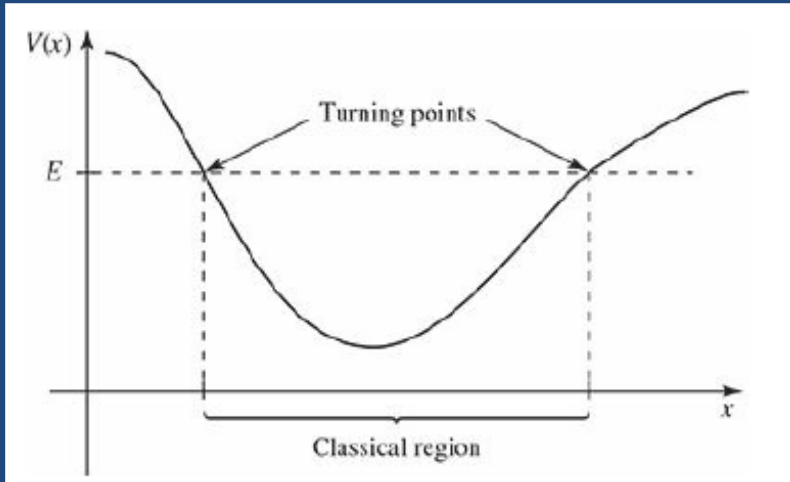


제9장

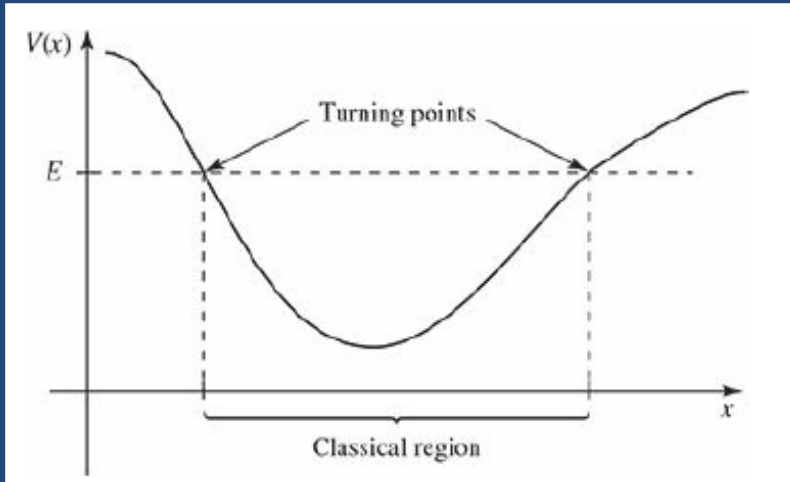
WKB 어림 방법

이번에는 다양한 비섭동적 현상에서
양자 터널링의 확률을 구할 수 있는
WKB 어림 방법에 대해 알아보시다.



$$\psi(x) = A(x)e^{i\phi(x)}$$

위와 같은 퍼텐셜에 대해 입자가 먼저 고전적인 영역의 파동 함수를 살펴봅시다.

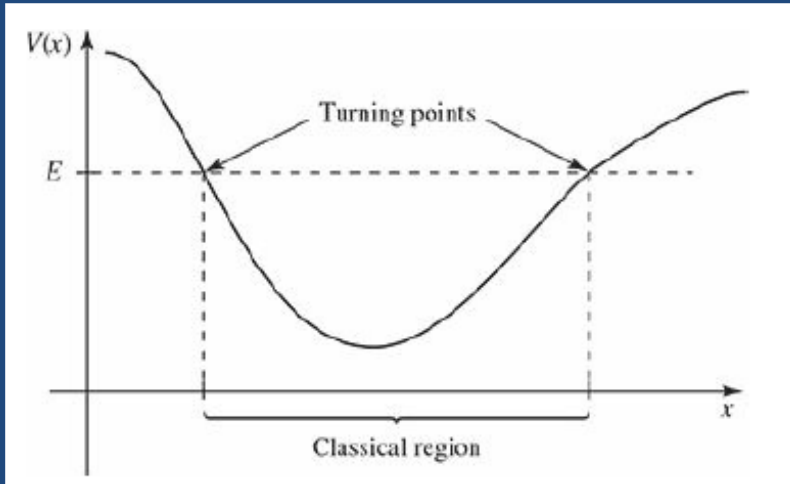


$$\psi(x) = A(x)e^{i\phi(x)}$$

$$\psi'(x) = (A' + iA\phi') e^{i\phi(x)}$$

$$\psi''(x) = (A'' + 2iA'\phi' + iA\phi'' - A\phi'^2) e^{i\phi(x)}$$

위와 같은 퍼텐셜에 대해 입자가 먼저 고전적인 영역의 파동 함수를 살펴봅시다.



