

제11장

양자 동역학

이제 이번 장에서는 해밀토니안이 시간에 따라 변하는 경우
어떻게 기술해야 하는지를 살펴보겠습니다.

가장 간단한 예로 2준위계를 생각해 봅시다.

$$\hat{H}^0 \psi_a = E_a \psi_a$$

$$\hat{H}^0 \psi_b = E_b \psi_b$$

$$\Psi(0) = c_a \psi_a + c_b \psi_b$$

$$\Psi(t) = c_a \psi_a e^{-i \frac{E_a}{\hbar} t} + c_b \psi_b e^{-i \frac{E_b}{\hbar} t}$$

먼저 해밀토니안이 시간에 따라 변하지 않는 경우
고유 상태와 고유값, 그리고
일반적인 상태의 시간 변화는 위와 같이 기술됩니다.

$$\hat{H}^0 \psi_a = E_a \psi_a$$

$$\hat{H}^0 \psi_b = E_b \psi_b$$

$$\Psi(0) = c_a \psi_a + c_b \psi_b$$

$$\Psi(t) = c_a \psi_a e^{-i \frac{E_a}{\hbar} t} + c_b \psi_b e^{-i \frac{E_b}{\hbar} t}$$

$$|c_a|^2 + |c_b|^2 = 1$$

이 경우 중요한 것은 각 계수들이 시간에 따라 변하지 않는다는 것입니다.

따라서 처음 어떤 상태에 있었다면 영원히 그 상태에 머물러 있어야 합니다.

$$\hat{H} \equiv \hat{H}^0 + \hat{H}'(t)$$

$$\hat{H}\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

해밀토니안에 시간에 의존하는 섭동이 추가된다면
위와 같은 방정식을 만족시켜야 합니다.

$$\hat{H} \equiv \hat{H}^0 + \hat{H}'(t)$$

$$\hat{H}\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

$$\Psi(t) = c_a(t)\psi_a e^{-i\frac{E_a}{\hbar}t} + c_b(t)\psi_b e^{-i\frac{E_b}{\hbar}t}$$

이 때는 파동 함수의 계수들에
시간 의존성을 주면 됩니다.

$$\begin{aligned}\hat{H}\Psi &= \left(\hat{H}^0 + \hat{H}'(t)\right)\Psi \\ &= c_a(\hat{H}^0\psi_a)e^{-i\frac{E_a}{\hbar}t} + c_b(\hat{H}^0\psi_b)e^{-i\frac{E_b}{\hbar}t} \\ &\quad + c_a(\hat{H}'\psi_a)e^{-i\frac{E_a}{\hbar}t} + c_b(\hat{H}'\psi_b)e^{-i\frac{E_b}{\hbar}t}\end{aligned}$$

실제로 방정식에 대입해서 확인해 봅시다.

$$\hat{H}\Psi = \left(\hat{H}^0 + \hat{H}'(t) \right) \Psi$$

$$= c_a(\hat{H}^0\psi_a)e^{-i\frac{E_a}{\hbar}t} + c_b(\hat{H}^0\psi_b)e^{-i\frac{E_b}{\hbar}t} \\ + c_a(\hat{H}'\psi_a)e^{-i\frac{E_a}{\hbar}t} + c_b(\hat{H}'\psi_b)e^{-i\frac{E_b}{\hbar}t}$$

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = i\hbar\left(\dot{c}_a\psi_ae^{-i\frac{E_a}{\hbar}t} + \dot{c}_b\psi_be^{-i\frac{E_b}{\hbar}t}\right) \\ + c_a\psi_aE_ae^{-i\frac{E_a}{\hbar}t} + c_b\psi_bE_be^{-i\frac{E_b}{\hbar}t}$$

실제로 방정식에 대입해서 확인해 봅시다.

$$\begin{aligned}
\hat{H}\Psi &= \left(\hat{H}^0 + \hat{H}'(t) \right) \Psi \\
&= c_a \left(\hat{H}^0 \psi_a \right) e^{-i\frac{E_a}{\hbar}t} + c_b \left(\hat{H}^0 \psi_b \right) e^{-i\frac{E_b}{\hbar}t} \\
&\quad + c_a \left(\hat{H}' \psi_a \right) e^{-i\frac{E_a}{\hbar}t} + c_b \left(\hat{H}' \psi_b \right) e^{-i\frac{E_b}{\hbar}t}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} &= i\hbar \left(\dot{c}_a \psi_a e^{-i\frac{E_a}{\hbar}t} + \dot{c}_b \psi_b e^{-i\frac{E_b}{\hbar}t} \right) \\
&\quad + c_a \psi_a E_a e^{-i\frac{E_a}{\hbar}t} + c_b \psi_b E_b e^{-i\frac{E_b}{\hbar}t}
\end{aligned}$$

섭동이 없을 때의 슈뢰딩거 방정식을 고려하면
노란색 부분과 주황색 부분은 서로 같다는 것을 알 수 있습니다.

$$c_a(\hat{H}'\psi_a)e^{-i\frac{E_a}{\hbar}t} + c_b(\hat{H}'\psi_b)e^{-i\frac{E_b}{\hbar}t} = i\hbar\left(\dot{c}_a\psi_ae^{-i\frac{E_a}{\hbar}t} + \dot{c}_b\psi_be^{-i\frac{E_b}{\hbar}t}\right)$$

따라서 다음 관계식을 얻습니다.

$$c_a(\hat{H}'\psi_a)e^{-i\frac{E_a}{\hbar}t} + c_b(\hat{H}'\psi_b)e^{-i\frac{E_b}{\hbar}t} = i\hbar\left(\dot{c}_a\psi_ae^{-i\frac{E_a}{\hbar}t} + \dot{c}_b\psi_b e^{-i\frac{E_b}{\hbar}t}\right)$$

$$c_a\langle\psi_a|\hat{H}'|\psi_a\rangle e^{-i\frac{E_a}{\hbar}t} + c_b\langle\psi_a|\hat{H}'|\psi_b\rangle e^{-i\frac{E_b}{\hbar}t} = i\hbar\dot{c}_ae^{-i\frac{E_a}{\hbar}t}$$

$$c_a\langle\psi_b|\hat{H}'|\psi_a\rangle e^{-i\frac{E_a}{\hbar}t} + c_b\langle\psi_b|\hat{H}'|\psi_b\rangle e^{-i\frac{E_b}{\hbar}t} = i\hbar\dot{c}_be^{-i\frac{E_b}{\hbar}t}$$

$\psi_{a,b} \rightarrow |\psi_{a,b}\rangle$ 로 바꾸고 양 변에 $\langle\psi_{a,b}|$ 를 내적해 봅시다.

$$c_a(\hat{H}'\psi_a)e^{-i\frac{E_a}{\hbar}t} + c_b(\hat{H}'\psi_b)e^{-i\frac{E_b}{\hbar}t} = i\hbar\left(\dot{c}_a\psi_ae^{-i\frac{E_a}{\hbar}t} + \dot{c}_b\psi_b e^{-i\frac{E_b}{\hbar}t}\right)$$

$$c_a \underbrace{\langle \psi_a | \hat{H}' | \psi_a \rangle}_{\equiv H'_{aa}} e^{-i\frac{E_a}{\hbar}t} + c_b \underbrace{\langle \psi_a | \hat{H}' | \psi_b \rangle}_{\equiv H'_{ab}} e^{-i\frac{E_b}{\hbar}t} = i\hbar \dot{c}_a e^{-i\frac{E_a}{\hbar}t}$$

$$c_a \underbrace{\langle \psi_b | \hat{H}' | \psi_a \rangle}_{\equiv H'_{ba}} e^{-i\frac{E_a}{\hbar}t} + c_b \underbrace{\langle \psi_b | \hat{H}' | \psi_b \rangle}_{\equiv H'_{bb}} e^{-i\frac{E_b}{\hbar}t} = i\hbar \dot{c}_b e^{-i\frac{E_b}{\hbar}t}$$

$\psi_{a,b} \rightarrow |\psi_{a,b}\rangle$ 로 바꾸고 양 변에 $\langle \psi_{a,b}|$ 를 내적해 봅시다.

