} \Phi$$

반지름 a 인 솔레노이드 내부에 균일한 자기장 B 가 주어져 있다면, 경로에 따른 위상차는 위와 같습니다.

아하라노프-봄 효과



$$\vec{A} = \frac{\Phi}{2\pi r} \hat{\phi} \quad \Phi = \pi a^2 B$$

$$(\text{위상차}) = \frac{q}{\hbar} \oint \vec{A}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' = \frac{q}{\hbar} \Phi$$

놀라운 사실은 두 입자는 자기장을 느끼지 못한다는 점입니다.
오직 벡터 퍼텐셜만 느끼는 데에도 불구하고
측정할 수 있는 물리적 효과를 가지게 됩니다.

따라서 고전 물리학에서는 벡터 퍼텐셜 자체가
물리적 의미를 갖지 않았지만
양자 물리학에서는 벡터 퍼텐셜이
물리적 의미를 가질 수 있습니다.

다른 한 편, 아하라노프-봄 효과는
벡터 퍼텐셜의 존재를 측정할 수 있는 물리적 방법을
우리에게 제공해주게 됩니다.

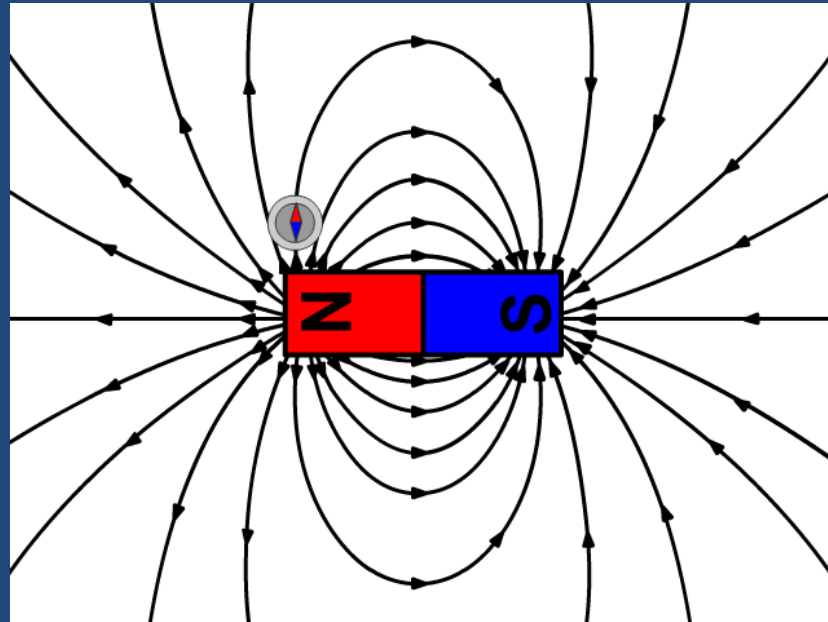
디랙의 자기 홀극 magnetic monopole

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

우리는 맥스웰 방정식으로부터
자기 홀극은 존재할 수 없다는 것을 알고 있습니다.

디랙의 자기 홀극 magnetic monopole



자기력선은 나가는 것이 있다면
반드시 들어오는 것도 있어야 합니다.

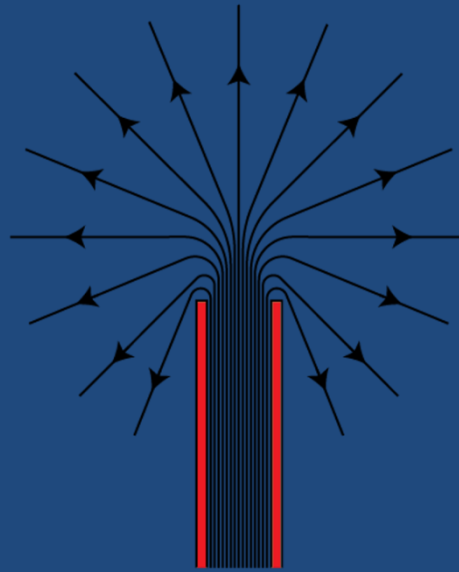
디랙의 자기 홀극 magnetic monopole

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

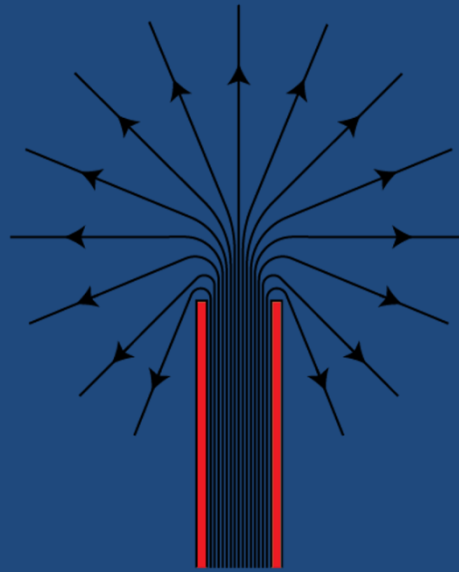
그러나 여기에서 한 가지 전제조건이 있다면, 벡터 퍼텐셜이 특이점을 지니지 않는다는 것입니다.

