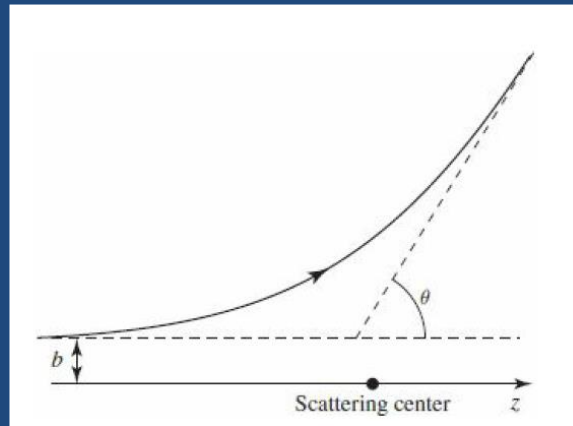
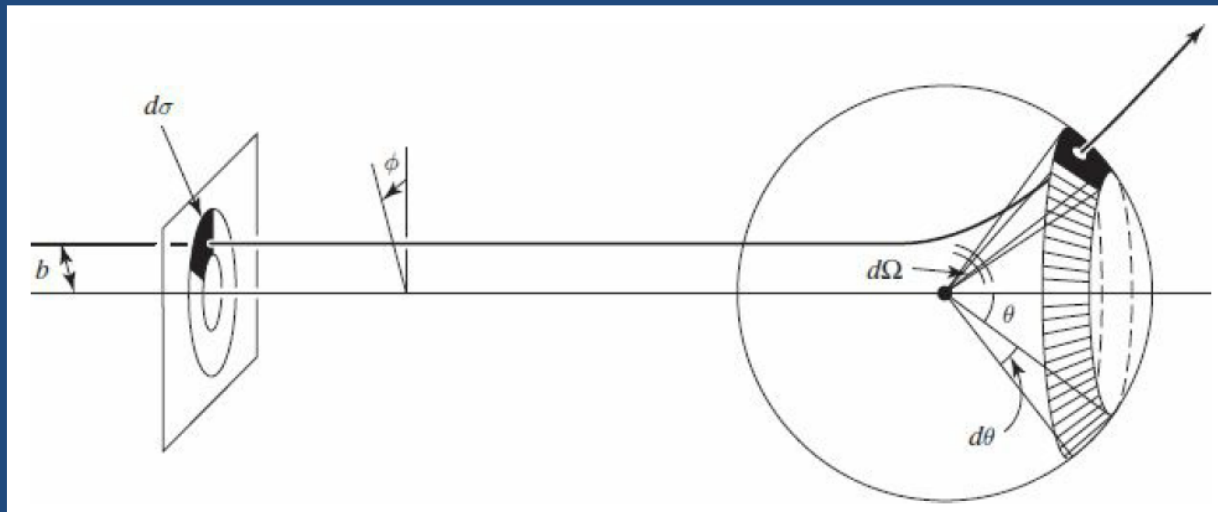
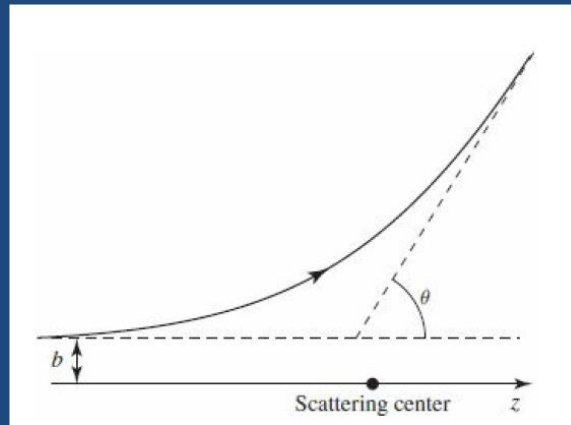


제10장 산란

이번 장에서는 미지의 영역을 탐구할 수 있는 가장 근본적인 방법,
즉 산란scattering에 대해서 살펴봅시다.

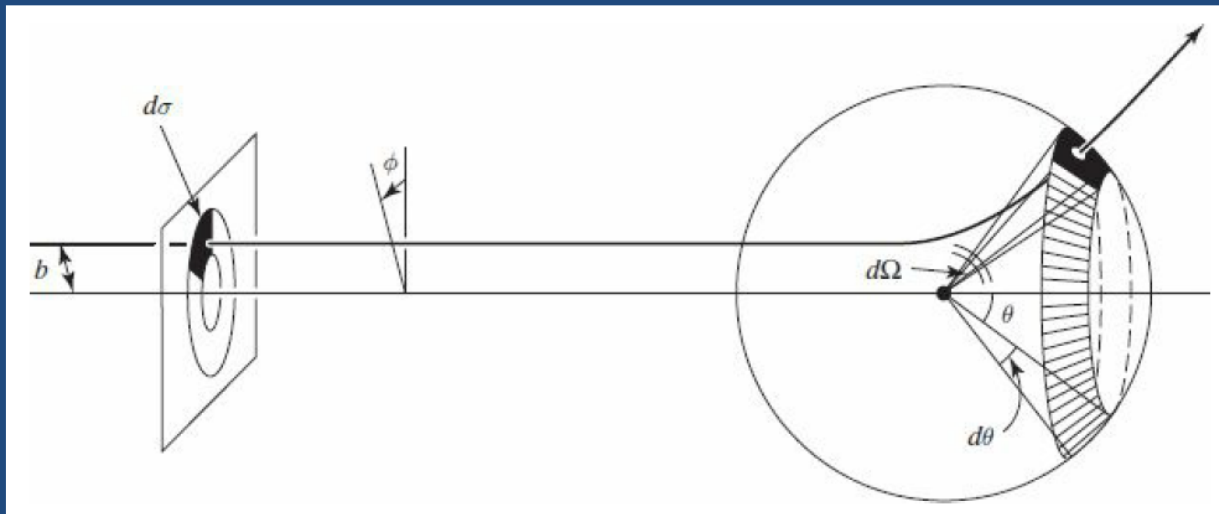


먼저 고전적인 방법으로 산란 과정을 기술해 봅시다.
우리는 산란 대상의 반작용을 무시할 수 있는 경우만 고려합니다.
우리는 충격 변수 b 와 에너지 E 를 초기 조건으로,
산란 각 θ 를 최종 조건으로 생각할 수 있습니다.



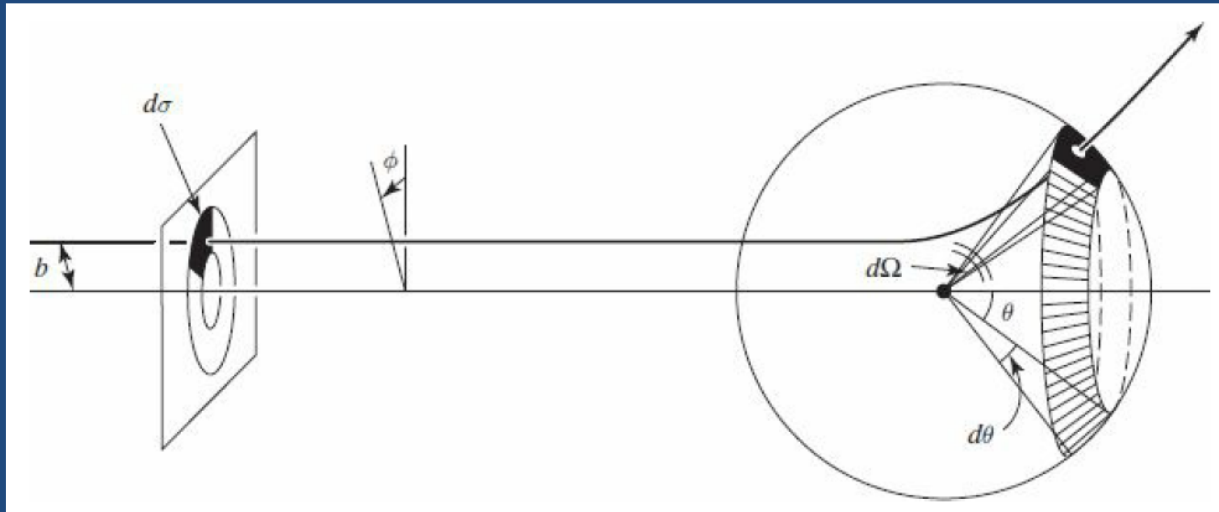
입자들이 단면적 $d\sigma$ 인 작은 조각안으로 입사되어서
입체각 $d\Omega$ 로 산란된다고 생각해 봅시다.