$$c_a(\hat{H}'\psi_a)e^{-i\frac{E_a}{\hbar}t} + c_b(\hat{H}'\psi_b)e^{-i\frac{E_b}{\hbar}t} = i\hbar\left(\dot{c}_a\psi_ae^{-i\frac{E_a}{\hbar}t} + \dot{c}_b\psi_be^{-i\frac{E_b}{\hbar}t}\right)$$

$$\dot{c}_a = -\frac{i}{\hbar}\left[c_aH'_{aa} + c_bH'_{ab}e^{-i\frac{(E_b-E_a)}{\hbar}t}\right]$$

$$\dot{c}_b = -\frac{i}{\hbar}\left[c_bH'_{bb} + c_aH'_{ba}e^{-i\frac{(E_a-E_b)}{\hbar}t}\right]$$

여기에서 $c_{a,b}$ 에 대한 미분 방정식을 유도할 수 있습니다.

$$c_a(\hat{H}'\psi_a)e^{-i\frac{E_a}{\hbar}t} + c_b(\hat{H}'\psi_b)e^{-i\frac{E_b}{\hbar}t} = i\hbar\left(\dot{c}_a\psi_ae^{-i\frac{E_a}{\hbar}t} + \dot{c}_b\psi_be^{-i\frac{E_b}{\hbar}t}\right)$$

$$\omega_0 \equiv \frac{E_b - E_a}{\hbar} \geq 0$$

$$\dot{c}_a = -\frac{i}{\hbar}c_bH'_{ab}e^{-i\omega_0t}$$

$$\dot{c}_b = -\frac{i}{\hbar}c_aH'_{ba}e^{i\omega_0t}$$

만일 해밀토니안의 섭동이 $\psi_{a,b}$ 기저에 대해서
대각 행렬 요소가 0이 되는 경우를 다룬다면,
위 방정식은 좀 더 단순해집니다.

이 방정식들을 직접 풀 수 있다면 좋지만,
그렇지 않다면 섭동적 전개를 해야만 합니다.

초기 조건 $c_a(0) = 1$

$$c_b(0) = 0$$

먼저 초기 조건이 다음과 같이 주어진다고 합시다.

초기 조건 $c_a(0) = 1$

$$c_b(0) = 0$$

0차 섭동 $c_a^{(0)}(t) = 1$

$$c_b^{(0)}(t) = 0$$

0차 섭동, 즉 섭동 효과를 고려하지 않는다면
계수들은 시간이 지나도 변하지 않아야 합니다.

초기 조건 $c_a(0) = 1$

$$c_b(0) = 0$$

0차 섭동 $c_a^{(0)}(t) = 1$

$$c_b^{(0)}(t) = 0$$

1차 섭동 $\frac{dc_a^{(1)}(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} H'_{ab} e^{-i\omega_0 t} c_b^{(0)}$

$$\frac{dc_b^{(1)}(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} H'_{ba} e^{i\omega_0 t} c_a^{(0)}$$

$$\dot{c}_a = -\frac{i}{\hbar} c_b H'_{ab} e^{-i\omega_0 t}$$

$$\dot{c}_b = -\frac{i}{\hbar} c_a H'_{ba} e^{i\omega_0 t}$$

1차 섭동을 계산하기 위해, 방정식의 우변에 0차 섭동을 대입합니다.

초기 조건 $c_a(0) = 1$

$$c_b(0) = 0$$

0차 섭동 $c_a^{(0)}(t) = 1$

$$c_b^{(0)}(t) = 0$$

1차 섭동 $\frac{dc_a^{(1)}(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} H'_{ab} e^{-i\omega_0 t} c_b^{(0)}$

$$\frac{dc_b^{(1)}(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} H'_{ba} e^{i\omega_0 t} c_a^{(0)}$$

$$c_a^{(1)}(t) = 1$$

$$c_b^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t H'_{ba}(t') e^{i\omega_0 t'} dt'$$

$$\dot{c}_a = -\frac{i}{\hbar} c_b H'_{ab} e^{-i\omega_0 t}$$

$$\dot{c}_b = -\frac{i}{\hbar} c_a H'_{ba} e^{i\omega_0 t}$$

이것을 풀어서 1차 섭동을 구합니다.

1차 섭동 $c_a^{(1)}(t) = 1$

$$c_b^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t H'_{ba}(t') e^{i\omega_0 t'} dt'$$

2차 섭동 $\frac{dc_a^{(2)}(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} H'_{ab} e^{-i\omega_0 t} c_b^{(1)}$

$$\frac{dc_b^{(2)}(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} H'_{ba} e^{i\omega_0 t} c_a^{(1)}$$

이제 2차 섭동은 1차 섭동을 우변에 대입하여 계산합니다.

1차 섭동 $c_a^{(1)}(t) = 1$

$$c_b^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t H'_{ba}(t') e^{i\omega_0 t'} dt'$$

2차 섭동 $\frac{dc_a^{(2)}(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} H'_{ab} e^{-i\omega_0 t} c_b^{(1)}$

$$\frac{dc_b^{(2)}(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} H'_{ba} e^{i\omega_0 t} c_a^{(1)}$$

$$c_a^{(2)}(t) = 1 - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t H'_{ab}(t') e^{-i\omega_0 t'} \left(\int_0^{t'} H'_{ab}(t'') e^{i\omega_0 t''} dt'' \right) dt'$$

$$c_b^{(2)}(t) = c_b^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t H'_{ba}(t') e^{i\omega_0 t'} dt'$$

이것을 풀어서 2차 섭동을 구합니다.

이 과정을 무한히 반복하면 올바른 해를 얻게 될 것입니다.

참고로, 각 섭동에 대해 오차에 의해
 $|c_a|^2 + |c_b|^2$ 가 1이 되지 못하는 것처럼 보입니다.

그러나 일차까지 놓고 보면
 $|c_a|^2 + |c_b|^2 = 1$ 이 여전히 성립하는 것을 알 수 있습니다.

같은 현상을 다른 관점에서 해석해보도록 합시다.

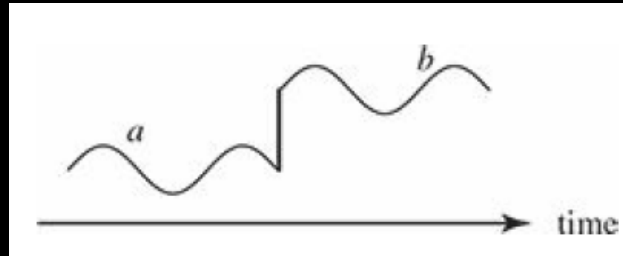
$$c_b^{(1)}(t)e^{-i\frac{E_b}{\hbar}t} = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t e^{-i\frac{E_b}{\hbar}(t-t')} H'_{ba}(t') e^{-i\frac{E_a}{\hbar}t'} dt'$$

$c_b^{(1)}$ 에 대해 우리가 얻은 결과를 위와 같이 적을 수 있습니다.

$$c_b^{(1)}(t)e^{-i\frac{E_b}{\hbar}t} = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t e^{-i\frac{E_b}{\hbar}(t-t')} H'_{ba}(t') e^{-i\frac{E_a}{\hbar}t'} dt'$$

다시 해석해 보면, 처음에는 상태 a 에 있다가
 상태 b 로 전이해서
 b 를 따라 계속 진행하는 것으로 볼 수 있습니다.

$$c_b^{(1)}(t)e^{-i\frac{E_b}{\hbar}t} = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t e^{-i\frac{E_b}{\hbar}(t-t')} H'_{ba}(t') e^{-i\frac{E_a}{\hbar}t'} dt'$$



그림으로 그려보면 위와 같습니다.

$$c_b^{(1)}(t)e^{-i\frac{E_b}{\hbar}t} = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t e^{-i\frac{E_b}{\hbar}(t-t')} H'_{ba}(t') e^{-i\frac{E_a}{\hbar}t'} dt'$$

$$c_a^{(2)}(t)e^{-i\frac{E_a}{\hbar}t} = e^{-i\frac{E_a}{\hbar}t}$$

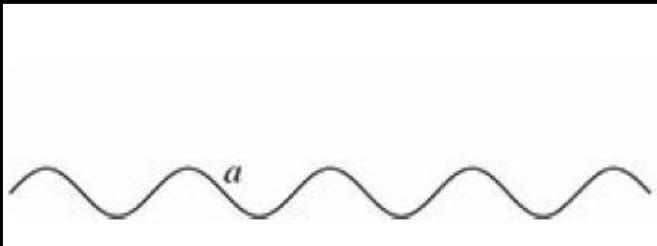
$$+ \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_0^t \int_0^{t'} e^{-i\frac{E_a}{\hbar}(t-t')} H'_{ab}(t') e^{-i\frac{E_b}{\hbar}(t'-t'')} H'_{ba}(t'') e^{-i\frac{E_a}{\hbar}t''} dt'' dt'$$