$$\psi(x) = A(x)e^{i\phi(x)}$$

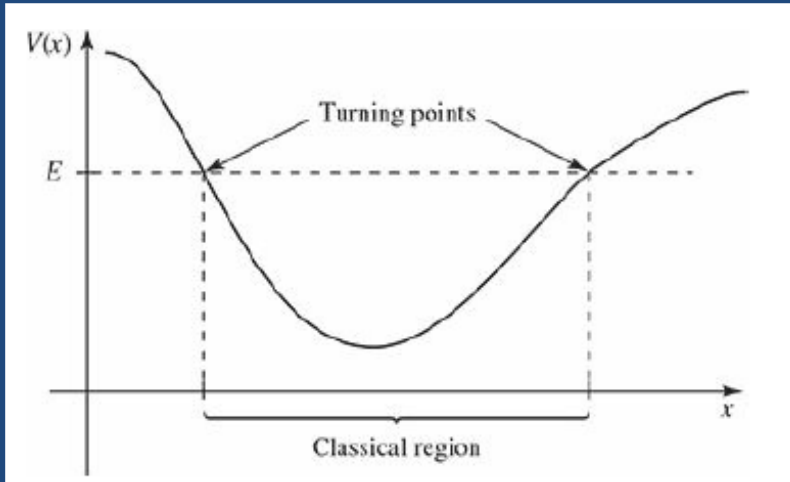
$$\psi'(x) = (A' + iA\phi') e^{i\phi(x)}$$

$$\psi''(x) = (A'' + 2iA'\phi' + iA\phi'' - A\phi'^2) e^{i\phi(x)}$$

$$\psi'' = -\frac{p^2}{\hbar^2} \psi$$

$$p \equiv \sqrt{2m(E - V(x))}$$

한 편, 슈뢰딩거 방정식은 위와 같습니다.



$$\psi(x) = A(x)e^{i\phi(x)}$$

$$\psi'(x) = (A' + iA\phi') e^{i\phi(x)}$$

$$\psi''(x) = (A'' + 2iA'\phi' + iA\phi'' - A\phi'^2) e^{i\phi(x)}$$

$$\psi'' = -\frac{p^2}{\hbar^2} \psi$$

$$p \equiv \sqrt{2m(E - V(x))}$$

위의 식을 슈뢰딩거 방정식에 적용하고
실수부와 허수부를 나누어 봅시다.

$$A'' - A\phi'^2 = -\frac{p^2}{\hbar^2}A$$

$$2A'\phi' + A\phi'' = 0$$

위의 식을 슈뢰딩거 방정식에 적용하고
실수부와 허수부를 나누어 봅시다.

$$A'' - A\phi'^2 = -\frac{p^2}{\hbar^2}A$$

$$2A'\phi' + A\phi'' = 0 \quad (A^2\phi')' = 0 \quad A = \frac{C}{\sqrt{|\phi'|}}$$

먼저 허수부는 좀 더 쉽게 풀립니다.

$$A'' - A\phi'^2 = -\frac{p^2}{\hbar^2}A \quad (\phi')^2 \simeq \frac{p^2}{\hbar^2} \quad \phi = \pm \frac{1}{\hbar} \int p(x) dx$$

$$2A'\phi' + A\phi'' = 0 \quad (A^2\phi')' = 0 \quad A = \frac{C}{\sqrt{|\phi'|}}$$

실수부는 쉽게 풀리지 않지만, A''/A 가 다른 항들에 비해 작다면 근사가 가능합니다.

$$\psi(x) \simeq \frac{C}{\sqrt{p(x)}} e^{\pm \frac{i}{\hbar} \int p(x) dx}$$

따라서 전체 파동 함수는 위와 같이 근사적으로 표현됩니다.

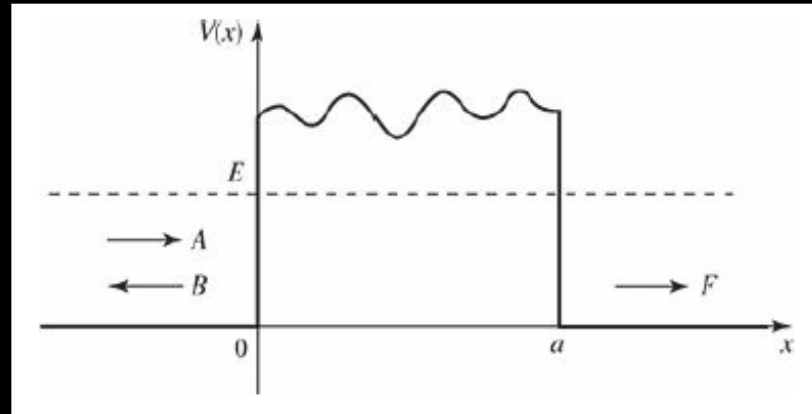
$$\psi(x) \simeq \frac{C}{\sqrt{p(x)}} e^{\pm \frac{i}{\hbar} \int p(x) dx}$$

