

제7장

# 시간에 무관한 섭동이론

이제부터는 양자역학을 좀 더  
현실적인 상황에 적용하기 위한  
여러 기법들을 공부하도록 합시다.

그 첫 번째로, 이번 장에서는  
시간에 무관한 **섭동이론** perturbation theory을  
살펴봅시다.

우리가 좀 더 상위 이론으로부터 출발할 수 있다면,  
그리고 모든 슈뢰딩거 방정식을 직접 푼다면  
이러한 근사적 접근은 필요하지 않을 것입니다.

그러나 다음 두 가지 이유에 의해  
이러한 근사적 접근을 준비하는 것이 필요합니다.

첫째, 많은 경우 우리는 **실험적 관찰**을 통해  
새로운 효과가 있다는 것을 발견합니다.  
이것은 근사적 방법에 의해 먼저 기술되고,  
이 근사적 방법을 좀 더 자연스럽게 설명하는 과정에서  
상위 이론을 발견하게 됩니다.  
즉, 근사적 방법은 상위 이론을 찾는  
**발견의 원리**가 될 수 있습니다.

둘째, 좀 더 정밀한 계산을  
수치적 기법을 통해 수행할 때,  
최종적인 결과가 **물리적인 의미**를 갖는지를 보기 위해서  
근사적인 기법과의 비교가 필요합니다.  
근사적인 기법은 최소한 **정성적**으로  
어떤 현상을 보여주는지를 알려주게 됩니다.

시간에 무관한 섭동 이론은  
다양한 효과가 가지는 에너지 준위의 변화에 대해  
정성적/정량적인 설명을 제공해 줍니다.

변분 원리는 우리가 직접 파동 함수를 풀지 않더라도  
파동 함수가 대략 어떤 형태가 될 것인지를  
추측할 수 있게 해줍니다.

WKB 어림 방법은  
파동 함수를 직접 풀기 어려운 상황에서  
양자 터널링 현상이 어떻게 일어나는지를  
근사적으로 계산할 수 있게 해줍니다.

산란과 양자 동역학은  
섭동적 효과들이 시간에 따라  
어떻게 변화하는지를 계산할 수 있도록 해줍니다.

$$H^0 \psi_n^0 = E_n^0 \psi_n^0$$

시간에 무관한 섭동 이론은 이러한 상황을 다룹니다.  
먼저 우리가 위와 같은 해밀토니안의 고유 상태를  
이미 알고 있다고 합시다.

$$H^0 \psi_n^0 = E_n^0 \psi_n^0$$

$$H = H^0 + \lambda H'$$

하지만 실제 해밀토니안은 우리가 알고 있는 것과는  
좀 다른 형태라면 어떻게 될까요?

$$H^0 \psi_n^0 = E_n^0 \psi_n^0$$

$$H = H^0 + \lambda H'$$

가장 좋은 방법은 전체 해밀토니안에 대해  
슈뢰딩거 방정식을 푸는 것이겠지만,  
두 번째 항의 크기가 첫 번째에 비해 작다면,  
여기에 대한 섭동적 접근이 가능할 것입니다.

$$\psi_n = \psi_n^0 + \lambda \psi_n^1 + \lambda^2 \psi_n^2 + \dots$$

$$E_n = E_n^0 + \lambda E_n^1 + \lambda^2 E_n^2 + \dots$$

고유 상태  $\psi_n$ 과 고윳값  $E_n$ 은  $\lambda$ 에 대해 위와 같이 전개됩니다.

여기에서 위에 붙은 **첨자**는

$\lambda$ 에 대한 몇 번째 항인가를 나타냅니다.

이 항들을 더 많이 더할 수록, 좀 더 정확한 근사가 됩니다.

$$\begin{aligned}
 & (H^0 + \lambda H')[\psi_n^0 + \lambda \psi_n^1 + \cdots] \\
 &= (E_n^0 + \lambda E_n^1 + \cdots)[\psi_n^0 + \lambda \psi_n^1 + \cdots]
 \end{aligned}$$

이제 완전한 형태의 슈뢰딩거 방정식을 적어봅시다.

0차: 
$$H^0 \psi_n^0 = E_n^0 \psi_n^0$$

1차: 
$$H^0 \psi_n^1 + H' \psi_n^0 = E_n^0 \psi_n^1 + E_n^1 \psi_n^0$$

2차: 
$$H^0 \psi_n^2 + H' \psi_n^1 = E_n^0 \psi_n^2 + E_n^1 \psi_n^1 + E_n^2 \psi_n^0$$

이것을  $\lambda$ 의 차수별로 묶어서 위와 같은 방정식을 얻습니다.

0차:  $H^0 \psi_n^0 = E_n^0 \psi_n^0$

1차:  $H^0 \psi_n^1 + H' \psi_n^0 = E_n^0 \psi_n^1 + E_n^1 \psi_n^0$

2차:  $H^0 \psi_n^2 + H' \psi_n^1 = E_n^0 \psi_n^2 + E_n^1 \psi_n^1 + E_n^2 \psi_n^0$

우리는 첫 번째 방정식에 대한 해를 이미 알고 있습니다.  
이것을 단서로 해서 1차 항에 대해 먼저 풀어봅시다.

$$H^0 \psi_n^1 + H' \psi_n^0 = E_n^0 \psi_n^1 + E_n^1 \psi_n^0$$

$$\begin{aligned} \langle \psi_n^0 | H^0 | \psi_n^1 \rangle + \langle \psi_n^0 | H' | \psi_n^0 \rangle &= E_n^0 \langle \psi_n^0 | \psi_n^1 \rangle + E_n^1 \langle \psi_n^0 | \psi_n^0 \rangle \\ &= E_n^0 \langle \psi_n^0 | \psi_n^1 \rangle + E_n^1 \end{aligned}$$

이 방정식의 양변에  $\langle \psi_n^0 |$ 을 작용시키면 위와 같이 전개 됩니다.  
 $\langle \psi_n^0 |$ 은 정규 직교 기저로 생각할 수 있으므로  
 간단하게 첫 번째 에너지 섭동을 얻습니다.