$c_a^{(2)}$ 는 다음과 같이 적을 수 있습니다.

$$c_b^{(1)}(t)e^{-i\frac{E_b}{\hbar}t} = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t e^{-i\frac{E_b}{\hbar}(t-t')} H'_{ba}(t') e^{-i\frac{E_a}{\hbar}t'} dt'$$

$$c_a^{(2)}(t)e^{-i\frac{E_a}{\hbar}t} = e^{-i\frac{E_a}{\hbar}t}$$

$$+ \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_0^t \int_0^{t'} e^{-i\frac{E_a}{\hbar}(t-t')} H'_{ab}(t') e^{-i\frac{E_b}{\hbar}(t'-t'')} H'_{ba}(t'') e^{-i\frac{E_a}{\hbar}t''} dt'' dt'$$

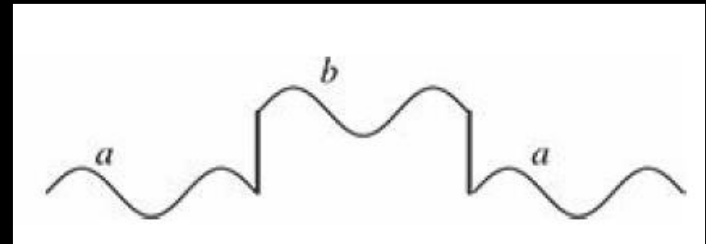


이 경우 첫 번째 항은 **상태 a** 에서 시작해서
계속 그 **상태로** 진행하는 것을 나타냅니다.

$$c_b^{(1)}(t)e^{-i\frac{E_b}{\hbar}t} = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t e^{-i\frac{E_b}{\hbar}(t-t')} H'_{ba}(t') e^{-i\frac{E_a}{\hbar}t'} dt'$$

$$c_a^{(2)}(t)e^{-i\frac{E_a}{\hbar}t} = e^{-i\frac{E_a}{\hbar}t}$$

$$+ \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_0^t \int_0^{t'} e^{-i\frac{E_a}{\hbar}(t-t')} H'_{ab}(t') e^{-i\frac{E_b}{\hbar}(t'-t'')} H'_{ba}(t'') e^{-i\frac{E_a}{\hbar}t''} dt'' dt'$$

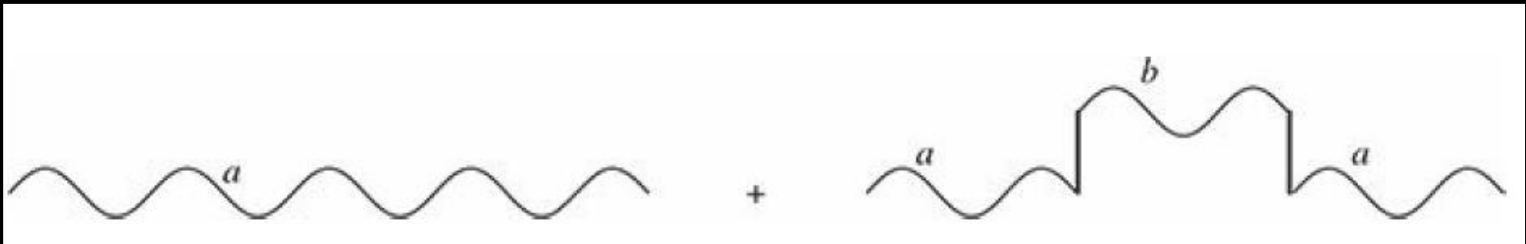


두 번째 항은 상태 a 에 있다가
 상태 b 로 전이해서 진행한 뒤,
 다시 상태 a 로 돌아와서 진행하는 것을 의미합니다.

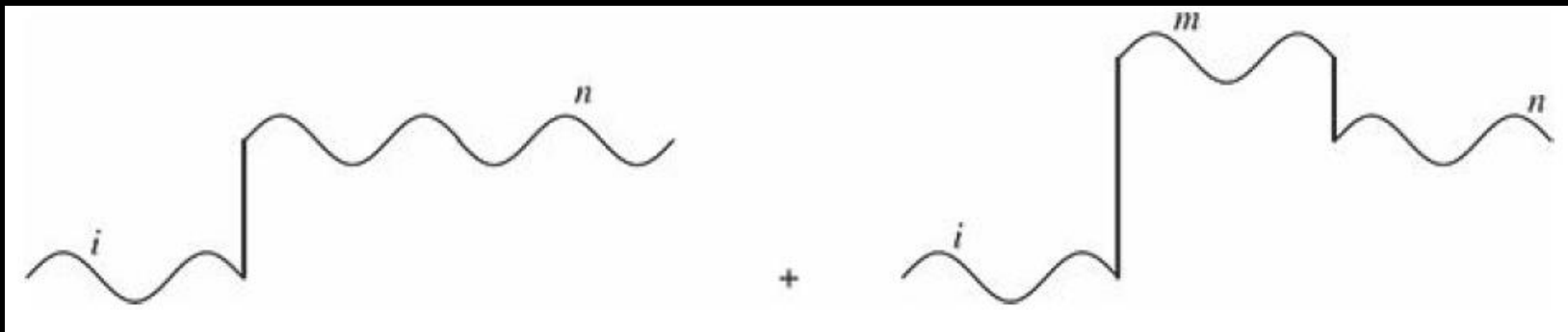
$$c_b^{(1)}(t)e^{-i\frac{E_b}{\hbar}t} = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t e^{-i\frac{E_b}{\hbar}(t-t')} H'_{ba}(t') e^{-i\frac{E_a}{\hbar}t'} dt'$$

$$c_a^{(2)}(t)e^{-i\frac{E_a}{\hbar}t} = e^{-i\frac{E_a}{\hbar}t}$$

$$+ \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_0^t \int_0^{t'} e^{-i\frac{E_a}{\hbar}(t-t')} H'_{ab}(t') e^{-i\frac{E_b}{\hbar}(t'-t'')} H'_{ba}(t'') e^{-i\frac{E_a}{\hbar}t''} dt'' dt'$$



따라서 그림으로 위와 같이 나타낼 수 있습니다.



이것을 다준위계에 대해 일반적으로 확장하면
초기 상태에서 중간 상태를 거쳐서 진행하는 가능한 모든 과정을
순차적으로 더해주면 된다는 것을 알 수 있습니다.

$$\begin{aligned}
\Psi(t) = & \left[1 + \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \int_0^t \hat{H}'(t_1) dt_1 \right. \\
& + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_0^t \hat{H}'(t_1) \left(\int_0^{t_1} \hat{H}'(t_2) dt_2 \right) dt_1 \\
& \left. + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^3 \int_0^t \hat{H}'(t_1) \left(\int_0^{t_1} \hat{H}'(t_2) \left(\int_0^{t_2} \hat{H}'(t_3) dt_3 \right) dt_2 \right) dt_1 + \dots \right] \Psi(0)
\end{aligned}$$

이 과정을 일반화하면 위와 같이 적을 수 있습니다.

$$\begin{aligned}\Psi(t) = & \left[1 + \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \int_0^t \hat{H}'(t_1) dt_1 \right. \\ & + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_0^t \hat{H}'(t_1) \left(\int_0^{t_1} \hat{H}'(t_2) dt_2 \right) dt_1 \\ & \left. + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^3 \int_0^t \hat{H}'(t_1) \left(\int_0^{t_1} \hat{H}'(t_2) \left(\int_0^{t_2} \hat{H}'(t_3) dt_3 \right) dt_2 \right) dt_1 + \dots \right] \Psi(0)\end{aligned}$$

특히 우리는 전체 해밀토니안이 $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}'$ 이라 할 때,
 $\hat{H}_0$ 에 대해서는 고유 상태를 정확히 구해 놓고 고정시킨 뒤,
 $\hat{H}'$ 에 대한 상태의 시간 의존성을 구하는
상호작용 묘사(interaction picture)를 사용할 수 있습니다.

$$\begin{aligned}
\Psi(t) = & \left[1 + \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \int_0^t \hat{H}'(t_1) dt_1 \right. \\
& + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_0^t \hat{H}'(t_1) \left(\int_0^{t_1} \hat{H}'(t_2) dt_2 \right) dt_1 \\
& \left. + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^3 \int_0^t \hat{H}'(t_1) \left(\int_0^{t_1} \hat{H}'(t_2) \left(\int_0^{t_2} \hat{H}'(t_3) dt_3 \right) dt_2 \right) dt_1 + \dots \right] \Psi(0)
\end{aligned}$$