$$D(\theta) \equiv \frac{d\sigma}{d\Omega}$$



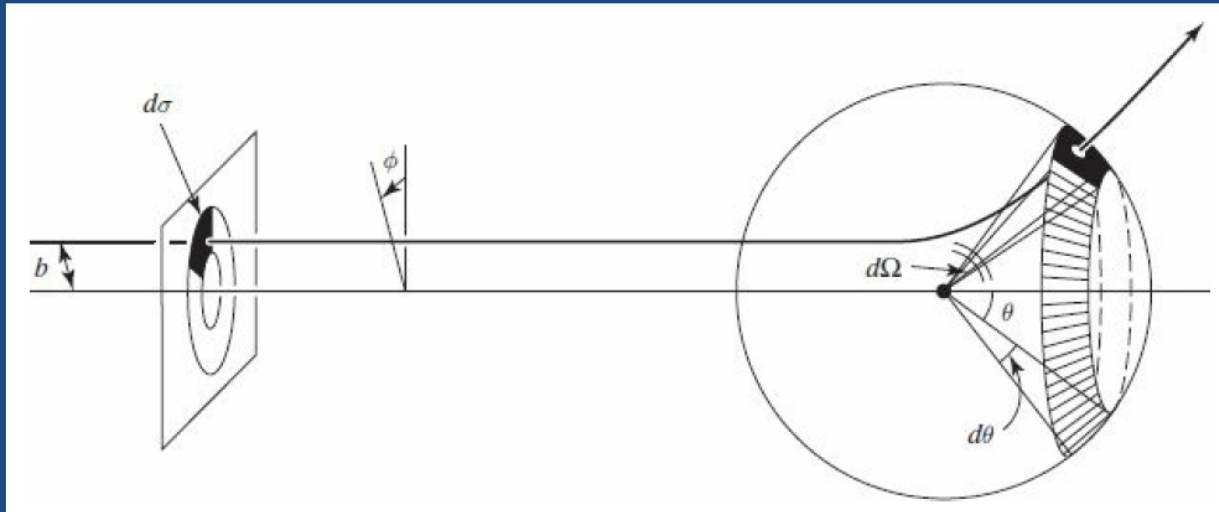
이 둘 사이의 비례 인자 $D(\theta)$ 를
미분 산란 단면적 differential scattering cross section이라고 합니다.

$$D(\theta) \equiv \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin \theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right|$$

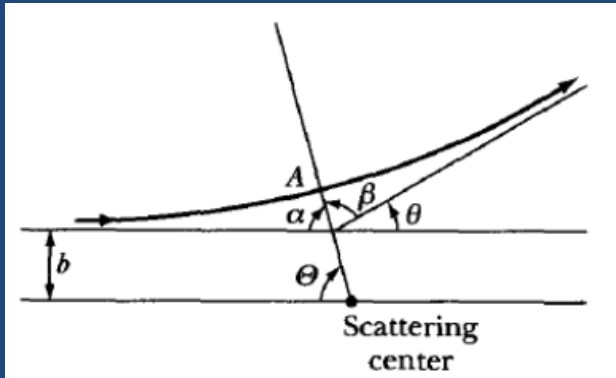


$d\sigma = b db d\phi$ 이고 $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$ 이므로
위와 같은 관계를 얻게 됩니다.

$$\frac{1}{\mathcal{L}} \frac{dN}{d\Omega} = \boxed{D(\theta) \equiv \frac{d\sigma}{d\Omega}} = \frac{b}{\sin \theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right|$$

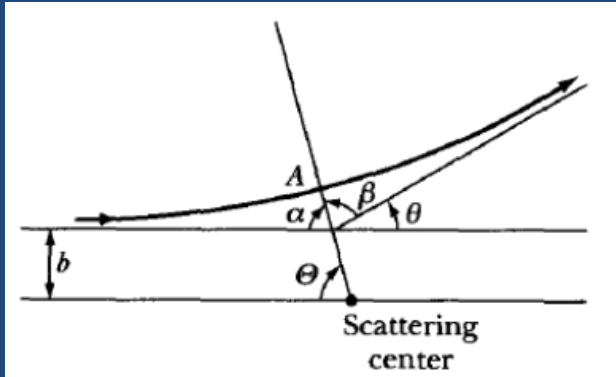


한 편, $\mathcal{L}$ 을 단위 면적, 단위 시간당 입사 입자의 수라 한다면 단위 시간당 면적 $d\sigma$ 로 입사하는 입자의 수는 $dN = \mathcal{L}d\sigma$ 이므로 위와 같은 관계를 얻게 됩니다.



$$\theta = \pi - 2\Theta$$

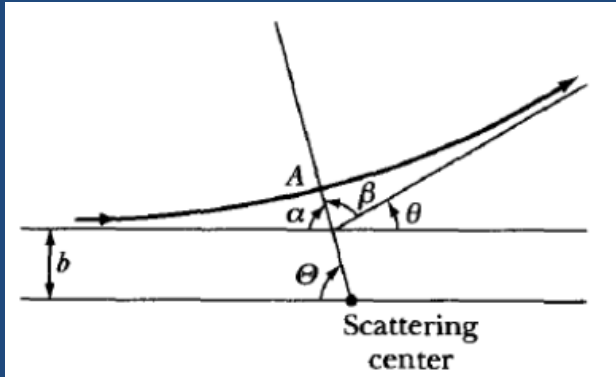
이제 **역제곱 힘**의 산란 과정을 구체적으로 살펴 봅시다.
 입자가 무한대에서 가장 가까운 곳까지 이동할 때
 산란 중심에서 측정한 각을 Θ 라 하면,
 산란각 θ 와 Θ 사이에는 위와 같은 관계가 성립합니다.



$$\theta = \pi - 2\Theta$$

$$\Theta = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{\frac{l}{r^2} dr}{\sqrt{2\mu \left(E - \left(\frac{k}{r} \right) - \frac{l^2}{2\mu r^2} \right)}}$$

Θ 는 중심력장에서 위와 같이 계산됩니다.
여기에서 μ 는 환산 질량, l 은 각운동량이고, k 는 비례 상수입니다.



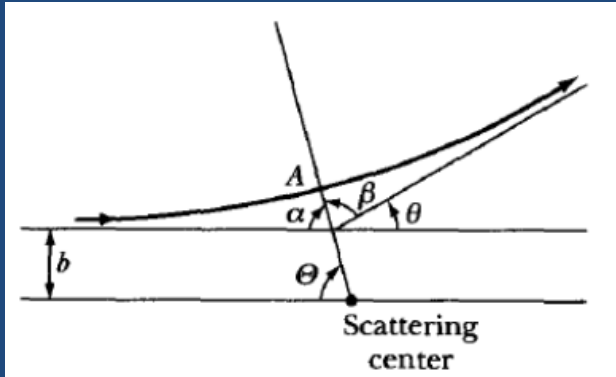
$$\theta = \pi - 2\Theta$$

$$\Theta = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{\frac{l}{r^2} dr}{\sqrt{2\mu \left(E - \left(\frac{k}{r} \right) - \frac{l^2}{2\mu r^2} \right)}}$$

$$l = b\sqrt{2\mu E}$$

$$= \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{\frac{b}{r} dr}{\sqrt{r^2 - \left(\frac{k}{E} \right) r - b^2}}$$

이 식을 충격 변수 b 와
질량 중심에서의 초기 운동 에너지 E 로 표현하면
위와 같이 정리 됩니다.



$$\theta = \pi - 2\Theta$$

$$\Theta = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{\frac{l}{r^2} dr}{\sqrt{2\mu \left(E - \left(\frac{k}{r} \right) - \frac{l^2}{2\mu r^2} \right)}}$$