$$H^0 \psi_n^1 + H' \psi_n^0 = E_n^0 \psi_n^1 + E_n^1 \psi_n^0$$

$$\begin{aligned} \langle \psi_n^0 | H^0 | \psi_n^1 \rangle + \langle \psi_n^0 | H' | \psi_n^0 \rangle &= E_n^0 \langle \psi_n^0 | \psi_n^1 \rangle + E_n^1 \langle \psi_n^0 | \psi_n^0 \rangle \\ &= E_n^0 \langle \psi_n^0 | \psi_n^1 \rangle + E_n^1 \end{aligned}$$

$$E_n^1 = \langle \psi_n^0 | H' | \psi_n^0 \rangle$$

이 방정식의 양변에  $\langle \psi_n^0 |$ 을 작용시키면 위와 같이 전개 됩니다.  
 $\langle \psi_n^0 |$ 은 정규 직교 기저로 생각할 수 있으므로  
 간단하게 첫 번째 에너지 섭동을 얻습니다.

$$H^0 \psi_n^1 + H' \psi_n^0 = E_n^0 \psi_n^1 + E_n^1 \psi_n^0$$

$$(H^0 - E_n^0) \psi_n^1 = -(H' - E_n^1) \psi_n^0$$

새로운 고유 상태도 아래와 같이 기존의 기저 벡터들로 표현할 수 있습니다.

$$\psi_n^1 = \sum_{m \neq n} c_m^{(n)} \psi_m^0$$

$$H^0 \psi_n^1 + H' \psi_n^0 = E_n^0 \psi_n^1 + E_n^1 \psi_n^0$$

$$(H^0 - E_n^0) \psi_n^1 = -(H' - E_n^1) \psi_n^0$$

$$= \sum_{m \neq n} (E_m^0 - E_n^0) c_m^{(n)} \psi_m^0$$

새로운 고유 상태도 아래와 같이 기존의 기저 벡터들로 표현할 수 있습니다.

$$\psi_n^1 = \sum_{m \neq n} c_m^{(n)} \psi_m^0$$

$$H^0 \psi_n^1 + H' \psi_n^0 = E_n^0 \psi_n^1 + E_n^1 \psi_n^0$$

$$(H^0 - E_n^0) \psi_n^1 = -(H' - E_n^1) \psi_n^0$$

$$= \sum_{m \neq n} (E_m^0 - E_n^0) c_m^{(n)} \psi_m^0$$

$$\sum_{m \neq n} (E_m^0 - E_n^0) c_m^{(n)} \langle \psi_\ell^0 | \psi_m^0 \rangle = -\langle \psi_\ell^0 | H' | \psi_n^0 \rangle + E_n^1 \langle \psi_\ell^0 | \psi_n^0 \rangle$$

이제 양 변에  $\langle \psi_\ell^0 |$ 을 작용시켜 봅시다.

$$\sum_{m \neq n} (E_m^0 - E_n^0) c_m^{(n)} \langle \psi_\ell^0 | \psi_m^0 \rangle = -\langle \psi_\ell^0 | H' | \psi_n^0 \rangle + E_n^1 \langle \psi_\ell^0 | \psi_n^0 \rangle$$

$$\ell = n: \quad E_n^1 = \langle \psi_n^0 | H' | \psi_n^0 \rangle$$

$$\begin{aligned} \ell \neq n: \quad \sum_{m \neq n} (E_m^0 - E_n^0) c_m^{(n)} \delta_{\ell m} &= (E_\ell^0 - E_n^0) c_\ell^{(n)} \\ &= -\langle \psi_\ell^0 | H' | \psi_n^0 \rangle \end{aligned}$$

이 식은 위와 같이 두 가지 경우로 나뉘어집니다.  
 이 중에 첫 번째 경우는 우리가 이미 구한 식이고,  
 두 번째 경우는 새로운 정보를 담고 있습니다.

$$\sum_{m \neq n} (E_m^0 - E_n^0) c_m^{(n)} \langle \psi_\ell^0 | \psi_m^0 \rangle = -\langle \psi_\ell^0 | H' | \psi_n^0 \rangle + E_n^1 \langle \psi_\ell^0 | \psi_n^0 \rangle$$

$$\ell = n: \quad E_n^1 = \langle \psi_n^0 | H' | \psi_n^0 \rangle$$

$$\ell \neq n: \quad \sum_{m \neq n} (E_m^0 - E_n^0) c_m^{(n)} \delta_{\ell m} = (E_\ell^0 - E_n^0) c_\ell^{(n)} \\ = -\langle \psi_\ell^0 | H' | \psi_n^0 \rangle$$

$$c_m^{(n)} = \frac{\langle \psi_m^0 | H' | \psi_n^0 \rangle}{E_n^0 - E_m^0}$$

이것으로부터 계수에 대한 위의 관계식을 얻습니다.

$$\sum_{m \neq n} (E_m^0 - E_n^0) c_m^{(n)} \langle \psi_\ell^0 | \psi_m^0 \rangle = -\langle \psi_\ell^0 | H' | \psi_n^0 \rangle + E_n^1 \langle \psi_\ell^0 | \psi_n^0 \rangle$$

$$\ell = n: \quad E_n^1 = \langle \psi_n^0 | H' | \psi_n^0 \rangle$$

$$\begin{aligned} \ell \neq n: \quad \sum_{m \neq n} (E_m^0 - E_n^0) c_m^{(n)} \delta_{\ell m} &= (E_\ell^0 - E_n^0) c_\ell^{(n)} \\ &= -\langle \psi_\ell^0 | H' | \psi_n^0 \rangle \end{aligned}$$

$$\psi_n^1 = \sum_{m \neq n} \frac{\langle \psi_m^0 | H' | \psi_n^0 \rangle}{E_n^0 - E_m^0} \psi_m^0$$

또는 정리해서 다음 관계식을 얻습니다.