쉽게 말하면 $\hat{H}_0$ 에 대해서는 **하이젠베르크 묘사**를 취하고
 $\hat{H}'$ 에 대해서는 **슈뢰딩거 묘사**를 취한다고 할 수 있습니다.

$$\begin{aligned}
\Psi(t) = & \left[1 + \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \int_0^t \hat{H}'(t_1) dt_1 \right. \\
& + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_0^t \hat{H}'(t_1) \left(\int_0^{t_1} \hat{H}'(t_2) dt_2 \right) dt_1 \\
& \left. + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^3 \int_0^t \hat{H}'(t_1) \left(\int_0^{t_1} \hat{H}'(t_2) \left(\int_0^{t_2} \hat{H}'(t_3) dt_3 \right) dt_2 \right) dt_1 + \dots \right] \Psi(0)
\end{aligned}$$

여기에서 해밀토니안의 적분은
 시간 순서($t \geq t_1 \geq t_2 \geq t_3 \geq \dots$)에 따라
 배열되었음을 알 수 있습니다.

$$\begin{aligned} \Psi(t) = & \left[1 + \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \int_0^t \hat{H}'(t_1) dt_1 \right. \\ & + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_0^t \hat{H}'(t_1) \left(\int_0^{t_1} \hat{H}'(t_2) dt_2 \right) dt_1 \\ & \left. + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^3 \int_0^t \hat{H}'(t_1) \left(\int_0^{t_1} \hat{H}'(t_2) \left(\int_0^{t_2} \hat{H}'(t_3) dt_3 \right) dt_2 \right) dt_1 + \dots \right] \Psi(0) \end{aligned}$$

$$T[\hat{H}'(t_i) \hat{H}'(t_j)] \equiv \begin{cases} \hat{H}'(t_i) \hat{H}'(t_j) & t_i \geq t_j \\ \hat{H}'(t_j) \hat{H}'(t_i) & t_j \geq t_i \end{cases}$$

이 적분을 단순하게 나타내기 위해
 시간 순서 곱 **time-ordered product**이라는 기호를
 도입하도록 합시다.

$$\begin{aligned}
& T \left[\left(-\frac{i}{\hbar} \right)^2 \int_0^t \hat{H}'(t_1) \left(\int_0^t \hat{H}'(t_2) dt_2 \right) dt_1 \right] \\
&= \left(-\frac{i}{\hbar} \right)^2 \int_0^t \left(\int_0^t T[\hat{H}'(t_1) \hat{H}'(t_2)] dt_2 \right) dt_1 \\
&= 2! \left(-\frac{i}{\hbar} \right)^2 \int_0^t \hat{H}'(t_1) \left(\int_0^{t_1} \hat{H}'(t_2) dt_2 \right) dt_1
\end{aligned}$$

$$T[\hat{H}'(t_i) \hat{H}'(t_j)] \equiv \begin{cases} \hat{H}'(t_i) \hat{H}'(t_j) & t_i \geq t_j \\ \hat{H}'(t_j) \hat{H}'(t_i) & t_j \geq t_i \end{cases}$$

이 기호를 사용하면 시간 순서가 지켜지기 때문에
적분을 단순하게 나타낼 수 있습니다.
단, 적분 영역이 **중복**되는 부분을 고려해주어야 합니다.

$$\begin{aligned}
\Psi(t) = & \left[1 + \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \int_0^t \hat{H}'(t_1) dt_1 \right. \\
& + \frac{1}{2!} \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_0^t \int_0^t \mathcal{T}[\hat{H}'(t_1)\hat{H}'(t_2)] dt_1 dt_2 \\
& \left. + \frac{1}{3!} \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^3 \int_0^t \int_0^t \int_0^t \mathcal{T}[\hat{H}'(t_1)\hat{H}'(t_2)\hat{H}'(t_3)] dt_1 dt_2 dt_3 + \dots \right] \Psi(0)
\end{aligned}$$

따라서 시간 순서 곱과 이에 따른 중복 요소를 고려하여
위와 같이 정리될 수 있습니다.

이제 적분하는 시간 영역이 단순 해졌습니다.

$$\begin{aligned}
\Psi(t) = & \left[1 + \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \int_0^t \hat{H}'(t_1) dt_1 \right. \\
& + \frac{1}{2!} \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_0^t \int_0^t \mathcal{T}[\hat{H}'(t_1)\hat{H}'(t_2)] dt_1 dt_2 \\
& + \frac{1}{3!} \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^3 \int_0^t \int_0^t \int_0^t \mathcal{T}[\hat{H}'(t_1)\hat{H}'(t_2)\hat{H}'(t_3)] dt_1 dt_2 dt_3 + \cdots \left. \right] \Psi(0) \\
= & \mathcal{T} \left[e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t \hat{H}'(t') dt'} \right] \Psi(0)
\end{aligned}$$

또는 이 식을 위와 같이 간단히 정리할 수 있습니다.
 이것을 **다이슨의 공식** Dyson's formula 이라고 합니다.

다이슨의 공식은 상호작용하는 효과를 섭동적으로 고려할 때
우리가 사용할 수 있는 공식이며
양자 장 이론에서 근본적인 역할을 하고 있습니다.

$$\Psi(x, t) = \int K(x, x', t) \Psi(x', 0) dx'$$

$$K(x, x', t) = \int \mathcal{D}x e^{i\frac{S}{\hbar}}$$

여기에서 우리는 양자 상태의 변화를 기술하는
두 가지 방법을 볼 수 있습니다.

첫째는 지난 6장에서 살펴본 것처럼
전파 인자를 경로 적분으로 구하는 것입니다.

$$\Psi(x, t) = \int K(x, x', t) \Psi(x', 0) dx'$$

$$K(x, x', t) = \int \mathcal{D}x e^{i\frac{S}{\hbar}}$$

이 접근에서는 작용 또는 라그랑지안이 등장합니다.
 따라서 이론이 가지고 있는 대칭성을 자연스럽게 반영할 수 있으며,
 이 접근 방법을 양자화에 대한
 공변적 접근covariant approach이라고 부릅니다.

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}'$$

$$\Psi(t) = T[e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t \hat{H}'(t') dt'}] \Psi(0)$$

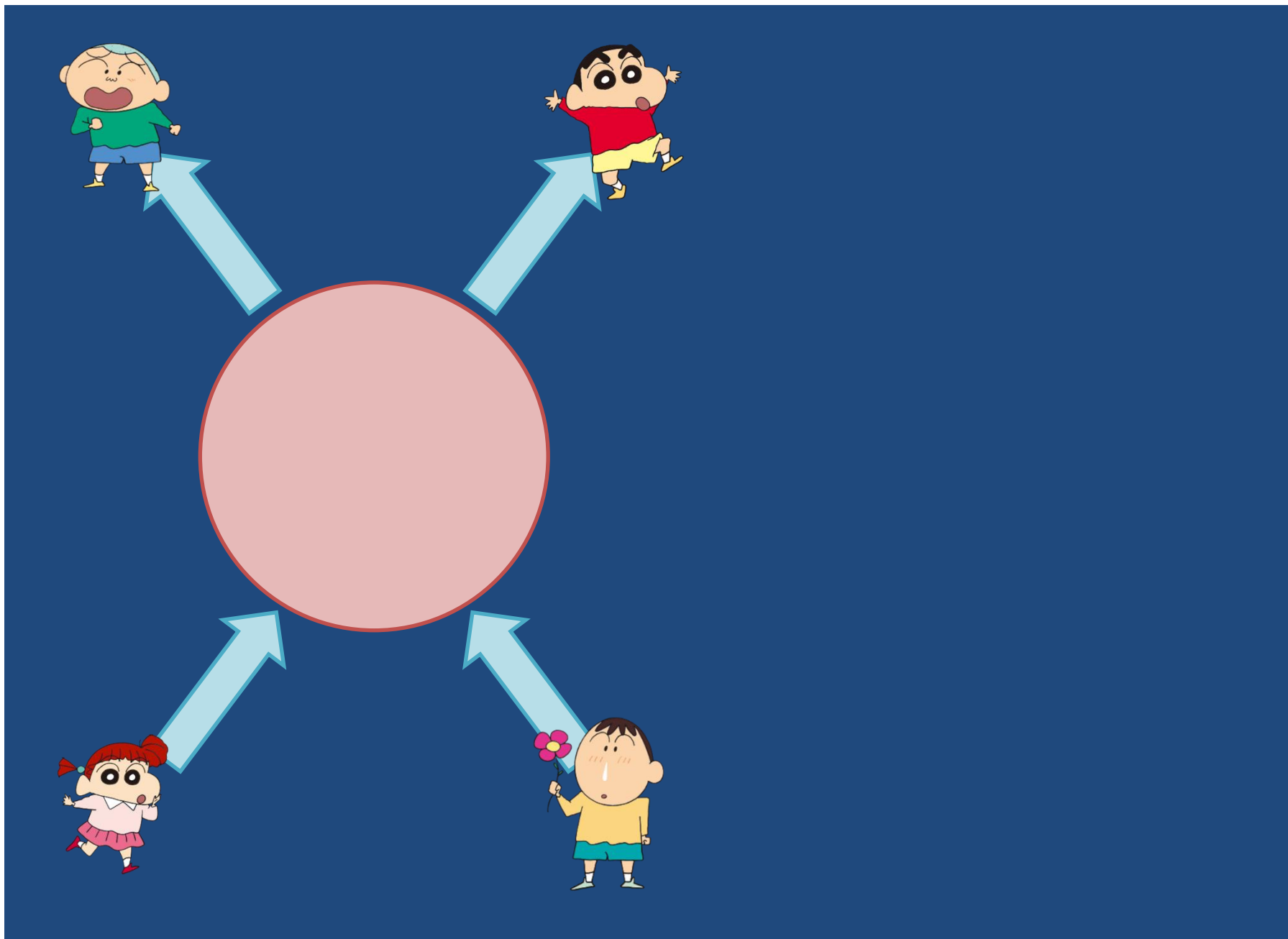
다른 한 편, 둘째로 우리가 이번 장에서 본 것처럼
상호작용 묘사에서 다이슨 전개를 사용하는 것도 가능합니다.