$$|\psi(x)|^2 \simeq \frac{|C|^2}{p(x)}$$

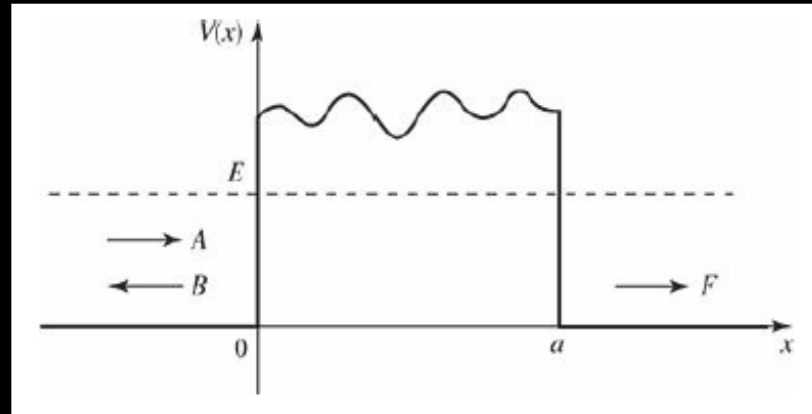
이 때의 확률은 위와 같습니다.

$$\psi(x) \simeq \frac{C}{\sqrt{|p(x)|}} e^{\pm \frac{1}{\hbar} \int |p(x)| dx}$$

우리는 같은 계산을 반복해서
고전적으로 허용되지 않는 영역의 파동 함수도
근사적으로 계산할 수 있습니다.
이것을 **WKB 근사**라고 합니다.

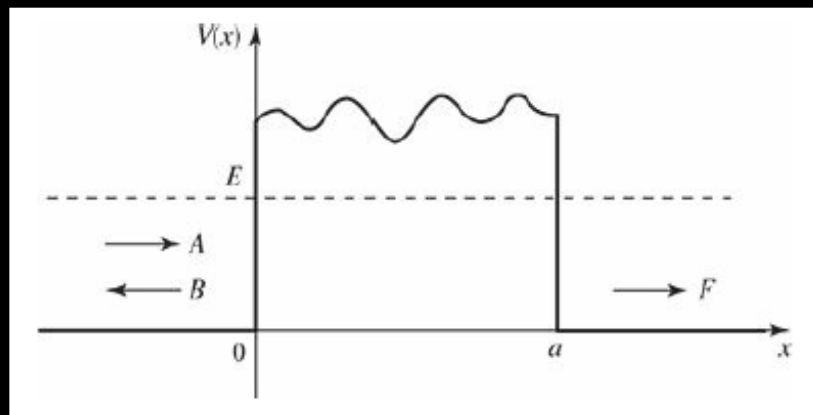


이 근사 방법을 사용하면 장벽을 통과할 확률도
쉽게 계산할 수 있습니다.



$$T = \frac{|F|^2}{|A|^2}$$

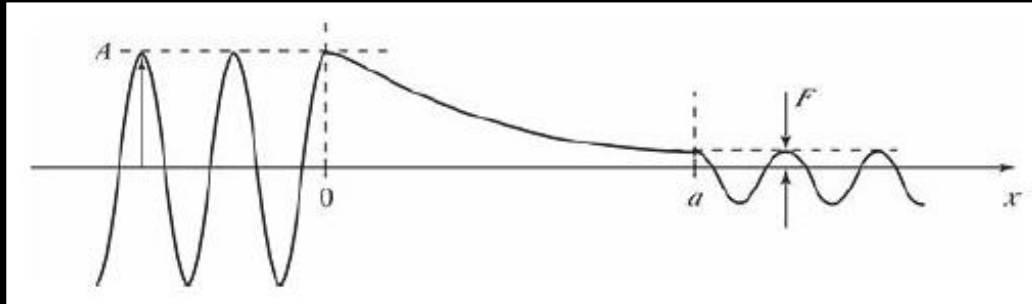
투과율은 위와 같이 정의됩니다.



$$T = \frac{|F|^2}{|A|^2}$$

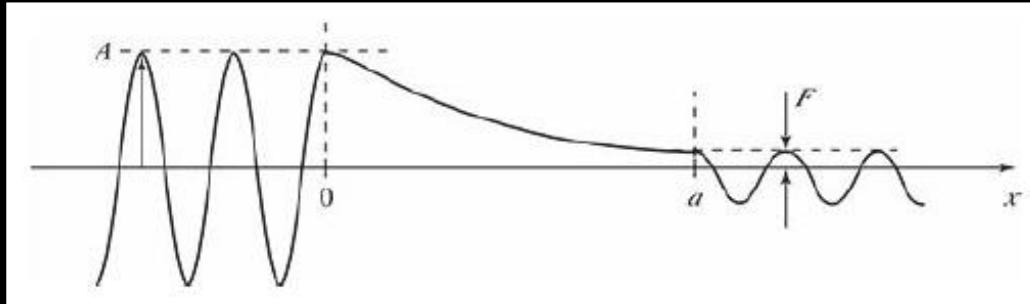
$$\psi \simeq \frac{C}{\sqrt{|p(x)|}} e^{+\frac{1}{\hbar} \int_0^x |p(x')| dx'} + \frac{D}{\sqrt{|p(x)|}} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_0^x |p(x')| dx'}$$