0차:  $H^0 \psi_n^0 = E_n^0 \psi_n^0$

1차:  $H^0 \psi_n^1 + H' \psi_n^0 = E_n^0 \psi_n^1 + E_n^1 \psi_n^0$

2차:  $H^0 \psi_n^2 + H' \psi_n^1 = E_n^0 \psi_n^2 + E_n^1 \psi_n^1 + E_n^2 \psi_n^0$

이제 1차 항에 대해 모두 표현 했으므로,  
2차 항에 대해서도 표현할 수 있습니다.

$$H^0 \psi_n^2 + H' \psi_n^1 = E_n^0 \psi_n^2 + E_n^1 \psi_n^1 + E_n^2 \psi_n^0$$

$$E_n^0 \langle \psi_n^0 | \psi_n^2 \rangle + \langle \psi_n^0 | H' | \psi_n^1 \rangle = E_n^0 \langle \psi_n^0 | \psi_n^2 \rangle + E_n^1 \langle \psi_n^0 | \psi_n^1 \rangle + E_n^2 \langle \psi_n^0 | \psi_n^0 \rangle$$

우리는 편의상 에너지의 기댓값만을 계산해 보겠습니다.  
이것을 위해 양 변에  $\langle \psi_n^0 |$ 을 작용시킵니다.

$$H^0 \psi_n^2 + H' \psi_n^1 = E_n^0 \psi_n^2 + E_n^1 \psi_n^1 + E_n^2 \psi_n^0$$

$$E_n^0 \langle \psi_n^0 | \psi_n^2 \rangle + \langle \psi_n^0 | H' | \psi_n^1 \rangle = E_n^0 \langle \psi_n^0 | \psi_n^2 \rangle + E_n^1 \langle \psi_n^0 | \psi_n^1 \rangle + E_n^2 \langle \psi_n^0 | \psi_n^0 \rangle$$

$$\langle \psi_n^0 | H' | \psi_n^1 \rangle = E_n^1 \langle \psi_n^0 | \psi_n^1 \rangle + E_n^2 \langle \psi_n^0 | \psi_n^0 \rangle$$

우리는 편의상 에너지의 기댓값만을 계산해 보겠습니다.  
이것을 위해 양 변에  $\langle \psi_n^0 |$ 을 작용시킵니다.

$$H^0 \psi_n^2 + H' \psi_n^1 = E_n^0 \psi_n^2 + E_n^1 \psi_n^1 + E_n^2 \psi_n^0$$

$$E_n^0 \langle \psi_n^0 | \psi_n^2 \rangle + \langle \psi_n^0 | H' | \psi_n^1 \rangle = E_n^0 \langle \psi_n^0 | \psi_n^2 \rangle + E_n^1 \langle \psi_n^0 | \psi_n^1 \rangle + E_n^2 \langle \psi_n^0 | \psi_n^0 \rangle$$

$$\begin{aligned} \langle \psi_n^0 | H' | \psi_n^1 \rangle &= E_n^1 \langle \psi_n^0 | \psi_n^1 \rangle + E_n^2 \langle \psi_n^0 | \psi_n^0 \rangle \\ &= \sum_{m \neq n} c_m^{(n)} \langle \psi_n^0 | \psi_m^0 \rangle = 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

우리는 편의상 에너지의 기댓값만을 계산해 보겠습니다.  
이것을 위해 양 변에  $\langle \psi_n^0 |$ 을 작용시킵니다.

$$H^0 \psi_n^2 + H' \psi_n^1 = E_n^0 \psi_n^2 + E_n^1 \psi_n^1 + E_n^2 \psi_n^0$$

$$E_n^0 \langle \psi_n^0 | \psi_n^2 \rangle + \langle \psi_n^0 | H' | \psi_n^1 \rangle = E_n^0 \langle \psi_n^0 | \psi_n^2 \rangle + E_n^1 \langle \psi_n^0 | \psi_n^1 \rangle + E_n^2 \langle \psi_n^0 | \psi_n^0 \rangle$$

$$\langle \psi_n^0 | H' | \psi_n^1 \rangle = E_n^1 \langle \psi_n^0 | \psi_n^1 \rangle + E_n^2 \langle \psi_n^0 | \psi_n^0 \rangle$$

$$E_n^2 = \langle \psi_n^0 | H' | \psi_n^1 \rangle = \sum_{m \neq n} c_m^{(n)} \langle \psi_n^0 | H' | \psi_m^0 \rangle$$

우리는 편의상 에너지의 기댓값만을 계산해 보겠습니다.  
이것을 위해 양 변에  $\langle \psi_n^0 |$ 을 작용시킵니다.

$$H^0 \psi_n^2 + H' \psi_n^1 = E_n^0 \psi_n^2 + E_n^1 \psi_n^1 + E_n^2 \psi_n^0$$

$$E_n^0 \langle \psi_n^0 | \psi_n^2 \rangle + \langle \psi_n^0 | H' | \psi_n^1 \rangle = E_n^0 \langle \psi_n^0 | \psi_n^2 \rangle + E_n^1 \langle \psi_n^0 | \psi_n^1 \rangle + E_n^2 \langle \psi_n^0 | \psi_n^0 \rangle$$

$$\langle \psi_n^0 | H' | \psi_n^1 \rangle = E_n^1 \langle \psi_n^0 | \psi_n^1 \rangle + E_n^2 \langle \psi_n^0 | \psi_n^0 \rangle$$

$$\begin{aligned} E_n^2 &= \langle \psi_n^0 | H' | \psi_n^1 \rangle = \sum_{m \neq n} c_m^{(n)} \langle \psi_n^0 | H' | \psi_m^0 \rangle \\ &= \sum_{m \neq n} \frac{|\langle \psi_n^0 | H' | \psi_m^0 \rangle|^2}{E_n^0 - E_m^0} \end{aligned}$$

이것이 에너지에 대한 2차 섭동 공식입니다.  
우리는 이런 방식으로 임의의 차수의 섭동에 대해  
계산을 이어 나갈 수 있습니다.