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}'$$

$$\Psi(t) = T[e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t \hat{H}'(t') dt'}] \Psi(0)$$

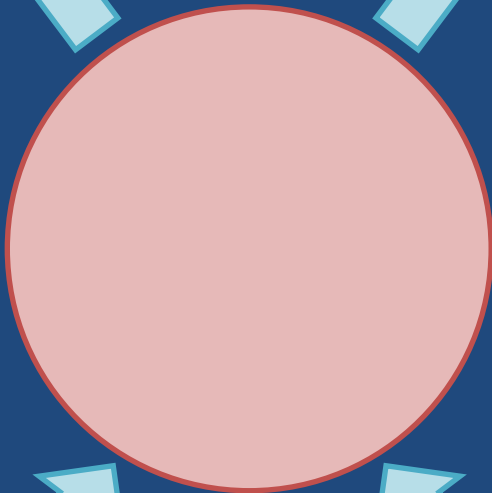
이 경우에는 **해밀토니안**을 사용하기 때문에
슈뢰딩거 방정식과의 연관성이 좀 더 분명합니다.
이것은 **정준적 접근** canonical approach이라고 부릅니다.

이 두 가지 접근 방법에 대해
입자를 **장**으로 확장하고
실험적으로 측정가능한 양들을 정의해서 계산하는 과정을
양자 장 이론quantum field theory이라고 합니다.



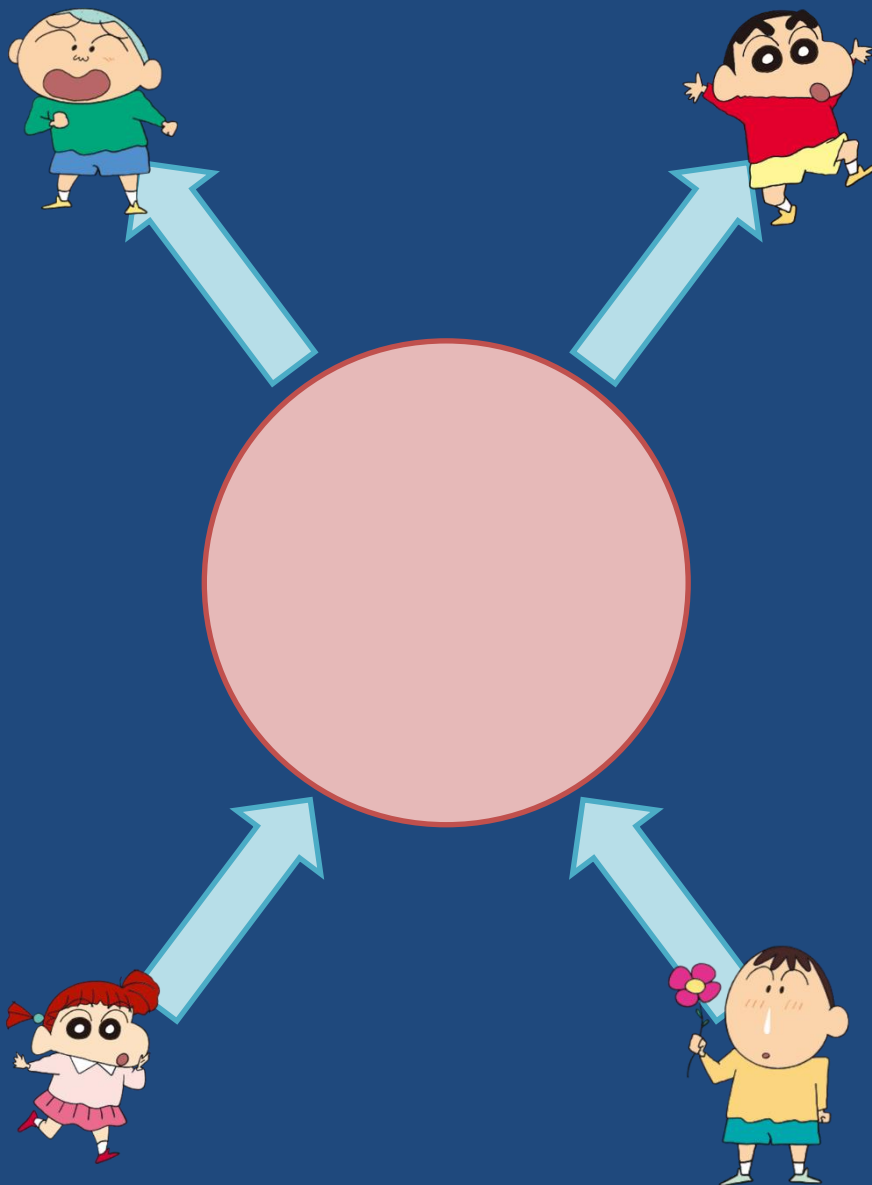


최종상태



초기상태





최종상태

$$| \text{Shin-chan} \text{ Kikyo} \rangle = a^\dagger a^\dagger |0\rangle$$

초기상태

$$| \text{Hibiki} \text{ Shinnosuke} \rangle = a^\dagger a^\dagger |0\rangle$$



최종상태

$$| \text{boy in green shirt, boy in red shirt} \rangle$$

$$= a^\dagger a^\dagger |0\rangle$$

$$e^{-i \int \frac{H}{\hbar} dt}$$



초기상태

$$| \text{girl with red pigtails, boy holding flower} \rangle$$

$$= a^\dagger a^\dagger |0\rangle$$



$$e^{-i \int \frac{H}{\hbar} dt}$$

확률

$$\approx \left| \langle \text{boy in red shirt, yellow pants} \mid e^{-i \int \frac{H}{\hbar} dt} \mid \text{girl in pink dress, red pigtails} \rangle \right|^2$$



이제 양자 동역학의 방법을 응용하는
흥미로운 예들을 찾아보겠습니다.

$$\hat{H}'(\vec{r}, t) = V(\vec{r}) \cos \omega t$$

해밀토니안의 섭동이 위와 같이
진동하는 형태를 가지고 있다고 가정합니다.

$$\hat{H}'(\vec{r}, t) = V(\vec{r}) \cos \omega t$$

$$\begin{aligned} H'_{ab} &= V_{ab} \cos \omega t \\ &\equiv \langle \psi_a | V | \psi_b \rangle \end{aligned}$$

이준위계에서 필요한 행렬 요소는 위와 같습니다.

$$\hat{H}'(\vec{r}, t) = V(\vec{r}) \cos \omega t$$

$$H'_{ab} = V_{ab} \cos \omega t$$

$$\equiv \langle \psi_a | V | \psi_b \rangle$$

$$c_b(t) \simeq -\frac{i}{\hbar} V_{ba} \int_0^t \cos \omega t' e^{i\omega_0 t'} dt'$$