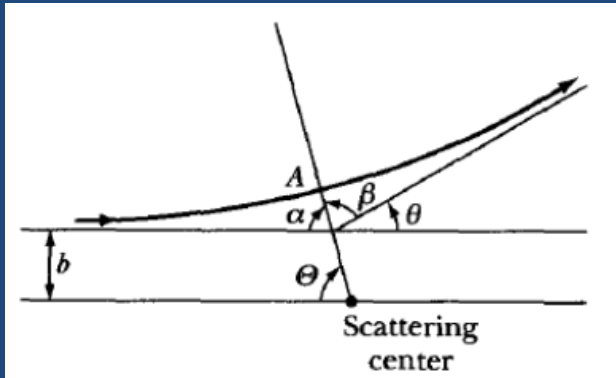
$$l = b\sqrt{2\mu E}$$

$$= \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{\frac{b}{r} dr}{\sqrt{r^2 - \left(\frac{k}{E} \right) r - b^2}}$$

$$\kappa \equiv k/2E$$

$$= \cos^{-1} \frac{\frac{\kappa}{b}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\kappa}{b} \right)^2}}$$

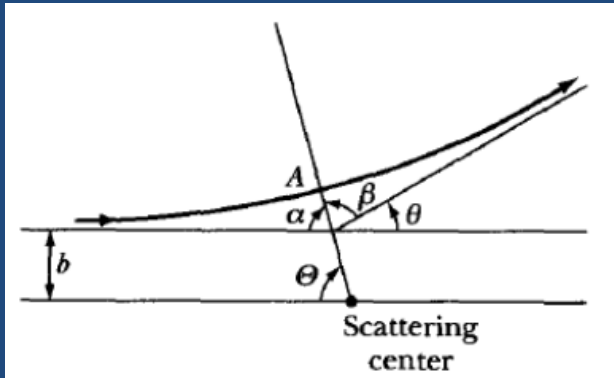
적분을 하면 위의 결과를 얻습니다.



$$\theta = \pi - 2\Theta$$

$$b = \kappa \cot \frac{\theta}{2}$$

따라서 정리하면 위의 결과를 얻습니다.



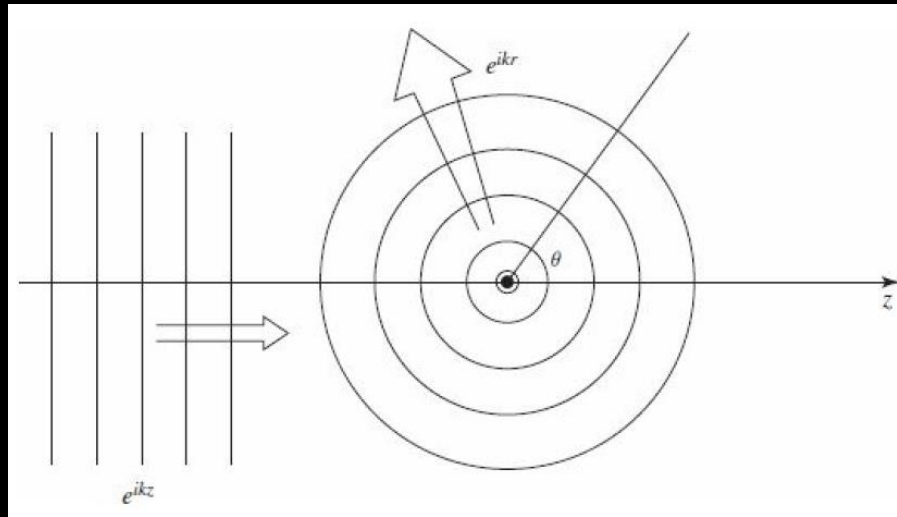
$$\theta = \pi - 2\Theta$$

$$b = \kappa \cot \frac{\theta}{2}$$

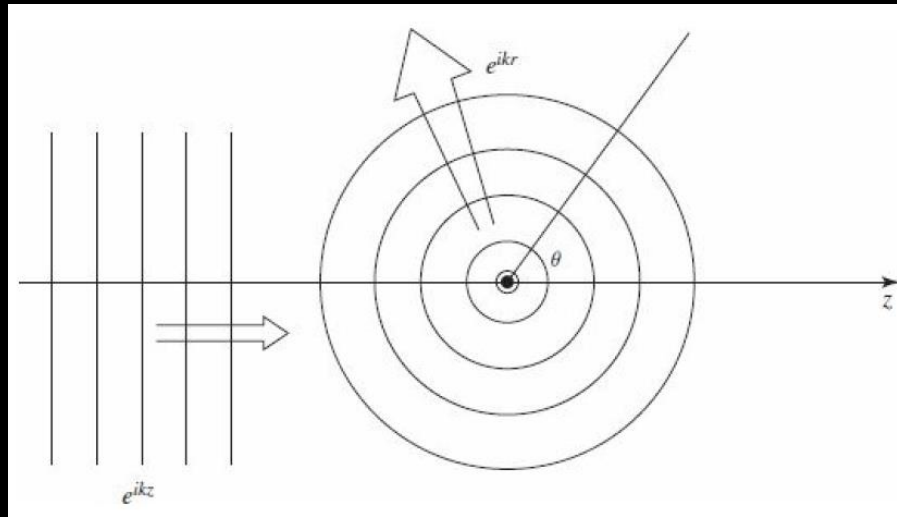
$$D(\theta) = \frac{b}{\sin \theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right| = \frac{k^2}{(4E)^2} \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}$$

이것으로부터 미분 산란 단면적을 유도할 수 있습니다.
 이것은 러더퍼드의 산란 공식으로 알려져 있습니다.

러더퍼드의 산란 공식은
고전 물리학의 방법을 사용하여 유도되었습니다.
양자역학적으로도 이와 비슷한 결과를 얻을 수 있을까요?

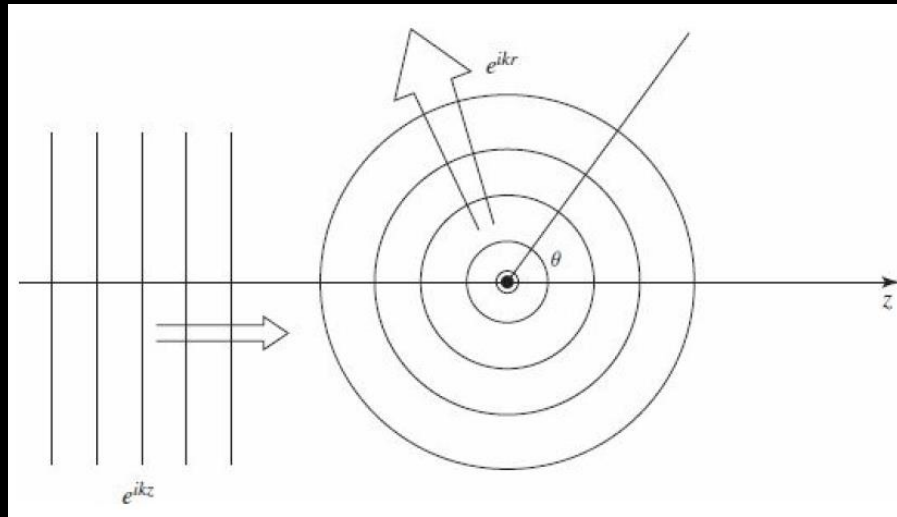


이제 양자 산란 이론을 도입하여 살펴봅시다.
 위의 그림과 같이 왼쪽에서 평면 파동이 입사하여,
 구면 파동으로 산란되는 과정을 생각합시다.



$$\psi(r, \theta) \simeq A \left[e^{ikz} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} \right]$$

여기에 해당하는 점근적 ($r \gg 1$) 파동 함수를 수학적으로 표현하면 위와 같습니다.