지금까지 우리는 각 양자수에 대해 에너지가 같지 않다고,  
즉 겹침이 없다고 가정해왔습니다.  
그러나 겹침이 있는 경우는 어떻게 다루어야 할까요?

$$H^0 \psi_a^0 = E^0 \psi_a^0$$

$$H^0 \psi_b^0 = E^0 \psi_b^0$$

위와 같이 같은 에너지에 대해 두 개의 고유 상태가 있다고 합시다.  
이 두 고유 상태는 정규 직교한다고 생각할 수 있습니다.

$$H^0 \psi_a^0 = E^0 \psi_a^0$$

$$H^0 \psi_b^0 = E^0 \psi_b^0$$

$$\psi^0 = \alpha \psi_a^0 + \beta \psi_b^0$$

그렇다면 일반적으로 이 둘의 선형 결합도  
 $H^0$ 의 고유 상태가 됩니다.

$$H^0 \psi_a^0 = E^0 \psi_a^0$$

$$H^0 \psi_b^0 = E^0 \psi_b^0$$

$$\psi^0 = \alpha \psi_a^0 + \beta \psi_b^0$$

그러나 문제는  $\psi^0$ 가 일반적으로  $H^0 + \lambda H'$ 의  
고유 상태가 되는 것은 아닙니다.  
이것을 위해 우리는  $\alpha$ 와  $\beta$ 를 잘 선택해 주어야 합니다.

$$H^0 \psi_a^0 = E^0 \psi_a^0$$

$$H^0 \psi_b^0 = E^0 \psi_b^0$$

$$\psi^0 = \alpha \psi_a^0 + \beta \psi_b^0$$

$$W_{ij} = \langle \psi_i^0 | H' | \psi_j^0 \rangle$$

이것은 그렇게 어렵지 않습니다.  
위와 같은 행렬 요소를 대각화하면 됩니다.

$$E_{\pm}^1 = \frac{1}{2} \left( W_{aa} + W_{bb} \pm \sqrt{(W_{aa} - W_{bb})^2 + 4|W_{ab}|^2} \right)$$

$$W_{ij} = \langle \psi_i^0 | H' | \psi_j^0 \rangle$$

이 결과로 우리는 위와 같은 두 개의 에너지를 얻게 됩니다.  
이 과정은 겹침이 좀 더 복잡한 경우에도 쉽게 확장할 수 있습니다.

$$E_{\pm}^1 = \frac{1}{2} \left( W_{aa} + W_{bb} \pm \sqrt{(W_{aa} - W_{bb})^2 + 4|W_{ab}|^2} \right)$$

$$W_{ij} = \langle \psi_i^0 | H' | \psi_j^0 \rangle$$

그러나 만일 운이 좋아서  $W_{ab} = 0$ 이 된다면,  
처음 선택한 기저들이 자동으로  $W_{ij}$ 를 대각화 시킵니다.

이렇게 ‘좋은’ 상태를 취하는 것이  
섭동론을 좀 더 쉽게 만들어 줍니다.

이제 이러한 기법을 바탕으로  
몇 가지 중요한 문제에 적용해 봅시다.

$$H = H_{Bohr}$$

수소 원자의 전자기력  $\propto \alpha^2$

$$H = H_{Bohr}$$

수소 원자의 전자기력  $\propto \alpha^2$

$$+H_r + H_{SO}$$

미세 구조  $\propto \alpha^4$

(= 상대론적 수정 + 스핀-궤도 결합)

$$H = H_{Bohr}$$

수소 원자의 전자기력  $\propto \alpha^2$

$$+H_r + H_{SO}$$

미세 구조  $\propto \alpha^4$   
(= 상대론적 수정 + 스핀-궤도 결합)

$$+H_{Lamb}$$

램 이동  $\propto \alpha^5$   
(양자전기역학)

$$H = H_{Bohr}$$

수소 원자의 전자기력  $\propto \alpha^2$

$$+H_r + H_{SO}$$

미세 구조  $\propto \alpha^4$   
(= 상대론적 수정 + 스핀-궤도 결합)

$$+H_{Lamb}$$

램 이동  $\propto \alpha^5$   
(양자전기역학)

$$+H_{hf}$$

초미세 구조  $\propto \alpha^4 m_e/m_p$   
(= 양성자 스핀-전자 스핀 결합)

$$H = H_{Bohr}$$

수소 원자의 전자기력  $\propto \alpha^2$

$$+H_r + H_{SO}$$

미세 구조  $\propto \alpha^4$   
(= 상대론적 수정 + 스핀-궤도 결합)

$$+H_{Lamb}$$

램 이동  $\propto \alpha^5$   
(양자전기역학)

$$+H_{hf}$$

초미세 구조  $\propto \alpha^4 m_e/m_p$   
(= 양성자 스핀-전자 스핀 결합)

$$+H_S$$

외부 전기장에 대한 스타크 효과 및

$$+H_Z$$

외부 자기장에 대한 제만 효과

# 1. 수소의 미세 구조 fine structure

$$H'_{fs} = (\text{상대론적 수정}) + (\text{스핀 - 궤도 결합})$$

다음과 같은 두 가지 항을 고려합시다.  
첫째는 상대론적 보정이고,  
둘째는 이른바 스핀-궤도 결합이라는 항입니다.

$$H'_{fs} = (\text{상대론적 수정}) + (\text{스핀 - 궤도 결합})$$

$$T = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} - mc^2$$

$$\simeq \frac{p^2}{2m} - \frac{p^4}{8m^3 c^2} + \dots$$

다음과 같은 두 가지 항을 고려합시다.  
첫째는 상대론적 보정이고,  
둘째는 이른바 스핀-궤도 결합이라는 항입니다.

$$H'_{fs} = (\text{상대론적 수정}) + (\text{스핀 - 궤도 결합})$$

전자의 자기쌍극자모멘트      양정자가 만들어내는 자기장

$$T = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} - mc^2$$

$$H = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

$$\simeq \frac{p^2}{2m} - \frac{p^4}{8m^3 c^2} + \dots$$

다음과 같은 두 가지 항을 고려합시다.  
 첫째는 상대론적 보정이고,  
 둘째는 이른바 스핀-궤도 결합이라는 항입니다.

$$H'_{fs} = (\text{상대론적 수정}) + (\text{스핀 - 궤도 결합})$$

$$T = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} - mc^2$$

$$\simeq \frac{p^2}{2m} - \frac{p^4}{8m^3 c^2} + \dots$$

$$H = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

전자의 자기쌍극자모멘트      양성자가 만들어내는 자기장 (비관성계)

$$= \left[ - \left( -\frac{e}{m} \vec{S} \right) \cdot \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{mc^2 r^3} \vec{L} \right) \right] \times \frac{1}{2}$$

비관성계에 의한  
토마스 세차

다음과 같은 두 가지 항을 고려합시다.  
 첫째는 상대론적 보정이고,  
 둘째는 이른바 스핀-궤도 결합이라는 항입니다.

$$H'_{fs} = (\text{상대론적 수정}) + (\text{스핀 - 궤도 결합})$$

$$T = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} - mc^2$$

$$\simeq \frac{p^2}{2m} - \frac{p^4}{8m^3 c^2} + \dots$$

$$H = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

전자의 자기쌍극자모멘트      양성자가 만들어내는 자기장 (비관성계)

$$= \left[ - \left( -\frac{e}{m} \vec{S} \right) \cdot \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{mc^2 r^3} \vec{L} \right) \right] \times \frac{1}{2}$$

비관성계에 의한  
토마스 세차

$$= \left( \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{m^2 c^2 r^3} \right) \vec{S} \cdot \vec{L}$$

다음과 같은 두 가지 항을 고려합시다.