그리고 양자 영역에서의 파동함수는 위와 같이 근사됩니다.



$$\psi \simeq \frac{D}{\sqrt{|p(x)|}} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_0^x |p(x')| dx'}$$

만일 입자가 왼쪽에서 입사된다면 우리는
지수적으로 감소하는 파동함수를 선택해야 합니다.

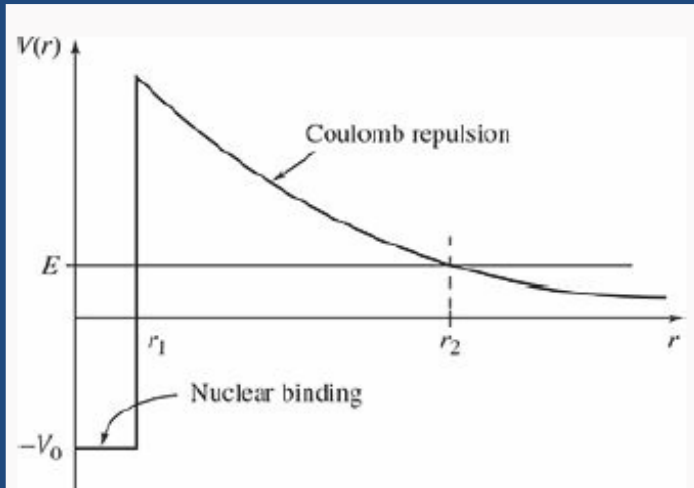


$$\psi \simeq \frac{D}{\sqrt{|p(x)|}} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_0^x |p(x')| dx'}$$

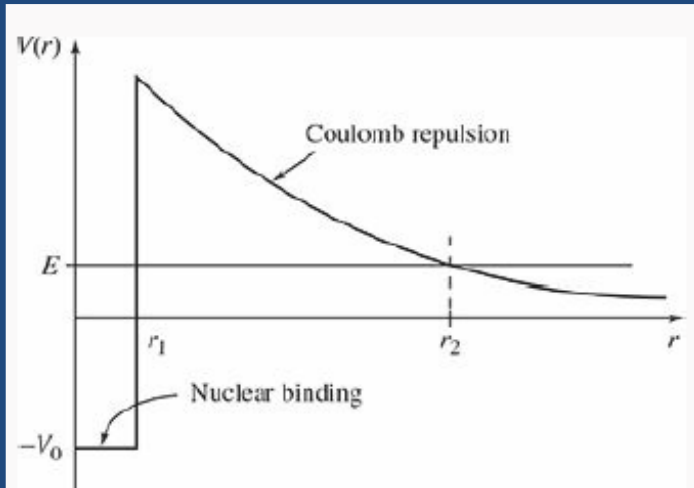
$$T \simeq e^{-2\gamma}$$

$$\gamma \equiv \frac{1}{\hbar} \int_0^a |p(x')| dx'$$

이것으로부터 **투과율**을 계산할 수 있습니다.

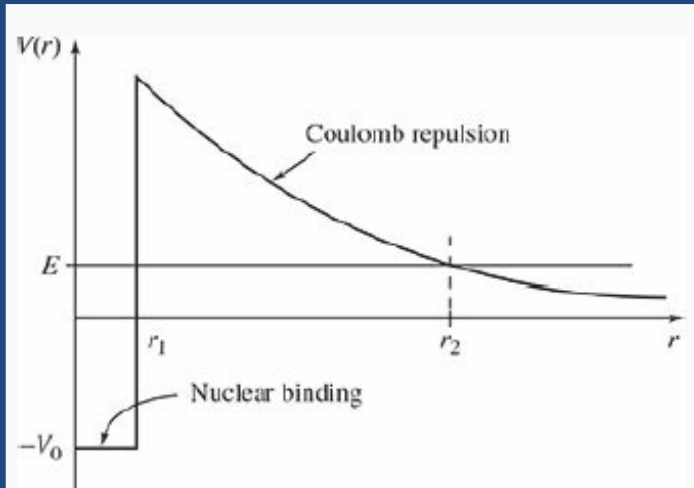


한 가지 흥미로운 예로 가모프Gamow의
알파 붕괴 이론을 살펴봅시다.
핵이 붕괴하면서 알파 입자(헬륨 원자핵)를 방출하게 됩니다.