초기에 상태 a 에 있었다면
시간이 지남에 따라 상태 b 로 진행할 확률을
생각해 볼 수 있습니다.

$$\hat{H}'(\vec{r}, t) = V(\vec{r}) \cos \omega t$$

$$H'_{ab} = V_{ab} \cos \omega t$$

$$\equiv \langle \psi_a | V | \psi_b \rangle$$

$$c_b(t) \simeq -\frac{i}{\hbar} V_{ba} \int_0^t \cos \omega t' e^{i\omega_0 t'} dt'$$

$$= -\frac{1}{2\hbar} V_{ba} \left(\frac{e^{i(\omega_0 + \omega)t} - 1}{\omega_0 + \omega} + \frac{e^{i(\omega_0 - \omega)t} - 1}{\omega_0 - \omega} \right)$$

$$\hat{H}'(\vec{r}, t) = V(\vec{r}) \cos \omega t$$

$$H'_{ab} = V_{ab} \cos \omega t$$

$$\equiv \langle \psi_a | V | \psi_b \rangle$$

$$c_b(t) \simeq -\frac{i}{\hbar} V_{ba} \int_0^t \cos \omega t' e^{i\omega_0 t'} dt'$$

$$= -\frac{1}{2\hbar} V_{ba} \left(\frac{e^{i(\omega_0 + \omega)t} - 1}{\omega_0 + \omega} + \frac{e^{i(\omega_0 - \omega)t} - 1}{\omega_0 - \omega} \right)$$

$$\omega_0 + \omega \gg |\omega_0 - \omega|$$

$$\simeq -\frac{1}{2\hbar} V_{ba} \frac{e^{\frac{i(\omega_0 - \omega)t}{2}}}{\omega_0 - \omega} \left(e^{\frac{i(\omega_0 - \omega)t}{2}} - e^{\frac{-i(\omega_0 - \omega)t}{2}} \right)$$

$$\hat{H}'(\vec{r}, t) = V(\vec{r}) \cos \omega t$$

$$H'_{ab} = V_{ab} \cos \omega t$$

$$\equiv \langle \psi_a | V | \psi_b \rangle$$

$$c_b(t) \simeq -\frac{i}{\hbar} V_{ba} \int_0^t \cos \omega t' e^{i\omega_0 t'} dt'$$

$$= -\frac{1}{2\hbar} V_{ba} \left(\frac{e^{i(\omega_0 + \omega)t} - 1}{\omega_0 + \omega} + \frac{e^{i(\omega_0 - \omega)t} - 1}{\omega_0 - \omega} \right)$$

$$\omega_0 + \omega \gg |\omega_0 - \omega|$$

$$\simeq -\frac{1}{2\hbar} V_{ba} \frac{e^{\frac{i(\omega_0 - \omega)t}{2}}}{\omega_0 - \omega} \left(e^{\frac{i(\omega_0 - \omega)t}{2}} - e^{\frac{-i(\omega_0 - \omega)t}{2}} \right)$$

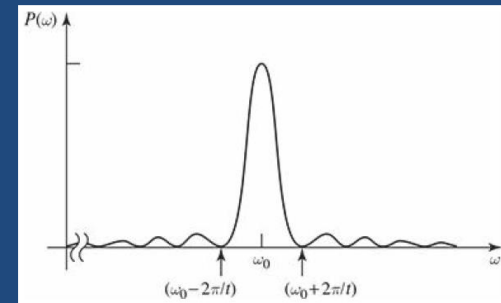
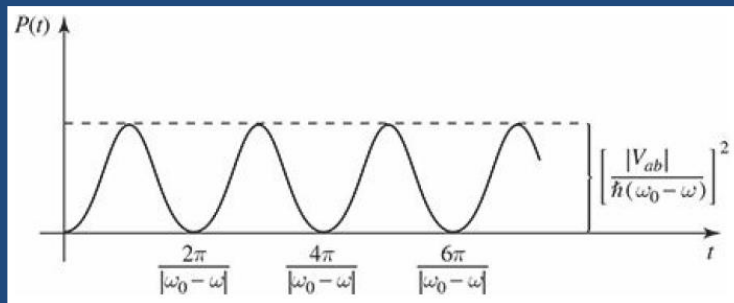
$$= -\frac{i}{\hbar} V_{ba} \frac{e^{\frac{i(\omega_0 - \omega)t}{2}}}{\omega_0 - \omega} \sin \frac{(\omega_0 - \omega)t}{2}$$

$$\hat{H}'(\vec{r}, t) = V(\vec{r}) \cos \omega t$$

$$H'_{ab} = V_{ab} \cos \omega t$$

$$\equiv \langle \psi_a | V | \psi_b \rangle$$

$$P_{a \rightarrow b}(t) = |c_b(t)|^2 \simeq \frac{|V_{ab}|^2}{\hbar^2} \frac{\sin^2 \frac{(\omega_0 - \omega)t}{2}}{(\omega_0 - \omega)^2}$$



따라서 상태 a 에서 상태 b 로 전이할 확률은 위와 같습니다.

특히 이러한 현상은 전자기파가 지나갈 때 벌어질 수 있습니다.

$$\vec{E} = E_0 \cos \omega t \hat{k}$$

특히 이러한 현상은 전자기파가 지나갈 때 벌어질 수 있습니다.

$$\vec{E} = E_0 \cos \omega t \hat{k}$$

원자를 전기 쌍극자로 근사하여 쌍극자의 에너지를 생각합시다.

$$H' = -qE_0 z \cos \omega t$$

이제 쌍극자 에너지에 해당하는 행렬 요소를 생각합시다.

$$H'_{ba} = -pE_0 \cos \omega t$$

여기에서 p 는 전기 쌍극자 모멘트입니다.

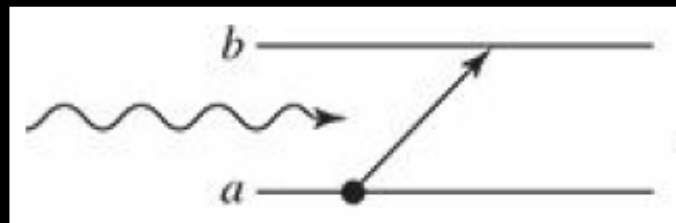
$$p \equiv q\langle\psi_b|z|\psi_a\rangle$$

이 전기 쌍극자 모멘트는 3차원의 경우
선택 규칙 $\Delta\ell \equiv \ell' - \ell = \pm 1$ 및 $\Delta m \equiv m' - m = 0, \pm 1$ 이
존재합니다.

그러나 선택 규칙에 따라 허용되지 않는 과정도
사중극자 또는 좀 더 복잡한 효과에 의해 허용될 수도 있습니다.

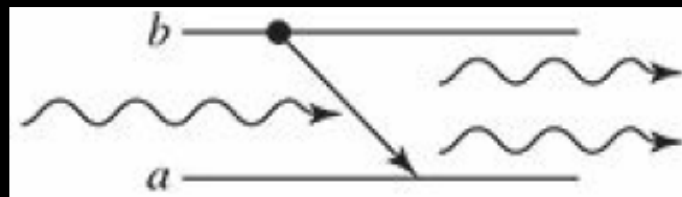
$$p \equiv q \langle \psi_b | z | \psi_a \rangle$$

$$P_{a \rightarrow b}(t) = \left(\frac{|p|E_0}{\hbar} \right)^2 \frac{\sin^2 \frac{(\omega_0 - \omega)t}{2}}{(\omega_0 - \omega)^2}$$



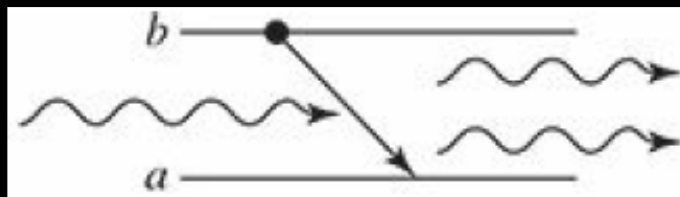
이에 따라 낮은 에너지 상태에서 높은 에너지 상태로 전이하는 과정을 **흡수**absorption라고 합니다.

$$P_{b \rightarrow a}(t) = \left(\frac{|p|E_0}{\hbar} \right)^2 \frac{\sin^2 \frac{(\omega_0 - \omega)t}{2}}{(\omega_0 - \omega)^2}$$