첫째는 상대론적 보정이고,

둘째는 이른바 스핀-궤도 결합이라는 항입니다.

$$E_r^1 = \langle H_r' \rangle$$

먼저 상대론적 효과에 대해 에너지의 보정을 계산해 봅시다.

$$E_r^1 = \langle H_r' \rangle$$

$$= -\frac{1}{8m^3c^2} \langle p^2 \psi_n | p^2 \psi_n \rangle$$

$$E_r^1 = \langle H_r' \rangle$$

$$= -\frac{1}{8m^3c^2} \langle p^2 \psi_n | \underset{= 2m(E_n - V)\psi_n}{p^2 \psi_n} \rangle$$

$$= -\frac{1}{2mc^2} (E_n^2 - 2E_n \langle V \rangle + \langle V^2 \rangle)$$

$$E_r^1 = \langle H_r' \rangle$$

$$= -\frac{1}{8m^3c^2} \langle p^2 \psi_n | \underset{= 2m(E_n - V)\psi_n}{p^2 \psi_n} \rangle$$

$$= -\frac{1}{2mc^2} (E_n^2 - 2E_n \langle V \rangle + \langle V^2 \rangle)$$

$$= -\frac{1}{2mc^2} \left( E_n^2 + 2E_n \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right) \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle + \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left\langle \frac{1}{r^2} \right\rangle \right)$$

$$E_r^1 = \langle H_r' \rangle$$

$$= -\frac{1}{8m^3c^2} \langle p^2 \psi_n | \underset{= 2m(E_n - V)\psi_n}{p^2} \psi_n \rangle$$

$$= -\frac{1}{2mc^2} (E_n^2 - 2E_n \langle V \rangle + \langle V^2 \rangle)$$

$$= -\frac{1}{2mc^2} \left( E_n^2 + 2E_n \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right) \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle + \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left\langle \frac{1}{r^2} \right\rangle \right)$$

$$\qquad \qquad \qquad = \frac{1}{n^2 a} \qquad \qquad \qquad = \frac{1}{\left( \ell + \frac{1}{2} \right) n^3 a^2}$$

$$E_r^1 = \langle H_r' \rangle$$

$$= -\frac{1}{8m^3c^2} \langle p^2 \psi_n | p^2 \psi_n \rangle$$

$$= 2m(E_n - V)\psi_n$$

$$= -\frac{1}{2mc^2} (E_n^2 - 2E_n \langle V \rangle + \langle V^2 \rangle)$$

$$= -\frac{1}{2mc^2} \left( E_n^2 + 2E_n \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right) \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle + \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left\langle \frac{1}{r^2} \right\rangle \right)$$

$$= -\frac{(E_n)^2}{2mc^2} \left( \frac{4n}{\ell + \frac{1}{2}} - 3 \right)$$

$$E_{SO}^1 = \langle H'_{SO} \rangle$$

그 다음 스핀-궤도 결합 항에 대해 계산해 봅시다.

$$\begin{aligned} E_{SO}^1 &= \langle H'_{SO} \rangle \\ &= \left( \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0} \right) \frac{1}{m^2 c^2} \left\langle \frac{\vec{S} \cdot \vec{L}}{r^3} \right\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_{SO}^1 &= \langle H'_{SO} \rangle &= \frac{1}{2}(J^2 - L^2 - S^2) \\
 &= \left( \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0} \right) \frac{1}{m^2 c^2} \left\langle \frac{\vec{S} \cdot \vec{L}}{r^3} \right\rangle
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_{SO}^1 &= \langle H'_{SO} \rangle &= \frac{1}{2}(J^2 - L^2 - S^2) \\
 &= \left( \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0} \right) \frac{1}{m^2 c^2} \left\langle \frac{\vec{S} \cdot \vec{L}}{r^3} \right\rangle \\
 &= \left( \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0} \right) \frac{1}{m^2 c^2} \frac{\hbar^2}{2} (j(j+1) - \ell(\ell+1) - s(s+1)) \left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_{SO}^1 &= \langle H'_{SO} \rangle &&= \frac{1}{2}(J^2 - L^2 - S^2) \\
 &= \left( \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0} \right) \frac{1}{m^2 c^2} \left\langle \frac{\vec{S} \cdot \vec{L}}{r^3} \right\rangle \\
 &= \left( \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0} \right) \frac{1}{m^2 c^2} \frac{\hbar^2}{2} (j(j+1) - \ell(\ell+1) - s(s+1)) \left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle \\
 &&&= \frac{1}{\ell \left( \ell + \frac{1}{2} \right) (\ell + 1) n^3 a^3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{SO}^1 &= \langle H'_{SO} \rangle &= \frac{1}{2}(J^2 - L^2 - S^2) \\
&= \left( \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0} \right) \frac{1}{m^2 c^2} \left\langle \frac{\vec{S} \cdot \vec{L}}{r^3} \right\rangle \\
&= \left( \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0} \right) \frac{1}{m^2 c^2} \frac{\hbar^2}{2} (j(j+1) - \ell(\ell+1) - s(s+1)) \left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle \\
&= \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{m^2 c^2} \frac{\hbar^2}{2} \frac{\left( j(j+1) - \ell(\ell+1) - \frac{3}{4} \right)}{\ell \left( \ell + \frac{1}{2} \right) (\ell + 1) n^3 a^3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_{SO}^1 &= \langle H'_{SO} \rangle = \frac{1}{2} (J^2 - L^2 - S^2) \\
 &= \left( \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0} \right) \frac{1}{m^2 c^2} \left\langle \frac{\vec{S} \cdot \vec{L}}{r^3} \right\rangle \\
 &= \left( \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0} \right) \frac{1}{m^2 c^2} \frac{\hbar^2}{2} (j(j+1) - \ell(\ell+1) - s(s+1)) \left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle \\
 &= \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{m^2 c^2} \frac{\hbar^2}{2} \frac{\left( j(j+1) - \ell(\ell+1) - \frac{3}{4} \right)}{\ell \left( \ell + \frac{1}{2} \right) (\ell + 1) n^3 a^3} \\
 &= \frac{(E_n)^2}{m c^2} \frac{n \left( j(j+1) - \ell(\ell+1) - \frac{3}{4} \right)}{\ell \left( \ell + \frac{1}{2} \right) (\ell + 1)}
 \end{aligned}$$