$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Ze^2}{r_2} \quad \text{방출되는 입자의 에너지}$$

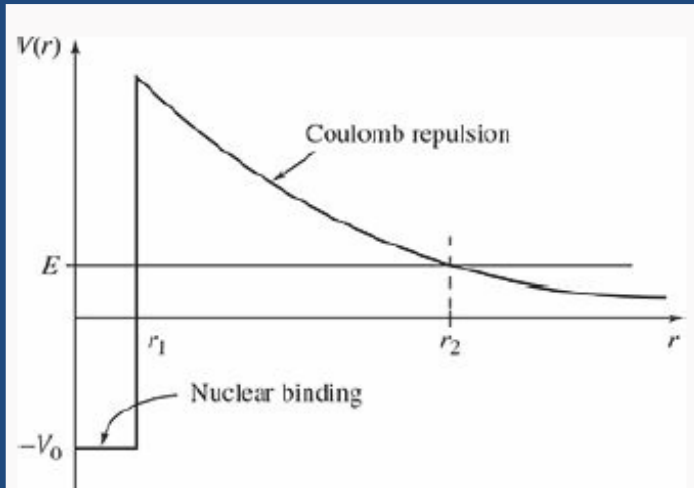
가모프는 이 과정을 기술하기 위해
내부에는 핵이 속박되어 있지만,
외부에는 쿨롱 힘에 의한 척력이 작용한다고 생각했습니다.



$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Ze^2}{r_2} \quad \text{방출되는 입자의 에너지}$$

$$\gamma = \frac{1}{\hbar} \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{2m \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Ze^2}{r} - E \right)} dr$$

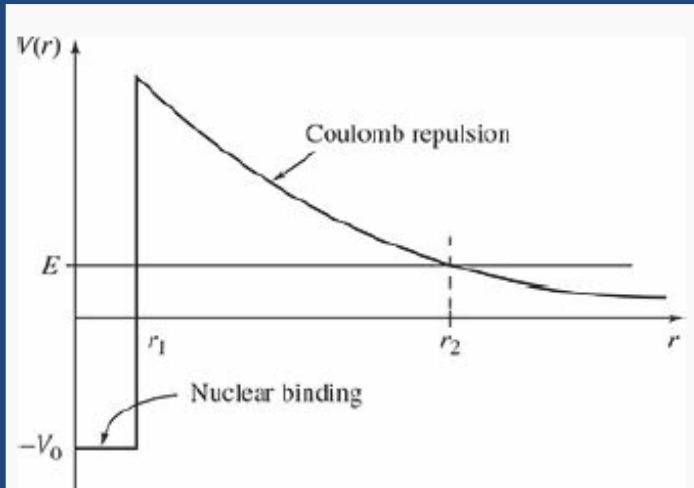
이제 알파 입자가 터널링해서 방출될 확률을 계산해 봅시다.



$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Ze^2}{r_2} \quad \text{방출되는 입자의 에너지}$$

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{1}{\hbar} \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{2m \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Ze^2}{r} - E \right)} dr \\ &= \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{\frac{r_2}{r} - 1} dr \end{aligned}$$

이제 알파 입자가 터널링해서 방출될 확률을 계산해 봅시다.

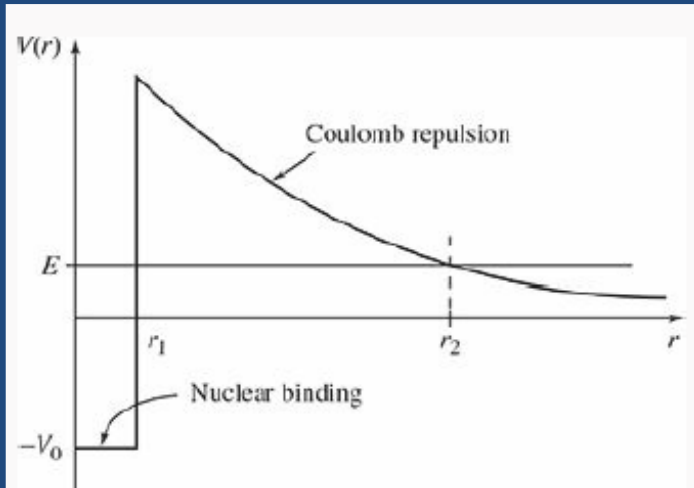


$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Ze^2}{r_2} \quad \text{방출되는 입자의 에너지}$$

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{1}{\hbar} \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{2m \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Ze^2}{r} - E \right)} dr \\ &= \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{\frac{r_2}{r} - 1} dr \end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \left(r_2 \left(\frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \sqrt{\frac{r_1}{r_2}} \right) - \sqrt{r_1(r_2 - r_1)} \right)$$

이제 알파 입자가 터널링해서 방출될 확률을 계산해 봅시다.