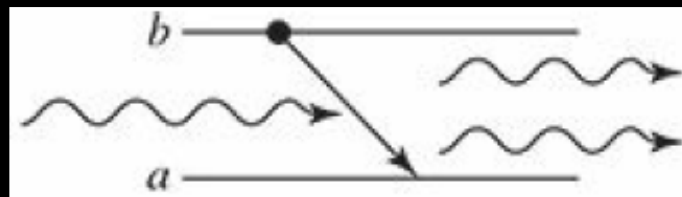
반대 방향의 경우 $\omega_0 \rightarrow -\omega_0$ 를 사용해 다시 기술할 수 있습니다.
 이 과정은 외부 에너지 섭동에 의한 방출에 해당하며,
 유도 방출stimulated emission이라고 합니다.

$$P_{b \rightarrow a}(t) = \left(\frac{|p|E_0}{\hbar} \right)^2 \frac{\sin^2 \frac{(\omega_0 - \omega)t}{2}}{(\omega_0 - \omega)^2}$$

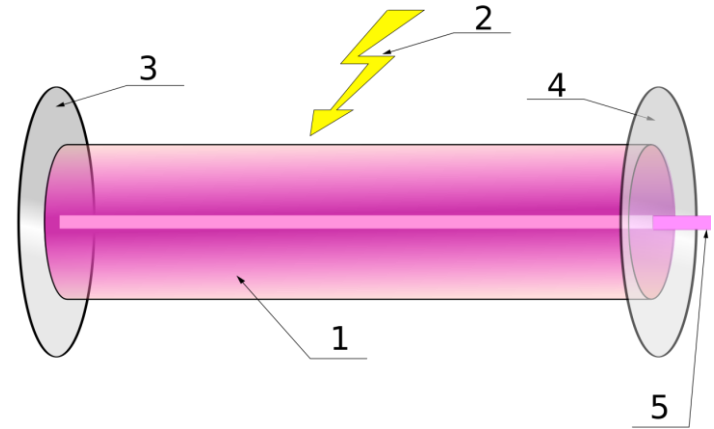
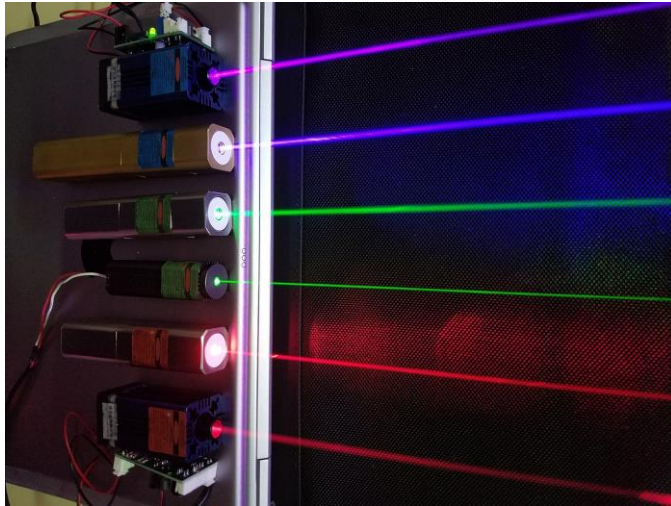


만일 상태 b 에 아주 많은 수의 입자가 쌓이게 되는
 밀도 반전이 일어나고
 여기에서 유도 방출이 일어나면
 같은 진동수를 가지는 광자가 동시에 방출되게 됩니다.

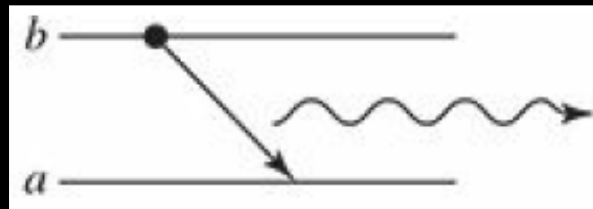
$$P_{b \rightarrow a}(t) = \left(\frac{|p|E_0}{\hbar} \right)^2 \frac{\sin^2 \frac{(\omega_0 - \omega)t}{2}}{(\omega_0 - \omega)^2}$$



이렇게 밀도 반전 및 유도 방출에 의해
 특정 진동수를 가지는 빛이 증폭되어 방출된 것이 바로
 레이저LASER: light amplification by stimulated emission of radiation입니다.



레이저 매질(1)에 에너지(2)가 공급되면
 이 에너지에 의해 **밀도 반전**이 일어납니다.
 여기에서 **유도 방출**된 빛이 두 거울(3과 4) 사이를 왕복하면서
 같은 진동수를 가지는 광자를 모으게 됩니다.
 이렇게 증폭된 빛(5)이 방출되게 됩니다.



외부 섭동이 겉보기에 없더라도 에너지가 방출될 수 있습니다.
이것은 바닥 상태 전기장에 의한 섭동이라고 해석할 수 있으며,
자발 방출 spontaneous emission이라고 합니다.
이 현상은 양자전기역학에서 설명할 수 있습니다.

이제 전기장에 다양한 진동수가 섞인 경우로 확장해보겠습니다.

$$P_{b \rightarrow a}(t) = \frac{2u|p|^2}{\epsilon_0 \hbar^2} \frac{\sin^2 \frac{(\omega_0 - \omega)t}{2}}{(\omega_0 - \omega)^2}$$

전기장의 에너지 밀도가 $u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E_0^2$ 이므로
위와 같이 일반화할 수 있습니다.

$$P_{b \rightarrow a}(t) = \frac{2|p|^2}{\epsilon_0 \hbar^2} \int_0^\infty \rho(\omega) \frac{\sin^2 \frac{(\omega_0 - \omega)t}{2}}{(\omega_0 - \omega)^2} d\omega$$

이제 각 진동수에 대한 에너지 밀도를 $u \rightarrow \rho(\omega)$ 로 표현하고
 다양한 진동수에 대한 적분을 취하면 위와 같습니다.

$$\begin{aligned}
 P_{b \rightarrow a}(t) &= \frac{2|p|^2}{\epsilon_0 \hbar^2} \int_0^\infty \rho(\omega) \frac{\sin^2 \frac{(\omega_0 - \omega)t}{2}}{(\omega_0 - \omega)^2} d\omega \\
 &\simeq \frac{2|p|^2}{\epsilon_0 \hbar^2} \rho(\omega_0) \int_0^\infty \frac{\sin^2 \frac{(\omega_0 - \omega)t}{2}}{(\omega_0 - \omega)^2} d\omega
 \end{aligned}$$

$\frac{\sin^2 \frac{(\omega_0 - \omega)t}{2}}{(\omega_0 - \omega)^2}$ 는 $\omega_0 = \omega$ 일 때 가장 큰 기여를 하게 되므로
 위와 같은 근사가 가능합니다.

$$P_{b \rightarrow a}(t) \simeq \frac{\pi |p|^2}{\epsilon_0 \hbar^2} \rho(\omega_0) t$$

적분을 계산하면 위와 같은 결과를 얻습니다.

$$P_{b \rightarrow a}(t) \simeq \frac{\pi |p|^2}{\epsilon_0 \hbar^2} \rho(\omega_0) t$$

$$\mathcal{R}_{b \rightarrow a} = \frac{dP_{b \rightarrow a}}{dt} \simeq \frac{\pi |p|^2}{\epsilon_0 \hbar^2} \rho(\omega_0)$$

따라서 시간당 상태가 바뀔 **전이율**은 위와 같습니다.

$$\mathcal{R}_{b \rightarrow a} = \frac{dP_{b \rightarrow a}}{dt} \simeq \frac{\pi |p|^2}{3\epsilon_0 \hbar^2} \rho(\omega_0)$$

같은 계산을 3차원으로 확장하면,
앞의 식을 3으로 나누어주면 된다는 것이 알려져 있습니다.

$$\frac{dN_b}{dt} = -N_b A - N_b B_{ba} \rho(\omega_0) + N_a B_{ab} \rho(\omega_0)$$

상태 b 에 있는 입자의 수 N_b 는 위와 같은 관계식을 따라야 합니다.

$$\frac{dN_b}{dt} = -N_b A - N_b B_{ba} \rho(\omega_0) + N_a B_{ab} \rho(\omega_0)$$

$$\mathcal{R}_{b \rightarrow a} = \frac{dP_{b \rightarrow a}}{dt} \simeq \frac{\pi |p|^2}{3\epsilon_0 \hbar^2} \rho(\omega_0)$$