$$E_{fs}^1 = \frac{(E_n)^2}{2mc^2} \left( 3 - \frac{4n}{j + \frac{1}{2}} \right)$$

이 두 결과를 합하면 다음 결과를 얻습니다.

$$\alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \quad : \text{미세구조상수}$$

$$E_{fs}^1 = \frac{(E_n)^2}{2mc^2} \left( 3 - \frac{4n}{j + \frac{1}{2}} \right)$$

$$E_{nj} = -\frac{13.6 \text{ eV}}{n^2} \left( 1 + \frac{\alpha^2}{n^2} \left( \frac{n}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4} \right) \right)$$

따라서 여기에 보정 전의 에너지를 추가하면  
위와 같은 관계를 얻게 됩니다.

$$E = mc^2 \left( 1 + \left( \frac{\alpha}{n - \left(j + \frac{1}{2}\right) + \sqrt{\left(j + \frac{1}{2}\right)^2 - \alpha^2}} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\simeq mc^2 - \frac{E_1}{n^2} \left( 1 + \frac{\alpha^2}{n^2} \left( \frac{n}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4} \right) + O(\alpha^4) \right)$$

정지에너지      상대론적 보정 + 스핀-궤도 결합

이 결과는 디랙 방정식을 풀어서 얻은 결과를  
섭동적으로 전개한 것과 같습니다.

$$E = mc^2 \left( 1 + \left( \frac{\alpha}{n - \left(j + \frac{1}{2}\right) + \sqrt{\left(j + \frac{1}{2}\right)^2 - \alpha^2}} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\simeq mc^2 - \frac{E_1}{n^2} \left( 1 + \frac{\alpha^2}{n^2} \left( \frac{n}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4} \right) + O(\alpha^4) \right)$$

정지에너지      상대론적 보정 + 스핀-궤도 결합

즉, 상위 이론(디랙 방정식)은 미세 구조의 각 항에 대한  
올바른 물리적 의미를 주며,  
섭동 이론은 상위 이론을 찾는 과정에 대한  
발견의 원리가 됩니다.

$$E = mc^2 \left( 1 + \left( \frac{\alpha}{n - \left(j + \frac{1}{2}\right) + \sqrt{\left(j + \frac{1}{2}\right)^2 - \alpha^2}} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\simeq mc^2 - \frac{E_1}{n^2} \left( 1 + \frac{\alpha^2}{n^2} \left( \frac{n}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4} \right) + O(\alpha^4) \right)$$

정지에너지      상대론적 보정 + 스핀-궤도 결합

여기에 더해 램 이동Lamb shift이라는 것이 발견되었습니다.  
 이것은 디랙 방정식으로부터 설명되지 않으며,  
 양자전기역학quantum electrodynamics에서 다루는  
 진공과의 상호작용에 의해 설명되는 것으로 알려져 있습니다.

## 2. 제만 효과 Zeeman effect

$$H'_S = eE_{ext}r \cos \theta$$

$$H'_Z = -(\vec{\mu}_\ell + \vec{\mu}_s) \cdot \vec{B}_{ext}$$

각운동량  
쌍극자모멘트

스핀  
쌍극자모멘트

스타크 효과Stark effect와 제만 효과Zeeman effect는  
외부 전기장 및 자기장에 의해  
에너지 준위가 변하는 현상을 의미합니다.

$$H'_S = eE_{ext}r \cos \theta$$

$$H'_Z = -(\vec{\mu}_\ell + \vec{\mu}_s) \cdot \vec{B}_{ext}$$

각운동량  
쌍극자모멘트

$$= -\frac{e}{2m}\vec{L}$$

스핀  
쌍극자모멘트

$$= -\frac{eg}{2m}\vec{S} = -\frac{e}{m}\vec{S}$$

스타크 효과Stark effect와 제만 효과Zeeman effect는  
외부 전기장 및 자기장에 의해  
에너지 준위가 변하는 현상을 의미합니다.

$$H'_S = eE_{ext}r \cos \theta$$

$$H'_Z = -(\vec{\mu}_\ell + \vec{\mu}_s) \cdot \vec{B}_{ext}$$

각운동량  
쌍극자모멘트

$$= -\frac{e}{2m} \vec{L}$$

스핀  
쌍극자모멘트

$$= -\frac{eg}{2m} \vec{S} = -\frac{e}{m} \vec{S}$$

$$(g \simeq 2.002 \dots)$$

스타크 효과Stark effect와 제만 효과Zeeman effect는  
외부 전기장 및 자기장에 의해  
에너지 준위가 변하는 현상을 의미합니다.

$$H'_S = eE_{ext}r \cos \theta$$

$$H'_Z = -(\vec{\mu}_\ell + \vec{\mu}_s) \cdot \vec{B}_{ext}$$

각운동량  
쌍극자모멘트

$$= -\frac{e}{2m} \vec{L}$$

스핀  
쌍극자모멘트

$$= -\frac{eg}{2m} \vec{S} = -\frac{e}{m} \vec{S}$$

$$(g \simeq 2.002 \dots)$$

디랙 방정식

QED

스타크 효과Stark effect와 제만 효과Zeeman effect는  
외부 전기장 및 자기장에 의해  
에너지 준위가 변하는 현상을 의미합니다.

$$H'_S = eE_{ext}r \cos \theta$$

$$\begin{aligned} H'_Z &= -(\vec{\mu}_\ell + \vec{\mu}_s) \cdot \vec{B}_{ext} \\ &= \frac{e}{2m} (\vec{L} + 2\vec{S}) \cdot \vec{B}_{ext} \end{aligned}$$

스타크 효과Stark effect와 제만 효과Zeeman effect는  
외부 전기장 및 자기장에 의해  
에너지 준위가 변하는 현상을 의미합니다.

$$H'_S = eE_{ext}r \cos \theta$$

$$H'_Z = -(\vec{\mu}_\ell + \vec{\mu}_s) \cdot \vec{B}_{ext}$$

$$= \frac{e}{2m} (\vec{L} + 2\vec{S}) \cdot \vec{B}_{ext}$$

이제 제만 효과에 대해 정량적으로 살펴보겠습니다.  
계산의 편의를 위해 다음 세 가지 경우를 나눠봅니다.