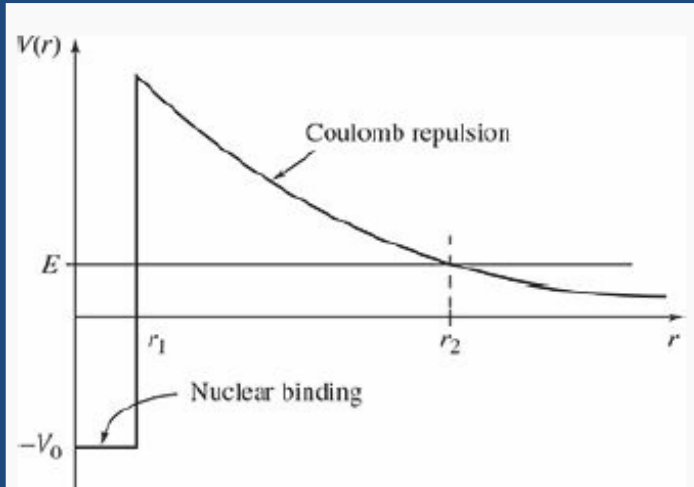


$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Ze^2}{r_2} \quad \text{방출되는 입자의 에너지}$$

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{1}{\hbar} \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{2m \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Ze^2}{r} - E \right)} dr \\ &= \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{\frac{r_2}{r} - 1} dr \end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \left(r_2 \left(\frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \sqrt{\frac{r_1}{r_2}} \right) - \sqrt{r_1(r_2 - r_1)} \right) \underset{r_1 \ll r_2}{\simeq} \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \left(\frac{\pi}{2} r_2 - 2\sqrt{r_1 r_2} \right)$$

이제 알파 입자가 터널링해서 방출될 확률을 계산해 봅시다.

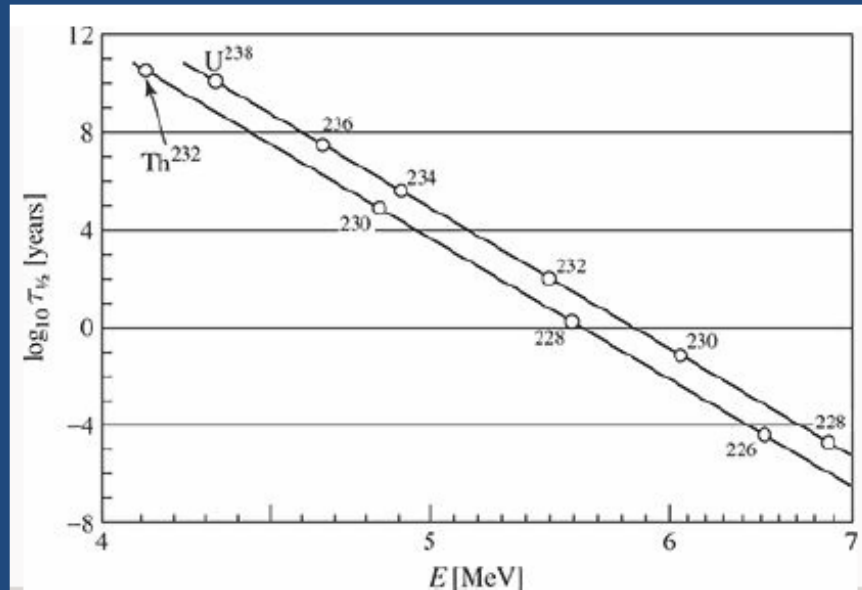


$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Ze^2}{r_2} \quad \text{방출되는 입자의 에너지}$$

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{1}{\hbar} \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{2m \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Ze^2}{r} - E \right)} dr \\ &= \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{\frac{r_2}{r} - 1} dr \end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \left(r_2 \left(\frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \sqrt{\frac{r_1}{r_2}} \right) - \sqrt{r_1(r_2 - r_1)} \right) \underset{r_1 \ll r_2}{\simeq} \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \left(\frac{\pi}{2} r_2 - 2\sqrt{r_1 r_2} \right)$$

$$\simeq 1.980 \text{ MeV}^{\frac{1}{2}} \times \frac{Z}{\sqrt{E}}$$



이러한 결과는 실험과 아주 잘 일치합니다.
알파 붕괴 과정은 WKB 근사가 아주 잘 적용되는
퍼텐셜 구조를 가지고 있다고 할 수 있습니다.

$$\psi(x) \simeq \frac{1}{\sqrt{p(x)}} \left(B e^{\frac{i}{\hbar} \int_x^0 p(x') dx'} + C e^{-\frac{i}{\hbar} \int_x^0 p(x') dx'} \right) \quad x < 0$$

$$\simeq \frac{1}{\sqrt{|p(x)|}} D e^{-\frac{1}{\hbar} \int_0^x |p(x')| dx'} \quad x > 0$$