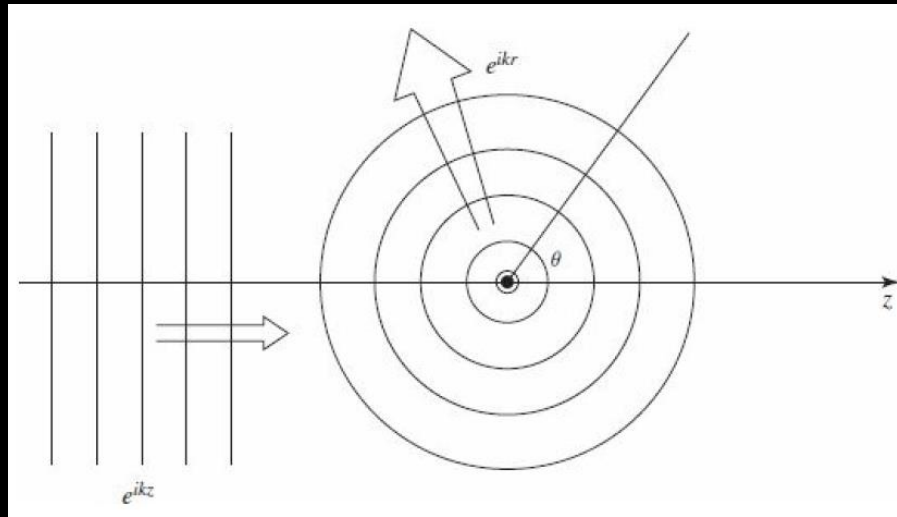


$$\psi(r, \theta) \simeq A \left[e^{ikz} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} \right] \quad k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

k 는 파동수를 나타내며, 파동의 에너지와 관련됩니다.

r 는 산란 중심으로부터의 거리이며,

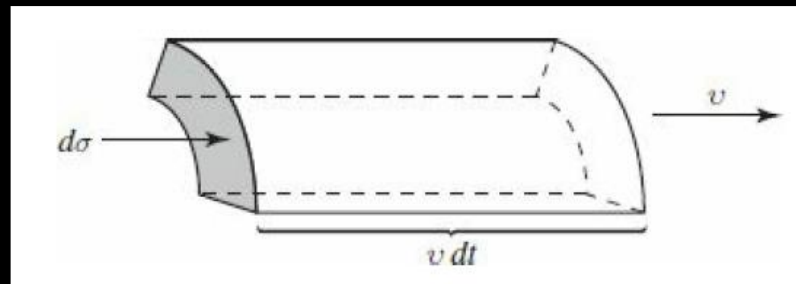
구면파의 진행을 나타내기 위해 $1/r$ 로 나누어줄 필요가 있습니다.



$$\psi(r, \theta) \simeq A \left[e^{ikz} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} \right]$$

산란 과정의 세부적인 사항은 바로 산란 진폭 $f(\theta)$ 에 담겨 있습니다.

$$dP = |\psi_{in}|^2 dV = |A|^2 (v dt) d\sigma$$



산란 진폭의 의미를 밝히기 위해,
 먼저 **속력** v 로 움직이는 입사 입자가
 시간 dt 동안 미소 면적 $d\sigma$ 를 지나갈 **확률**을 dP 라고 합시다.

$$dP = |\psi_{in}|^2 dV = |A|^2 (v dt) d\sigma$$

$$= |\psi_{sc}|^2 dV = \frac{|A|^2 |f|^2}{r^2} (v dt) r^2 d\Omega$$

한 편, 이것은 입사 입자가 대응되는 입체각 $d\Omega$ 로
산란되는 확률과 같습니다.

$$dP = |\psi_{in}|^2 dV = |A|^2 (v dt) d\sigma$$

$$= |\psi_{sc}|^2 dV = \frac{|A|^2 |f|^2}{r^2} (v dt) r^2 d\Omega$$

$$d\sigma = |f|^2 d\Omega$$

이 두 식을 비교하면 다음과 같습니다.

$$dP = |\psi_{in}|^2 dV = |A|^2 (v dt) d\sigma$$

$$= |\psi_{sc}|^2 dV = \frac{|A|^2 |f|^2}{r^2} (v dt) r^2 d\Omega$$

$$D(\theta) = |f|^2$$

따라서 미분 산란 단면적에 대한 다음과 같은 식을 얻게 됩니다.

$$dP = |\psi_{in}|^2 dV = |A|^2 (v dt) d\sigma$$

$$= |\psi_{sc}|^2 dV = \frac{|A|^2 |f|^2}{r^2} (v dt) r^2 d\Omega$$

$$D(\theta) = |f|^2$$

우리는 실험적으로 좌변의 물리량을 측정합니다.

한 편, 이론적으로 우변을 계산하게 됩니다.

좌변과 우변을 비교함으로써 실험과 이론을 비교하게 됩니다.

산란의 이론적 예측에 해당하는 $f(\theta)$ 는
우리가 가지고 있는 이론적 모형 $V(r)$ 과 관계를 가져야 합니다.

어떻게 이 둘 사이의 관계를 구할 수 있을까요?

두 가지 전략이 가능합니다.

1. 미분 방정식을 직접 푼다: **부분파 분석**
2. 적분을 먼저 적고 이를 섭동적으로 전개한다: **보른Born 근사**

먼저 부분파 분석partial wave analysis에 대해서 살펴봅시다.

$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r)Y_{\ell}^m(\theta, \phi)$$

$$u(r) \equiv rR(r)$$

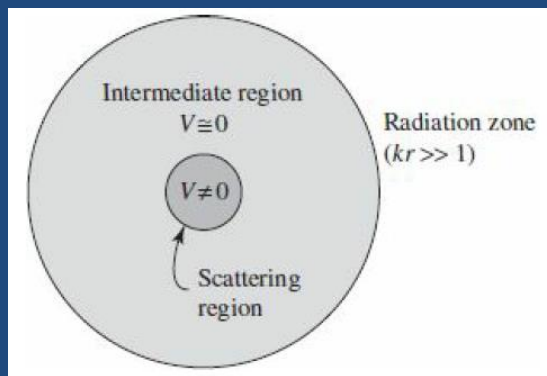
$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u}{dr^2} + \left(V(r) + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right) u = Eu$$

위와 같이 파동 함수와 중심력장의 슈뢰딩거 방정식을 적어봅시다.

$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r)Y_\ell^m(\theta, \phi)$$

$$u(r) \equiv rR(r)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u}{dr^2} + \left(V(r) + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right) u = Eu$$

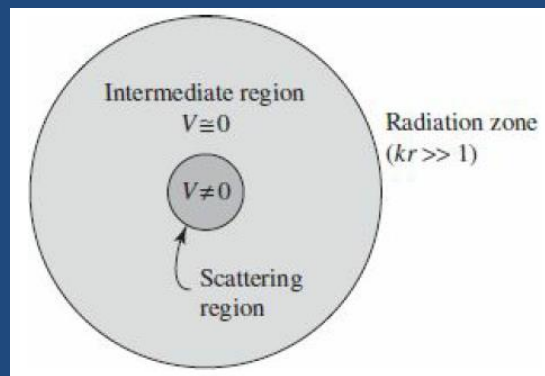


이 방정식을 풀기 위해
세 개의 영역으로 나누어서 생각해 봅시다.

$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r)Y_\ell^m(\theta, \phi)$$

$$u(r) \equiv rR(r)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u}{dr^2} + \left(V(r) + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right) u = Eu$$



- (1) 복사 지역 radiation zone
- (2) 중간 지역 intermediate region
- (3) 산란 지역 scattering region

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u}{dr^2} \simeq Eu$$

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$$u(r) = Ce^{ikr} + De^{-ikr}$$

먼저 복사 지역은 $kr \gg 1$ 인 영역을 고려합니다.
이 때 방정식은 위와 같이 근사되고,
이에 해당하는 해를 위와 같이 찾을 수 있습니다.

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u}{dr^2} \simeq Eu$$

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$$u(r) = Ce^{ikr} + De^{-ikr}$$

$$R(r) \simeq \frac{e^{ikr}}{r}$$

따라서 산란 과정을 기술하기 위해서는 $D = 0$ 으로 선택해야 합니다.

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} u \simeq Eu$$

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$$u(r) = A r h_{\ell}^{(1)}(kr) + B r h_{\ell}^{(2)}(kr)$$

그 다음 중간 지역은 $V = 0$ 인 영역을 고려합니다.

이 때 방정식은 위와 같이 근사되고,
이에 해당하는 해는 행켈 함수Hankel function로 표현됩니다.