디랙의 자기 홀극 magnetic monopole



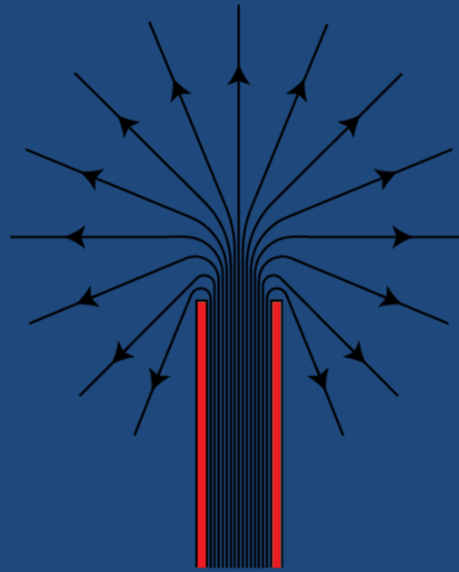
디랙은 1931년 특이점을 갖는 벡터 퍼텐셜을 가정함으로써 자기 홀극의 이론적 가능성을 생각했습니다.

디랙의 자기 홀극 magnetic monopole



여기에서 특이점이란 자기력선이 아주 좁은 공간으로 들어오는 곳이라고 생각하면 됩니다.

디랙의 자기 홀극 magnetic monopole

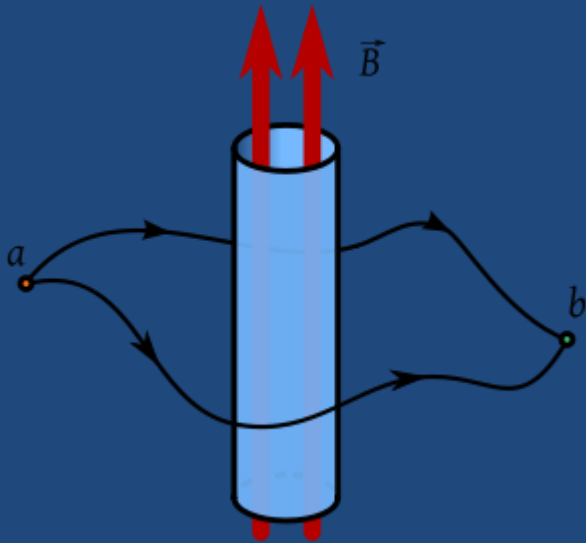


자기력선이 들어오는 좁은 공간이 엄청나게 좁아지게 된다면
우리는 물리적으로 이 곳을 측정할 수 없을 것입니다.
따라서 우리는 사실상 자기 홀극을 보는 것으로
착각할 수도 있을 것입니다.

하지만 디랙은 이런 거짓말이 통할 수 없다는 것을
깨닫게 됩니다.

아하라노프-봄 효과에 의해
자기장을 직접 볼 수는 없어도
벡터 퍼텐셜의 존재를 측정할 수 있기 때문입니다.

자기 홀극과 아하라노프-봄 효과



$$\vec{A} = \frac{\Phi}{2\pi r} \hat{\phi} \quad \Phi = \pi a^2 B$$

$$(\text{위상차}) = \frac{q}{\hbar} \oint \vec{A}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' = \frac{q}{\hbar} \Phi$$

여기에서 디랙은 마지막 가능성을 생각합니다.
만일 위상차가 $2\pi n$ 이 된다면, 아하라노프-봄 효과조차도
그 존재를 파악할 수 없을 것입니다.

자기 홀극과 아하라노프-봄 효과

$$(\text{위상차}) = \frac{q}{\hbar} \oint \vec{A}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' = \frac{q}{\hbar} \Phi$$

자기 선속 Φ 는 자기magnetic charge q_M 에 비례하므로

$$q q_M \propto n$$

이라는 결과를 얻게 됩니다.

디랙의 양자화 조건

$$(\text{위상차}) = \frac{q}{\hbar} \oint \vec{A}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' = \frac{q}{\hbar} \Phi$$

$$q q_M \propto n$$

따라서 자하는 전하에 반비례하고
더 나아가서 불연속적인 값을 갖게 됩니다.
이것을 자기 홀극에 대한
디랙의 양자화 조건이라고 합니다.

자기 홀극은 이론적인 맥락에서
자연스럽게 존재할 수 있다는 것이 알려져 있습니다.
디랙의 양자화 조건은 자기 홀극과 관련해서
수학적으로 요청되는 조건을 반영하고 있습니다.

한 편, 자기 홀극은 아직까지 발견되지 않았습니다.
자기 홀극이 이론적으로는 존재해야 하지만
실험적으로는 발견되지 않는다는 사실로부터
초기 우주론에 대한 중요한 단서를 얻을 수 있습니다.

감사합니다