좀 더 정확한 기술을 위해
고전적 영역과 양자적 영역이 만나는 곳을 기술해 봅시다.
이것을 연결 공식이라고 합니다.

$$\psi(x) \simeq \frac{1}{\sqrt{p(x)}} \left(B e^{\frac{i}{\hbar} \int_x^0 p(x') dx'} + C e^{-\frac{i}{\hbar} \int_x^0 p(x') dx'} \right) \quad x < 0$$

$$\simeq \frac{1}{\sqrt{|p(x)|}} D e^{-\frac{1}{\hbar} \int_0^x |p(x')| dx'} \quad x > 0$$

$$B = -i e^{\frac{i\pi}{4}} D$$

$$C = i e^{-\frac{i\pi}{4}} D$$

계수 사이의 관계

$$\psi(x) \simeq \frac{1}{\sqrt{p(x)}} \left(B e^{\frac{i}{\hbar} \int_x^0 p(x') dx'} + C e^{-\frac{i}{\hbar} \int_x^0 p(x') dx'} \right) \quad x < 0$$

$$\simeq \frac{1}{\sqrt{|p(x)|}} D e^{-\frac{1}{\hbar} \int_0^x |p(x')| dx'} \quad x > 0$$

$$B = -i e^{\frac{i\pi}{4}} D$$

$$C = i e^{-\frac{i\pi}{4}} D$$

계수 사이의 관계

$$\psi(x) \simeq \frac{2D}{\sqrt{p(x)}} \sin \left[\frac{1}{\hbar} \int_x^{x_2} p(x') dx' + \frac{\pi}{4} \right] \quad x < x_2$$

$$\simeq \frac{D}{\sqrt{|p(x)|}} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_{x_2}^x |p(x')| dx'} \quad x > x_2$$

WKB 어림 방법의 몇 가지 흥미로운 응용을 살펴봅시다.

$$\psi(x) = A(x)e^{i\phi_r(x)} = e^{i\phi(x)}$$

$$\phi(x) = \phi_r(x) + i\phi_i(x)$$

$$\phi_i(x) = -\ln A(x)$$

위와 같이 파동 함수를 다시 적어 보겠습니다.
($c = \hbar = G = k = 1$ 로 정의합니다.)

$$\psi(x) = A(x)e^{i\phi_r(x)} = e^{i\phi(x)}$$

$$\phi(x) = \phi_r(x) + i\phi_i(x)$$

$$\phi_i(x) = -\ln A(x)$$

$$|\psi|^2 = e^{-2 \operatorname{Im} \phi}$$

이 경우 터널링 확률은 위와 같이 기술됩니다.
 이것을 사용해서 질량 M 인 블랙홀의 내부에서 외부로
 에너지 ω 의 입자가 방출될 확률을 계산해 봅시다.

$$\psi(x) = A(x)e^{i\phi_r(x)} = e^{i\phi(x)}$$

$$\phi(x) = \phi_r(x) + i\phi_i(x)$$

$$\phi_i(x) = -\ln A(x)$$

$$|\psi|^2 = e^{-2 \operatorname{Im} \phi}$$

$$\operatorname{Im} \phi \stackrel{\text{WKB}}{=} \operatorname{Im} \int_{r_{in}}^{r_{out}} p_r dr$$

$$\psi(x) = A(x)e^{i\phi_r(x)} = e^{i\phi(x)}$$

$$\phi(x) = \phi_r(x) + i\phi_i(x)$$

$$\phi_i(x) = -\ln A(x)$$

$$|\psi|^2 = e^{-2 \operatorname{Im} \phi}$$

$$\operatorname{Im} \phi \stackrel{\text{WKB}}{=} \operatorname{Im} \int_{r_{in}}^{r_{out}} p_r dr = \operatorname{Im} \int_{r_{in}}^{r_{out}} \int_0^{p_r} dp'_r dr$$

$$\psi(x) = A(x)e^{i\phi_r(x)} = e^{i\phi(x)}$$

$$\phi(x) = \phi_r(x) + i\phi_i(x)$$

$$\phi_i(x) = -\ln A(x)$$

$$|\psi|^2 = e^{-2 \operatorname{Im} \phi}$$

$$\overset{\text{WKB}}{\operatorname{Im} \phi} = \operatorname{Im} \int_{r_{in}}^{r_{out}} p_r dr = \operatorname{Im} \int_{r_{in}}^{r_{out}} \int_0^{p_r} dp'_r dr$$

$$= \operatorname{Im} \int_M^{M-\omega} \int_{r_{in}}^{r_{out}} \frac{dr}{\dot{r}} dH$$