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} u \simeq Eu$$

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$$u(r) = Ar h_{\ell}^{(1)}(kr) + Br h_{\ell}^{(2)}(kr)$$

$$R(r) \simeq h_{\ell}^{(1)}(kr)$$

행켈 함수는 점근적으로 $h_{\ell}^{(1,2)} \simeq e^{\pm ikr}/r$ 와 같이 행동하므로,
 $B = 0$ 으로 선택해야 합니다.

$$\psi(r, \theta, \phi) = A \left[e^{ikz} + \sum_{\ell, m} C_{\ell, m} h_{\ell}^{(1)}(kr) Y_{\ell}^m(\theta, \phi) \right]$$

이제 이 행켈 함수를 사용해서 외부 지역에 해당하는 일반적인 파동 함수를 적어 봅시다.

$$\begin{aligned}
 \psi(r, \theta, \phi) &= A \left[e^{ikz} + \sum_{\ell, m} C_{\ell, m} h_{\ell}^{(1)}(kr) Y_{\ell}^m(\theta, \phi) \right] \\
 Y_{\ell}^0 &= \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} P_{\ell}(\cos \theta) \\
 &= A \left[e^{ikz} + k \sum_{\ell} i^{\ell+1} (2\ell+1) a_{\ell} h_{\ell}^{(1)}(kr) P_{\ell}(\cos \theta) \right] \\
 C_{\ell, 0} &\equiv a_{\ell} i^{\ell+1} k \sqrt{4\pi(2\ell+1)}
 \end{aligned}$$

만일 z 축 방향으로의 대칭성에 의해 ϕ 의존성이 없다면,
 $m = 0$ 인 성분만 고려하면 됩니다.

$$\begin{aligned}
 \psi(r, \theta, \phi) &= A \left[e^{ikz} + \sum_{\ell, m} C_{\ell, m} h_{\ell}^{(1)}(kr) Y_{\ell}^m(\theta, \phi) \right] \\
 Y_{\ell}^0 &= \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} P_{\ell}(\cos \theta) \\
 &= A \left[e^{ikz} + k \sum_{\ell} i^{\ell+1} (2\ell+1) a_{\ell} h_{\ell}^{(1)}(kr) P_{\ell}(\cos \theta) \right] \\
 h_{\ell}^{(1)} &\simeq \frac{e^{ikr}}{r} \\
 &\simeq A \left[e^{ikz} + \frac{f(\theta)}{r} e^{ikr} \right]
 \end{aligned}$$

$C_{\ell, 0} \equiv a_{\ell} i^{\ell+1} k \sqrt{4\pi(2\ell+1)}$

이 식은 점근적인 영역 $kr \gg 1$ 에서 위와 같이 전개됩니다.

$$\begin{aligned}
 \psi(r, \theta, \phi) &= A \left[e^{ikz} + \sum_{\ell, m} C_{\ell, m} h_{\ell}^{(1)}(kr) Y_{\ell}^m(\theta, \phi) \right] \\
 Y_{\ell}^0 &= \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} P_{\ell}(\cos \theta) \\
 &= A \left[e^{ikz} + k \sum_{\ell} i^{\ell+1} (2\ell+1) a_{\ell} h_{\ell}^{(1)}(kr) P_{\ell}(\cos \theta) \right] \\
 h_{\ell}^{(1)} &\simeq \frac{e^{ikr}}{r} \\
 &\simeq A \left[e^{ikz} + \frac{f(\theta)}{r} e^{ikr} \right]
 \end{aligned}$$

$C_{\ell, 0} \equiv a_{\ell} i^{\ell+1} k \sqrt{4\pi(2\ell+1)}$

따라서 아래의 두 식을 비교함으로써
산란 진폭 $f(\theta)$ 와 부분파 진폭 a_{ℓ} 사이의 관계를 얻을 수 있습니다.

$$D(\theta) = |f(\theta)|^2$$

$$= \sum_{\ell} \sum_{\ell'} (2\ell + 1)(2\ell' + 1) a_{\ell}^* a_{\ell'} P_{\ell}(\cos \theta) P_{\ell'}(\cos \theta)$$

따라서 미분 산란 단면적은
위와 같이 기술됩니다.

$$D(\theta) = |f(\theta)|^2$$

$$= \sum_{\ell} \sum_{\ell'} (2\ell + 1)(2\ell' + 1) a_{\ell}^* a_{\ell'} P_{\ell}(\cos \theta) P_{\ell'}(\cos \theta)$$

$$\sigma = 4\pi \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) |a_{\ell}|^2$$

그리고 전체 단면적은 위와 같이 기술됩니다.

따라서 부분파 분석에서 중요한 것은
주어진 퍼텐셜 V 에 대해 부분파 진폭 a_ℓ 을 결정하는 것입니다.

이것을 위해서 우리는 산란 영역을 살펴봐야 합니다.

$$e^{ikz} = \sum_{\ell=0}^{\infty} i^{\ell} (2\ell + 1) j_{\ell}(kr) P_{\ell}(\cos \theta)$$

이것을 위해 먼저 한 가지 중요한 관찰이 필요합니다.
위와 같은 항등식이 알려져 있습니다.

$$e^{ikz} = \sum_{\ell=0}^{\infty} i^{\ell} (2\ell + 1) j_{\ell}(kr) P_{\ell}(\cos \theta)$$

$$\psi(r, \theta) = A \sum_{\ell=0}^{\infty} i^{\ell} (2\ell + 1) \left[j_{\ell}(kr) + ika_{\ell} h_{\ell}^{(1)}(kr) \right] P_{\ell}(\cos \theta)$$

이 항등식을 사용해서 $V = 0$ 인 영역의 파동 함수를
 r 에 대해서 표현할 수 있습니다.

$$e^{ikz} = \sum_{\ell=0}^{\infty} i^{\ell} (2\ell + 1) j_{\ell}(kr) P_{\ell}(\cos \theta)$$

$$\psi(r, \theta) = A \sum_{\ell=0}^{\infty} i^{\ell} (2\ell + 1) \left[j_{\ell}(kr) + ik a_{\ell} h_{\ell}^{(1)}(kr) \right] P_{\ell}(\cos \theta)$$

$$\underset{kr \gg 1}{\simeq} A \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(2\ell + 1)}{2ikr} \left[e^{i(kr + 2\delta_{\ell})} - (-1)^{\ell} e^{-ikr} \right] P_{\ell}(\cos \theta)$$

$V \neq 0$ 인 영역을 파동이 들어갈 때와 나갈 때,
 완벽한 반사인 경우
 파동 함수의 **진폭**은 그대로 있지만
 상대적인 **위상**이 변하게 됩니다.

$$e^{ikz} = \sum_{\ell=0}^{\infty} i^{\ell} (2\ell + 1) j_{\ell}(kr) P_{\ell}(\cos \theta)$$

$$\psi(r, \theta) = A \sum_{\ell=0}^{\infty} i^{\ell} (2\ell + 1) \left[j_{\ell}(kr) + ik a_{\ell} h_{\ell}^{(1)}(kr) \right] P_{\ell}(\cos \theta)$$

$$\underset{kr \gg 1}{\simeq} A \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(2\ell + 1)}{2ikr} \left[e^{i(kr + 2\delta_{\ell})} - (-1)^{\ell} e^{-ikr} \right] P_{\ell}(\cos \theta)$$

$$\simeq A \sum_{\ell=0}^{\infty} \left[\frac{(2\ell + 1)}{2ikr} (e^{ikr} - (-1)^{\ell} e^{-ikr}) + \frac{(2\ell + 1)}{r} a_{\ell} e^{ikr} \right] P_{\ell}(\cos \theta)$$

한 편, 위 식을 점근적으로 전개할 수 있습니다.

$$a_\ell = \frac{1}{2ik} (e^{2i\delta_\ell} - 1) = \frac{1}{k} e^{i\delta_\ell} \sin \delta_\ell$$

$$f(\theta) = \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) e^{i\delta_\ell} \sin \delta_\ell P_\ell(\cos \theta)$$

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) \sin^2 \delta_\ell$$

따라서 위상 변화에 대해서 살펴봄으로서,
산란 진폭과 전체 단면적을 다시 표현할 수 있습니다.

$$a_\ell = \frac{1}{2ik} (e^{2i\delta_\ell} - 1) = \frac{1}{k} e^{i\delta_\ell} \sin \delta_\ell$$

$$f(\theta) = \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) e^{i\delta_\ell} \sin \delta_\ell P_\ell(\cos \theta)$$

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) \sin^2 \delta_\ell$$

이 때 부분파 진폭 a_ℓ 은 복소수이지만
 위상 이동 δ_ℓ 은 실수이며,
 운동량 보존을 통해 자유도를 하나 줄이게 되었다는 것을
 알 수 있습니다.