- (1) 외부 자기장이 내부 자기장(미세구조)보다 많이 작은 경우:  $B_{ext} \ll B_{int}$
- (2) 외부 자기장이 내부 자기장보다 많이 큰 경우:  $B_{ext} \gg B_{int}$
- (3) 외부 자기장과 내부 자기장이 비슷한 경우:  $B_{ext} \simeq B_{int}$

$$H = H_{Bohr} + H'_{fs}$$

:섭동이 없는 해밀토니안

$$H' = H'_Z$$

:섭동

먼저 첫 번째 경우, 즉 미세구조가 우세한 경우를 살펴봅시다.

$$H = H_{Bohr} + H'_{fs}$$

:섭동이 없는 해밀토니안

$$H' = H'_Z$$

:섭동

$$E_Z^1 = \langle n\ell jm_j | H'_Z | n\ell jm_j \rangle$$

이 때 에너지의 보정은 위와 같습니다.

$$H = H_{Bohr} + H'_{fs}$$

:섭동이 없는 해밀토니안

$$H' = H'_Z$$

:섭동

$$\begin{aligned} E_Z^1 &= \langle n\ell jm_j | H'_Z | n\ell jm_j \rangle \\ &= \frac{e}{2m} B_{ext} \hat{k} \cdot \langle \vec{L} + 2\vec{S} \rangle \end{aligned}$$

$$H = H_{Bohr} + H'_{fs}$$

:섭동이 없는 해밀토니안

$$H' = H'_Z$$

:섭동

$$E_Z^1 = \langle n\ell jm_j | H'_Z | n\ell jm_j \rangle$$

$$= \frac{e}{2m} B_{ext} \hat{k} \cdot \langle \vec{L} + 2\vec{S} \rangle$$

$$= \left\langle \left( 1 + \frac{\vec{S} \cdot \vec{J}}{J^2} \right) \vec{J} \right\rangle = \left[ 1 + \frac{j(j+1) - \ell(\ell+1) + s(s+1)}{2j(j+1)} \right] \langle \vec{J} \rangle$$

시간 평균

$\equiv g_J$

$$H = H_{Bohr} + H'_{fs}$$

:섭동이 없는 해밀토니안

$$H' = H'_Z$$

:섭동

$$\begin{aligned} E_Z^1 &= \langle n\ell jm_j | H'_Z | n\ell jm_j \rangle \\ &= \frac{e}{2m} B_{ext} \hat{k} \cdot \langle \vec{L} + 2\vec{S} \rangle \\ &= \frac{e\hbar}{2m} g_J m_j B_{ext} \end{aligned}$$

에너지 준위의 갈라짐을 보여줍니다.

$$H = H_{Bohr} + H'_{fs}$$

:섭동이 없는 해밀토니안

$$H' = H'_Z$$

:섭동

$$\begin{aligned} E_Z^1 &= \langle n\ell jm_j | H'_Z | n\ell jm_j \rangle \\ &= \frac{e}{2m} B_{ext} \hat{k} \cdot \langle \vec{L} + 2\vec{S} \rangle \\ &= \frac{e\hbar}{2m} g_J m_j B_{ext} \end{aligned}$$

에너지 준위의 갈라짐을 보여줍니다.

보어 마그네톤

$$H = H_{Bohr} + H'_Z$$

:섭동이 없는 해밀토니안

$$H' = H'_{fs}$$

:섭동

그 다음 두 번째 경우, 즉 제만 효과가 우세한 경우를 살펴봅시다.

$$H = H_{Bohr} + H'_Z \quad : \text{섭동이 없는 해밀토니안}$$

$$H' = H'_{fs} \quad : \text{섭동}$$

$$E_{fs}^1 = \langle n\ell m_\ell m_s | H'_{fs} | n\ell m_\ell m_s \rangle$$

이 때 에너지의 보정은 위와 같습니다.

$$H = H_{Bohr} + H'_Z \quad : \text{섭동이 없는 해밀토니안}$$

$$H' = H'_{fs} \quad : \text{섭동}$$

$$\begin{aligned} E_{fs}^1 &= \langle n\ell m_\ell m_s | H'_{fs} | n\ell m_\ell m_s \rangle \\ &= \frac{13.6 \text{ eV}}{n^2} \alpha^2 \left[ \frac{3}{4n} - \left( \frac{\ell(\ell+1) - m_\ell m_s}{\ell \left( \ell + \frac{1}{2} \right) (\ell + 1)} \right) \right] \end{aligned}$$

$$H'_S = eE_{ext}r \cos \theta$$

$$\begin{aligned} H'_Z &= -(\vec{\mu}_\ell + \vec{\mu}_s) \cdot \vec{B}_{ext} \\ &= \frac{e}{2m} (\vec{L} + 2\vec{S}) \cdot \vec{B}_{ext} \end{aligned}$$

마지막 세 번째 경우에는  
외부 자기장과 미세구조가 동시에 섭동이 되는데,  
이 때는 **겹침이 있는 섭동론**을 사용해야 해서  
좀 더 계산이 복잡해지게 됩니다.