$$\dot{r} = \frac{dH}{dp_r}$$

$$\psi(x) = A(x)e^{i\phi_r(x)} = e^{i\phi(x)}$$

$$\phi(x) = \phi_r(x) + i\phi_i(x)$$

$$\phi_i(x) = -\ln A(x)$$

$$|\psi|^2 = e^{-2 \operatorname{Im} \phi}$$

$$\overset{\text{WKB}}{\operatorname{Im} \phi} = \operatorname{Im} \int_{r_{in}}^{r_{out}} p_r dr = \operatorname{Im} \int_{r_{in}}^{r_{out}} \int_0^{p_r} dp'_r dr$$

$$= \operatorname{Im} \int_M^{M-\omega} \int_{r_{in}}^{r_{out}} \frac{dr}{\dot{r}} dH = \operatorname{Im} \int_0^\omega \int_{r_{in}}^{r_{out}} \frac{dr}{1 - \sqrt{\frac{2(M - \omega')}{r}}} (-d\omega')$$

$$\dot{r} = \frac{dH}{dp_r}$$

메트릭으로부터

$$\psi(x) = A(x)e^{i\phi_r(x)} = e^{i\phi(x)}$$

$$\phi(x) = \phi_r(x) + i\phi_i(x)$$

$$\phi_i(x) = -\ln A(x)$$

$$|\psi|^2 = e^{-2 \operatorname{Im} \phi}$$

$$\overset{\text{WKB}}{\operatorname{Im} \phi} = \operatorname{Im} \int_{r_{in}}^{r_{out}} p_r dr = \operatorname{Im} \int_{r_{in}}^{r_{out}} \int_0^{p_r} dp'_r dr$$

$$= \operatorname{Im} \int_M^{M-\omega} \int_{r_{in}}^{r_{out}} \frac{dr}{\dot{r}} dH = \operatorname{Im} \int_0^\omega \int_{r_{in}}^{r_{out}} \frac{dr}{1 - \sqrt{\frac{2(M - \omega')}{r}}} (-d\omega')$$

$$\dot{r} = \frac{dH}{dp_r}$$

$$= +4\pi\omega \left(M - \frac{\omega}{2} \right) \quad \text{메트릭으로부터}$$

$$\psi(x) = A(x)e^{i\phi_r(x)} = e^{i\phi(x)}$$

$$\phi(x) = \phi_r(x) + i\phi_i(x)$$

$$\phi_i(x) = -\ln A(x)$$

$$|\psi|^2 = e^{-2 \operatorname{Im} \phi} \simeq e^{-8\pi\omega M}$$

따라서 $M \gg \omega$ 일 때, 터널링 확률은 위와 같습니다.

$$\psi(x) = A(x)e^{i\phi_r(x)} = e^{i\phi(x)}$$

$$\phi(x) = \phi_r(x) + i\phi_i(x)$$

$$\phi_i(x) = -\ln A(x)$$

$$\begin{aligned} |\psi|^2 &= e^{-2 \operatorname{Im} \phi} \simeq e^{-8\pi\omega M} \\ &= e^{-\frac{\omega}{T}} \end{aligned}$$

$$T = \frac{1}{8\pi M}$$

이것을 볼츠만 인자로 해석하면, 온도는 위와 같습니다.
 이것을 호킹 온도Hawking temperature라고 합니다.

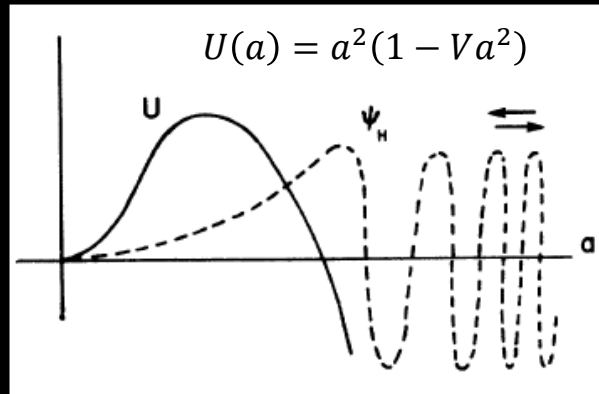
$$\left[\frac{d^2}{da^2} + \frac{\gamma}{a} \frac{d}{da} - a^2 (1 - \overset{\text{우주 상수}}{V} a^2) \right] \psi(a) = 0$$

휠러-드위트 Wheeler-DeWitt 방정식

이러한 WKB 근사 방법은 우주의 기원을 설명하는 데에도
적용할 수 있습니다.

$$\left[\frac{d^2}{da^2} + \frac{\gamma}{a} \frac{d}{da} - a^2 (1 - \overset{\text{우주 상수}}{V} a^2) \right] \psi(a) = 0$$

휠러-드위트 Wheeler-DeWitt 방정식



WKB 방법은 경로적분 path-integral을
근사적으로 계산하는 방법을 제공해 줍니다.
이것은 비섭동적 양자중력이론을 하는
훌륭한 방법을 제공해 줍니다.

감사합니다