실제 문제에서는
주어진 퍼텐셜 V 에 대해
부분파 진폭 a_ℓ 또는 위상 이동 δ_ℓ 을 계산해야 합니다.

보른 근사Born approximation는
산란을 계산하는 대안적 방법입니다.

이 접근에서 우리는
좀 더 완전한 식으로부터 출발한 뒤,
이 완전한 식을 섭동적으로 전개해서
계산하게 됩니다.

$$k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$$Q \equiv \frac{2m}{\hbar^2} V\psi$$

$$(\nabla^2 + k^2)\psi = Q$$

슈뢰딩거 방정식은 일반적으로 위와 같이 적을 수 있습니다.

$$k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$$Q \equiv \frac{2m}{\hbar^2} V\psi$$

$$(\nabla^2 + k^2)\psi = Q$$

$$(\nabla^2 + k^2)G(\vec{r}) = \delta(\vec{r})$$

$$\psi(\vec{r}) = \int G(\vec{r} - \vec{r}_0)Q(\vec{r}_0)d^3\vec{r}_0$$

우변의 Q 에는 파동 함수 ψ 가 포함되어 있습니다.
 이 부분을 모르는 척 하고 이 방정식을
 그런 함수 Green function의 방법을 사용해서 풀어봅시다.

$$k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$$Q \equiv \frac{2m}{\hbar^2} V\psi$$

$$(\nabla^2 + k^2)\psi = Q$$

$$(\nabla^2 + k^2)G(\vec{r}) = \delta(\vec{r})$$

$$\psi(\vec{r}) = \int G(\vec{r} - \vec{r}_0)Q(\vec{r}_0)d^3\vec{r}_0$$

$$G(\vec{r}) = -\frac{e^{ikr}}{4\pi r}$$

한 편, 그린 함수는 위와 같이 주어집니다.

$$\nabla^2 \left(-\frac{e^{ikr}}{4\pi r} \right) = \nabla \cdot \nabla \left(-\frac{e^{ikr}}{4\pi r} \right)$$

그런 함수가 이렇게 된다는 것을 확인해 봅시다.

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \left(-\frac{e^{ikr}}{4\pi r} \right) &= \nabla \cdot \nabla \left(-\frac{e^{ikr}}{4\pi r} \right) \\
&= \nabla \cdot \left(-\frac{e^{ikr}}{4\pi} \nabla \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{ik}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \hat{r} \right)
\end{aligned}$$

$$\nabla^2 \left(-\frac{e^{ikr}}{4\pi r} \right) = \nabla \cdot \nabla \left(-\frac{e^{ikr}}{4\pi r} \right)$$

$$= \underline{\nabla \cdot \left(-\frac{e^{ikr}}{4\pi} \nabla \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{ik}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \hat{r} \right)}$$

$$= \underline{-\frac{e^{ikr}}{4\pi} \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{4\pi} (\nabla e^{ikr}) \cdot \left(\nabla \frac{1}{r} \right) - \frac{ik}{4\pi} \nabla \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \cdot \hat{r} - \frac{ik}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \nabla \cdot \hat{r}}$$

$$\nabla \cdot (f \vec{A}) = (\nabla f) \cdot \vec{A} + f(\nabla \cdot \vec{A})$$

$$\nabla^2 \left(-\frac{e^{ikr}}{4\pi r} \right) = \nabla \cdot \nabla \left(-\frac{e^{ikr}}{4\pi r} \right)$$

$$= \nabla \cdot \left(-\frac{e^{ikr}}{4\pi} \nabla \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{ik}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \hat{r} \right)$$

$$= -\frac{e^{ikr}}{4\pi} \underbrace{\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right)}_{= -4\pi \delta^{(3)}(r)} - \frac{1}{4\pi} (\nabla e^{ikr}) \cdot \left(\nabla \frac{1}{r} \right) - \frac{ik}{4\pi} \nabla \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \cdot \hat{r} - \frac{ik}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \underbrace{\nabla \cdot \hat{r}}_{= \frac{2}{r}}$$

$$= e^{ikr} \delta^{(3)}(r) + \frac{ike^{ikr}}{4\pi} \frac{\hat{r} \cdot \hat{r}}{r^2} + \frac{ike^{ikr}}{4\pi} \frac{\hat{r} \cdot \hat{r}}{r^2} - \frac{(ik)^2 e^{ikr}}{4\pi r} \hat{r} \cdot \hat{r} - \frac{ik}{2\pi} \frac{e^{ikr}}{r^2}$$

$$\nabla^2 \left(-\frac{e^{ikr}}{4\pi r} \right) = \nabla \cdot \nabla \left(-\frac{e^{ikr}}{4\pi r} \right)$$

$$= \nabla \cdot \left(-\frac{e^{ikr}}{4\pi} \nabla \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{ik}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \hat{r} \right)$$

$$= -\frac{e^{ikr}}{4\pi} \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{4\pi} (\nabla e^{ikr}) \cdot \left(\nabla \frac{1}{r} \right) - \frac{ik}{4\pi} \nabla \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \cdot \hat{r} - \frac{ik}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \nabla \cdot \hat{r}$$

$$= e^{ikr} \delta^{(3)}(r) + \frac{ike^{ikr}}{4\pi} \frac{\hat{r} \cdot \hat{r}}{r^2} + \frac{ike^{ikr}}{4\pi} \frac{\hat{r} \cdot \hat{r}}{r^2} - \frac{(ik)^2 e^{ikr}}{4\pi r} \hat{r} \cdot \hat{r} - \frac{ik}{2\pi} \frac{e^{ikr}}{r^2}$$

$$= \delta^{(3)}(r) + \frac{k^2 e^{ikr}}{4\pi r}$$

$$\psi(\vec{r}) = \psi_0(\vec{r}) - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}_0|}}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} V(\vec{r}_0) \psi(\vec{r}_0) d^3\vec{r}_0$$

따라서 임의의 퍼텐셜에 대한 슈뢰딩거 방정식의 일반 해는
위와 같이 적을 수 있습니다.

$$\psi(\vec{r}) = \psi_0(\vec{r}) - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}_0|}}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} V(\vec{r}_0) \psi(\vec{r}_0) d^3\vec{r}_0$$

ψ_0 은 $V = 0$ 일 때의 해입니다.
 이 식은 근본적으로 옳은 식이긴 하지만,
 두 번째 항에 우리가 구하고자 하는 ψ 가 이미 전제되어 있으므로
 이 적분식을 직접 계산하는 것은 불가능합니다.

$$\psi(\vec{r}) = \psi_0(\vec{r}) - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}_0|}}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} V(\vec{r}_0) \psi(\vec{r}_0) d^3\vec{r}_0$$

그러나 이 적분식을 근사적으로 계산하는 것은 가능합니다.
 이것을 **보른 근사** Born approximation라고 합니다.

$$\psi(\vec{r}) = \psi_0(\vec{r}) - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}_0|}}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} V(\vec{r}_0) \psi(\vec{r}_0) d^3\vec{r}_0$$

$$|\vec{r} - \vec{r}_0|^2 = r^2 + r_0^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}_0 \simeq r^2 \left(1 - 2\frac{\vec{r} \cdot \vec{r}_0}{r^2} \right)$$

만일 $V(\vec{r}_0)$ 가 $\vec{r}_0 = 0$ 주위에 국소화되어 있다면
 $|\vec{r}| \gg |\vec{r}_0|$ 인 곳에서
 위와 같이 근사할 수 있습니다.