### 3. 수소의 초미세 구조 hyperfine structure

$$H'_{hf} = -\vec{\mu}_e \cdot \vec{B}$$

초미세 구조는 양성자의 자기쌍극자모멘트가 만드는 자기장과 전자가 상호작용하는 현상을 말합니다.

$$H'_{hf} = -\vec{\mu}_e \cdot \vec{B}$$

$$\vec{\mu}_p = \frac{g_p e}{2m_p} \vec{S}_p$$

양성자의 자기쌍극자 모멘트

$$\vec{\mu}_e = \frac{e}{m_e} \vec{S}_e$$

전자의 자기쌍극자 모멘트

초미세 구조는 양성자의 자기쌍극자모멘트가 만드는 자기장과 전자가 상호작용하는 현상을 말합니다.

$$H'_{hf} = -\vec{\mu}_e \cdot \vec{B}$$

$$\vec{\mu}_p = \frac{g_p e}{2m_p} \vec{S}_p \quad \text{양성자의 자기쌍극자 모멘트}$$

$$\vec{\mu}_e = \frac{e}{m_e} \vec{S}_e \quad \text{전자의 자기쌍극자 모멘트}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} (3(\vec{\mu} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{\mu}) + \frac{2}{3}\mu_0\vec{\mu}\delta^3(\vec{r}) \quad \text{자기 쌍극자가 만들어내는 자기장}$$

초미세 구조는 **양성자**의 자기쌍극자모멘트가 만드는 **자기장**과 **전자**가 상호작용하는 현상을 말합니다.

$$\begin{aligned}
 H'_{hf} &= -\vec{\mu}_e \cdot \vec{B} \\
 &= \frac{\mu_0 g_p e^2}{8\pi m_p m_e} \frac{(3(\vec{S}_p \cdot \hat{r})(\vec{S}_e \cdot \hat{r}) - \vec{S}_p \cdot \vec{S}_e)}{r^3} + \frac{\mu_0 g_p e^2}{3m_p m_e} \vec{S}_p \cdot \vec{S}_e \delta^3(\vec{r})
 \end{aligned}$$

초미세 구조는 양성자의 자기쌍극자모멘트가 만드는 자기장과 전자가 상호작용하는 현상을 말합니다.

$$H'_{hf} = -\vec{\mu}_e \cdot \vec{B}$$

$$= \frac{\mu_0 g_p e^2}{8\pi m_p m_e} \frac{(3(\vec{S}_p \cdot \hat{r})(\vec{S}_e \cdot \hat{r}) - \vec{S}_p \cdot \vec{S}_e)}{r^3} + \frac{\mu_0 g_p e^2}{3m_p m_e} \vec{S}_p \cdot \vec{S}_e \delta^3(\vec{r})$$

$$E_{hf}^1 = \frac{\mu_0 g_p e^2}{3\pi m_p m_e a^3} \langle \vec{S}_p \cdot \vec{S}_e \rangle$$

스핀-스핀 결합

가장 간단한  $\ell = 0$ 인 경우, 첫 번째 항은 사라집니다.  
 $n = 1$ 인 경우, 에너지의 기댓값은 위와 같습니다.

$$H'_{hf} = -\vec{\mu}_e \cdot \vec{B}$$

$$= \frac{\mu_0 g_p e^2}{8\pi m_p m_e} \frac{(3(\vec{S}_p \cdot \hat{r})(\vec{S}_e \cdot \hat{r}) - \vec{S}_p \cdot \vec{S}_e)}{r^3} + \frac{\mu_0 g_p e^2}{3m_p m_e} \vec{S}_p \cdot \vec{S}_e \delta^3(\vec{r})$$

$$E_{hf}^1 = \frac{\mu_0 g_p e^2}{3\pi m_p m_e a^3} \langle \vec{S}_p \cdot \vec{S}_e \rangle$$

$$= \frac{1}{2}(S^2 - S_e^2 - S_p^2)$$

$$H'_{hf} = -\vec{\mu}_e \cdot \vec{B}$$

$$= \frac{\mu_0 g_p e^2}{8\pi m_p m_e} \frac{(3(\vec{S}_p \cdot \hat{r})(\vec{S}_e \cdot \hat{r}) - \vec{S}_p \cdot \vec{S}_e)}{r^3} + \frac{\mu_0 g_p e^2}{3m_p m_e} \vec{S}_p \cdot \vec{S}_e \delta^3(\vec{r})$$

$$E_{hf}^1 = \frac{\mu_0 g_p e^2}{3\pi m_p m_e a^3} \langle \vec{S}_p \cdot \vec{S}_e \rangle$$

$$= \frac{4g_p \hbar^4}{3m_p m_e^2 c^2 a^4} \left\{ \begin{array}{l} +\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{삼중항} \\ \text{단일항} \end{array}$$

초미세구조의 삼중항과 단일항 사이의 에너지 차이만큼  
광자가 방출되면  
이 때의 파장은 대략 21cm가 됩니다.

이 파장은 (원자나 분자가 방출하는 다른 파장에 비해) 상대적으로 파장이 길어서 성간 물질을 자유롭게 통과할 수 있습니다. 또한 우주에서 가장 지배적인 물질인 수소로부터 방출되므로 이 파장의 강도는 우주의 물질 분포에 대해 중요한 단서를 줍니다. 따라서 우주에서 우세한 복사형태로서 천체 물리학에서 아주 중요하게 사용됩니다.



마지막으로 흥미로운 문제 하나를 더 추가하고 싶습니다.

지금까지 우리는 쿨롱 힘에 대해서 살펴보았지만,  
조화 진동자가 근거리에서 작용하고 (양전하와 음전하 사이)  
쿨롱 힘이 원거리에서 작용하는 (쌍극자 사이)  
문제를 생각할 수 있습니다.



이 때 시간에 무관한 섭동론을 사용하면  
평형 상태에서의 에너지와 섭동에 의한 에너지 사이의 차이,  
즉 퍼텐셜 차이가 거리의 6승에 반비례한다는 것을 알 수 있습니다.  
즉, 거리의 7승에 반비례하는 힘을 얻는데,  
이것을 반데르발스 상호작용이라고 합니다.



반데르발스 상호작용은 어떤 분자가 (영구 또는 유도) 쌍극자일 때,  
다른 (영구 또는 유도) 쌍극자와의 상호작용을 기술합니다.

이 힘은 분자 사이의 느슨하지만 중요한 힘을 나타내며  
수 많은 자연 현상을 설명하는 원리가 됩니다.

감사합니다