$$\psi(\vec{r}) = \psi_0(\vec{r}) - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}_0|}}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} V(\vec{r}_0) \psi(\vec{r}_0) d^3\vec{r}_0$$

$$|\vec{r} - \vec{r}_0|^2 = r^2 + r_0^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}_0 \simeq r^2 \left(1 - 2 \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}_0}{r^2} \right)$$

$$|\vec{r} - \vec{r}_0| \simeq r - \hat{r} \cdot \vec{r}_0$$

따라서 위와 같이 적을 수 있습니다.

$$\psi(\vec{r}) = \psi_0(\vec{r}) - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}_0|}}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} V(\vec{r}_0) \psi(\vec{r}_0) d^3\vec{r}_0$$

$$|\vec{r}-\vec{r}_0|^2 = r^2 + r_0^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}_0 \simeq r^2 \left(1 - 2\frac{\vec{r} \cdot \vec{r}_0}{r^2} \right)$$

$$|\vec{r}-\vec{r}_0| \simeq r - \hat{r} \cdot \vec{r}_0$$

$$\frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}_0|}}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} \simeq \frac{e^{ikr}}{r} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}_0}$$

파동수 벡터를 검출기 방향으로 정의하여
 $\vec{k} \equiv k\hat{r}$ 으로 정의하면
 위와 같이 근사할 수 있습니다.

$$\psi(\vec{r}) = \psi_0(\vec{r}) - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}_0|}}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} V(\vec{r}_0) \psi(\vec{r}_0) d^3\vec{r}_0$$

$$\simeq Ae^{ikz} - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \frac{e^{ikr}}{r} \int e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_0} V(\vec{r}_0) \psi(\vec{r}_0) d^3\vec{r}_0$$

$\psi_0(\vec{r}) = Ae^{ikz}$ 로 놓으면 위와 같이 파동 함수를 근사할 수 있습니다.

$$\begin{aligned}\psi(\vec{r}) &= \psi_0(\vec{r}) - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}_0|}}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} V(\vec{r}_0) \psi(\vec{r}_0) d^3\vec{r}_0 \\ &\simeq Ae^{ikz} - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \frac{e^{ikr}}{r} \int e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_0} V(\vec{r}_0) \psi(\vec{r}_0) d^3\vec{r}_0\end{aligned}$$

$$f(\theta) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2 A} \int e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_0} V(\vec{r}_0) \psi(\vec{r}_0) d^3\vec{r}_0$$

따라서 산란 진폭은 위와 같이 계산됩니다.

$$f(\theta) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2 A} \int e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_0} V(\vec{r}_0) \psi(\vec{r}_0) d^3\vec{r}_0$$

$$\psi(\vec{r}_0) \simeq \psi_0(\vec{r}_0) = A e^{ikz_0} = A e^{i\vec{k}'\cdot\vec{r}_0}$$

$\vec{k}' \equiv k\hat{z}$: 입사 방향으로의 파동수 벡터

보른 근사에서는 이 적분식을 근사적으로 계산합니다.
 V 가 작으면 거의 대부분 입자들은
 입사 방향으로 통과합니다. (1차 보른 근사)

$$f(\theta) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2 A} \int e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_0} V(\vec{r}_0) \psi(\vec{r}_0) d^3\vec{r}_0$$

$$\psi(\vec{r}_0) \simeq \psi_0(\vec{r}_0) = A e^{ikz_0} = A e^{i\vec{k}'\cdot\vec{r}_0}$$

$$\simeq -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int e^{i(\vec{k}'-\vec{k})\cdot\vec{r}_0} V(\vec{r}_0) d^3\vec{r}_0$$

이것을 대입하여 위와 같이 계산할 수 있습니다.

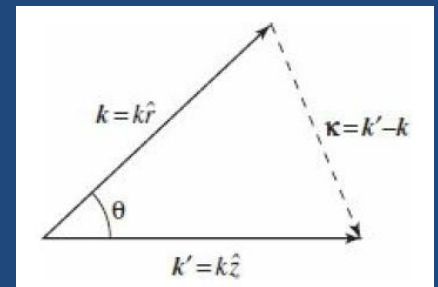
$$f(\theta) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2 A} \int e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_0} V(\vec{r}_0) \psi(\vec{r}_0) d^3\vec{r}_0$$

$$\psi(\vec{r}_0) \simeq \psi_0(\vec{r}_0) = A e^{ikz_0} = A e^{i\vec{k}'\cdot\vec{r}_0}$$

$$\simeq -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int e^{i(\vec{k}'-\vec{k})\cdot\vec{r}_0} V(\vec{r}_0) d^3\vec{r}_0$$

$$= -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int e^{i\kappa r_0 \cos \theta_0} V(r_0) r_0^2 \sin \theta_0 dr_0 d\theta_0 d\phi_0$$

중심력장에서 $(\vec{k}' - \vec{k}) \cdot \vec{r}_0 = \kappa r_0 \cos \theta_0$ 가 되도록
잡을 수 있습니다. ($\vec{\kappa} = \vec{k}' - \vec{k}$)



$$f(\theta) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2 A} \int e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_0} V(\vec{r}_0) \psi(\vec{r}_0) d^3\vec{r}_0$$

$$\psi(\vec{r}_0) \simeq \psi_0(\vec{r}_0) = A e^{ikz_0} = A e^{i\vec{k}'\cdot\vec{r}_0}$$

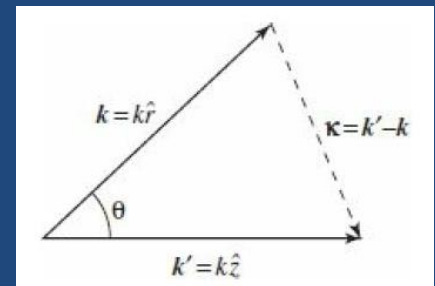
$$\simeq -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int e^{i(\vec{k}'-\vec{k})\cdot\vec{r}_0} V(\vec{r}_0) d^3\vec{r}_0$$

$$= -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int e^{i\kappa r_0 \cos \theta_0} V(r_0) r_0^2 \sin \theta_0 dr_0 d\theta_0 d\phi_0$$

$$\kappa = 2k \sin \frac{\theta}{2}$$

$$= -\frac{2m}{\kappa\hbar^2} \int_0^\infty r V(r) \sin \kappa r dr$$

이므로 여기에
각도 의존성이 담겨있습니다.



$$V(r) = \beta \frac{e^{-\mu r}}{r}$$

보른 근사를 사용하는 대표적인 예로
다음과 같은 **유카와 퍼텐셜**을 적용해 봅시다.

$$V(r) = \beta \frac{e^{-\mu r}}{r}$$

$$f(\theta) \simeq -\frac{2m\beta}{\hbar^2 \kappa} \int_0^\infty e^{-\mu r} \sin \kappa r \, dr$$

$$V(r) = \beta \frac{e^{-\mu r}}{r}$$

$$f(\theta) \simeq -\frac{2m\beta}{\hbar^2 \kappa} \int_0^\infty e^{-\mu r} \sin \kappa r \, dr$$

$$= -\frac{2m\beta}{\hbar^2 (\mu^2 + \kappa^2)}$$

$$V(r) = \beta \frac{e^{-\mu r}}{r}$$

$$f(\theta) \simeq -\frac{2m\beta}{\hbar^2 \kappa} \int_0^\infty e^{-\mu r} \sin \kappa r \, dr$$

$$= -\frac{2m\beta}{\hbar^2(\mu^2 + \kappa^2)} \quad \rightarrow \quad -\frac{2mq_1q_2}{4\pi\epsilon_0\hbar^2\kappa^2}$$

쿨롱 힘의 경우에는 $\beta = \frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0}$ 및 $\mu = 0$ 을 대입하면 됩니다.

$$V(r) = \beta \frac{e^{-\mu r}}{r}$$

$$f(\theta) \simeq -\frac{2m\beta}{\hbar^2 \kappa} \int_0^\infty e^{-\mu r} \sin \kappa r \, dr$$

$$= -\frac{2m\beta}{\hbar^2(\mu^2 + \kappa^2)} \quad \rightarrow \quad -\frac{2mq_1q_2}{4\pi\epsilon_0\hbar^2\kappa^2}$$

$$\kappa = 2k \sin \frac{\theta}{2}$$

$$= -\frac{q_1q_2}{16\pi\epsilon_0 E \sin^2 \frac{\theta}{2}}$$

에너지와 산란 각으로 표현하면 위와 같이 쓸 수 있습니다.

$$|f(\theta)|^2 = D(\theta) = \left| \frac{q_1 q_2}{16\pi\epsilon_0 E \sin^2 \frac{\theta}{2}} \right|^2$$

따라서 다시 한 번 러더퍼드 산란 공식을 얻게 됩니다.
즉, 러더퍼드의 고전적인 산란 공식은
양자역학적인 보른 1차 근사와 일치한다는 것입니다.

보른 근사를 반복하면 좀 더 정확한 결과를 얻게 됩니다.

다음과 같이 함수를 정의합시다.

$$g(\vec{r}) \equiv -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \frac{e^{ikr}}{r}$$

보른 근사를 반복하면 좀 더 정확한 결과를 얻게 됩니다.

다음과 같이 함수를 정의합시다.

$$g(\vec{r}) \equiv -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \frac{e^{ikr}}{r}$$

정확한 식은 다음과 같습니다.

$$\psi = \psi_0 + \int gV\psi$$

$$\psi = \psi_0 + \int gV\psi$$

보른 1차 근사: $\psi \simeq \psi_0$

$$\psi_1 = \psi_0 + \int gV\psi_0$$

$$\psi = \psi_0 + \int gV\psi$$

보른 1차 근사: $\psi \simeq \psi_0$

$$\psi_1 = \psi_0 + \int gV\psi_0$$

보른 2차 근사: $\psi \simeq \psi_1$

$$\psi_2 = \psi_0 + \int gV\psi_1$$

$$\psi = \psi_0 + \int gV\psi$$

보른 1차 근사: $\psi \simeq \psi_0$

$$\psi_1 = \psi_0 + \int gV\psi_0$$

보른 2차 근사: $\psi \simeq \psi_1$

$$\psi_2 = \psi_0 + \int gV\psi_1$$

$$= \psi_0 + \int gV \left(\psi_0 + \int gV\psi_0 \right) = \psi_0 + \int gV\psi_0 + \iint gVgV\psi_0$$

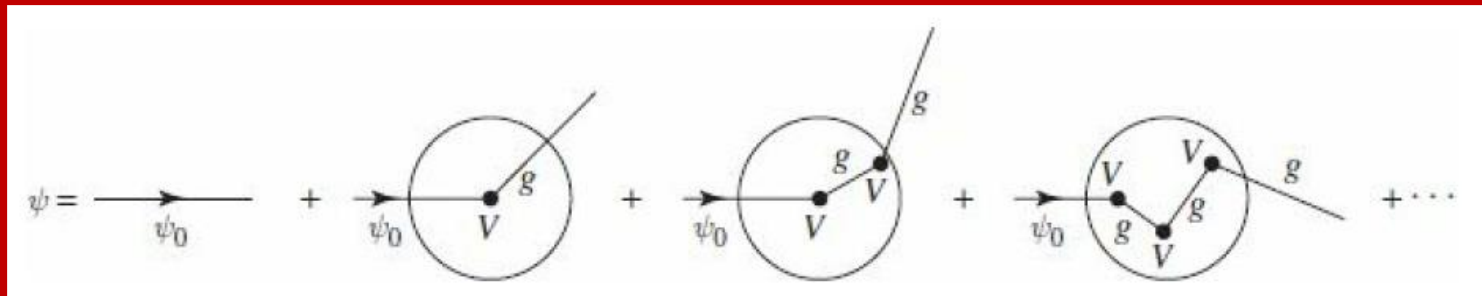
이 과정을 반복하면 다음과 같습니다.

$$\psi = \psi_0 + \int gV\psi_0 + \iint gVgV\psi_0 + \iiint gVgVgV\psi_0 + \cdots$$

이 과정을 반복하면 다음과 같습니다.

$$\psi = \psi_0 + \int gV\psi_0 + \iint gVgV\psi_0 + \iiint gVgVgV\psi_0 + \cdots$$

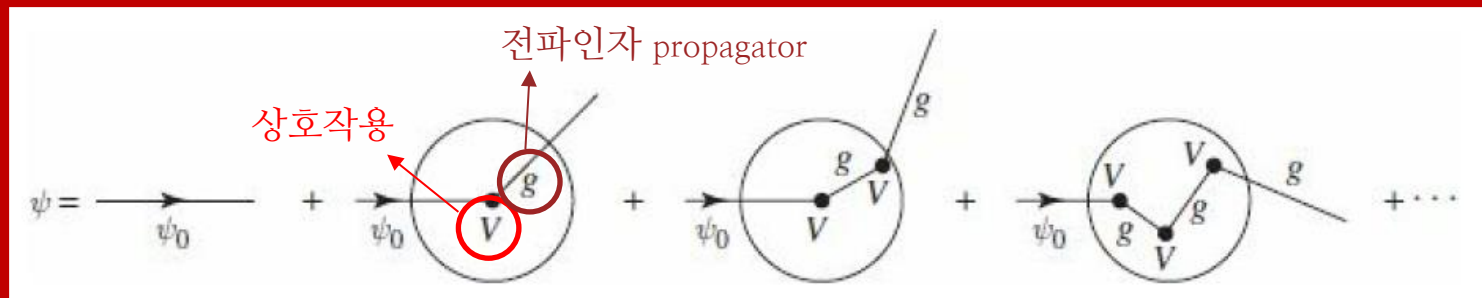
각 항들이 기여하는 것을 그림으로 그려보면 다음과 같습니다.



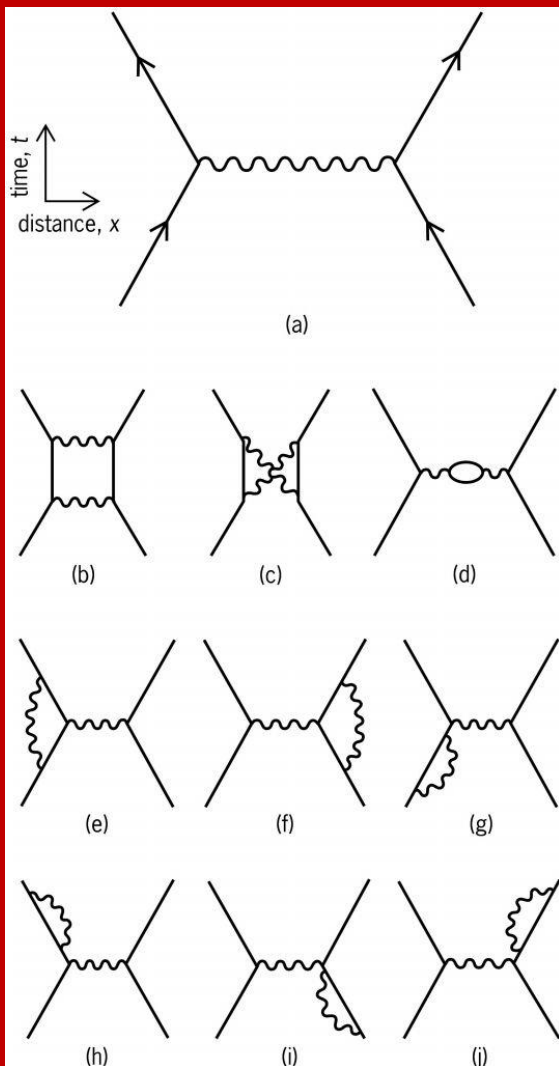
이 과정을 반복하면 다음과 같습니다.

$$\psi = \psi_0 + \int gV\psi_0 + \iint gVgV\psi_0 + \iiint gVgVgV\psi_0 + \dots$$

각 항들이 기여하는 것을 그림으로 그려보면 다음과 같습니다.



이와 같이 파동 함수의 형식적인 적분해가
섭동적인 급수 전개로 표시될 때,
각 급수의 적분식은 상호작용과 전파인자의 조합으로 기술되는
직관적인 도형과 대응이 됩니다.



파인만은 여기에서 영감을 얻어
경로 적분을 섭동적으로 계산하기 위해
파인만 도형Feynman diagram이라는 방법을
도입하게 됩니다.

감사합니다