여기에서 A 는 자발 방출률,
 즉 자발 방출을 통해 시간당 줄어드는 비율,
 $B_{ba} \rho(\omega_0)$ 는 유도 방출률, 즉 앞에서 구한 $\mathcal{R}_{b \rightarrow a}$,
 $B_{ab} \rho(\omega_0)$ 는 흡수율, 즉 $\mathcal{R}_{a \rightarrow b}$, 또는
 상태 a 에 있던 입자가 에너지를 흡수해
 상태 b 로 올라오는 비율을 의미합니다.

$$\frac{dN_b}{dt} = -N_b A - N_b B_{ba} \rho(\omega_0) + N_a B_{ab} \rho(\omega_0)$$

$$\mathcal{R}_{b \rightarrow a} = \frac{dP_{b \rightarrow a}}{dt} \simeq \frac{\pi |p|^2}{3\epsilon_0 \hbar^2} \rho(\omega_0)$$

이 계수 A 와 B 를 **아인슈타인 계수**라고 부릅니다.

$$\frac{dN_b}{dt} = -N_b A - N_b B_{ba} \rho(\omega_0) + N_a B_{ab} \rho(\omega_0)$$

$$B_{ab} = B_{ba} = \frac{\pi |p|^2}{3\epsilon_0 \hbar^2}$$

앞에서 유도한 식에 따라서 B_{ab} 와 B_{ba} 는 위와 같이 표현됩니다.

$$0 = \frac{dN_b}{dt} = -N_b A - N_b B_{ba} \rho(\omega_0) + N_a B_{ab} \rho(\omega_0)$$

$$B_{ab} = B_{ba} = \frac{\pi |p|^2}{3\epsilon_0 \hbar^2}$$

열적 평형 상태에서는
시간이 지남에 따라 입자의 수가 변하지 않으므로
좌변이 0이 되어야 합니다.

$$0 = \frac{dN_b}{dt} = -N_b A - N_b B_{ba} \rho(\omega_0) + N_a B_{ab} \rho(\omega_0)$$

$$B_{ab} = B_{ba} = \frac{\pi |p|^2}{3\epsilon_0 \hbar^2}$$

$$\frac{N_a}{N_b} = \frac{e^{-\frac{E_a}{kT}}}{e^{-\frac{E_b}{kT}}} = e^{\frac{\hbar\omega_0}{kT}}$$

이 때 역시 **열적 평형**이라는 조건에 의해서
위와 같은 관계식을 가지게 됩니다.

$$\rho(\omega_0) = \frac{A}{\left(\frac{N_a}{N_b}\right) B_{ab} - B_{ba}} = \frac{A}{\left(e^{\frac{\hbar\omega_0}{kT}} - 1\right) \frac{\pi|p|^2}{3\epsilon_0\hbar^2}}$$

이 조건들을 대입하면 진동수에 대한 에너지 밀도에 대해
위와 같은 식을 얻게 됩니다.

$$\rho(\omega_0) = \frac{A}{\left(\frac{N_a}{N_b}\right) B_{ab} - B_{ba}} = \frac{A}{\left(e^{\frac{\hbar\omega_0}{kT}} - 1\right) \frac{\pi|p|^2}{3\epsilon_0\hbar^2}}$$

$$= \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{\left(e^{\frac{\hbar\omega_0}{kT}} - 1\right)}$$

우리는 한 편 이 결과가
플랑크 분포를 따라야 한다는 것을 알고 있으므로
위와 같이 적을 수 있습니다.

$$A = \frac{\omega_0^3 |p|^2}{3\pi\epsilon_0 \hbar c^3}$$

$$B_{ab} = B_{ba} = \frac{\pi |p|^2}{3\epsilon_0 \hbar^2}$$

두 식을 비교하여 아인슈타인 계수 A 를 결정할 수 있습니다.

$$A = \frac{\omega_0^3 |p|^2}{3\pi\epsilon_0 \hbar c^3}$$

$$B_{ab} = B_{ba} = \frac{\pi |p|^2}{3\epsilon_0 \hbar^2}$$

이것은 플랑크 분포에 대한 새로운 해석을 줍니다.
광자가 방출되는 계에서 **열적 평형**(볼츠만 분포)이 존재하기 위해서는
반드시 **유도 방출**에 해당하는 항이 존재해야 한다는 것입니다.

$$A = \frac{\omega_0^3 |p|^2}{3\pi\epsilon_0 \hbar c^3}$$

$$B_{ab} = B_{ba} = \frac{\pi |p|^2}{3\epsilon_0 \hbar^2}$$

놀랍게도 이러한 통찰은 양자 역학이 만들어지기 전
1917년 아인슈타인에 의해 고안되었다고 합니다.

$$dN_b = -AN_b dt$$

$$N_b(t) = N_b(0)e^{-At} = N_b(0)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

열적 평형에서 벗어나게 되면 유도 효과를 무시할 수 있으며
이 때는 N_b 가 시간에 따라 변하게 됩니다.

$$dN_b = -AN_b dt$$

$$N_b(t) = N_b(0)e^{-At} = N_b(0)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\tau = \frac{1}{A}$$

여기에서 상태의 수명 τ 를 위와 같이 계산할 수 있습니다.

$$dN_b = -AN_b dt$$

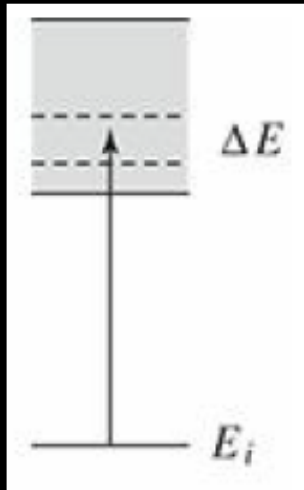
$$N_b(t) = N_b(0)e^{-At} = N_b(0)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\tau = \frac{1}{A_1 + A_2 + A_3 + \dots}$$

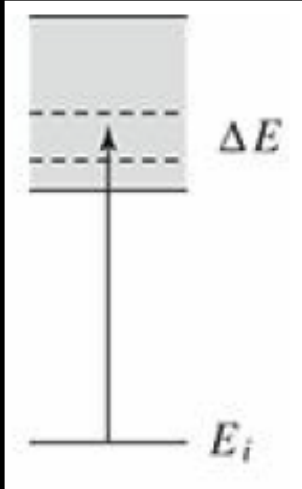
자발 방출할 수 있는 과정이 다양하게 존재한다면
일반적으로 수명은 위와 같이 기술할 수 있습니다.

이 외에도 양자 동역학은 다양한 문제들에 적용될 수 있습니다.
마지막으로 몇 가지 흥미로운 주제들을 간단하게 살펴봅시다.

그 중 첫째는 광전 효과와 페르미의 황금률입니다.

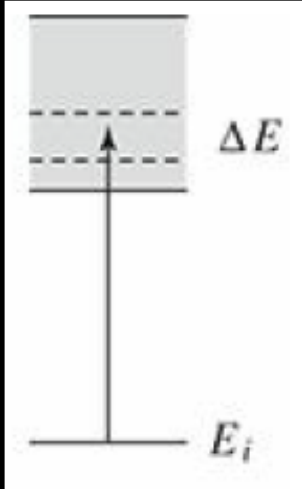


광자가 **속박 상태**의 **불연속적 준위**로부터
산란 상태의 **연속적 준위**로 들뜨는 과정을 생각합시다.
이러한 사례의 대표적인 예가 바로
속박 상태의 전자가 에너지를 받아서 산란 상태로 방출되는
광전 효과photoelectric effect입니다.



$$P = \int_{E_f - \frac{\Delta E}{2}}^{E_f + \frac{\Delta E}{2}} \frac{|V_{in}|^2}{\hbar^2} \frac{\sin^2 \frac{(\omega_0 - \omega)t}{2}}{(\omega_0 - \omega)^2} \rho(E_n) dE_n$$

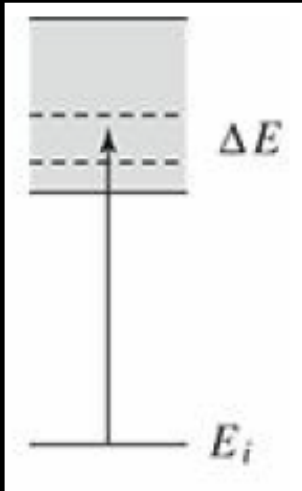
이 과정의 확률은 초기 상태 i 에서 최종 상태 n 으로 가는 모든 과정을 더해줘야 하므로 위와 같이 기술됩니다.



$$P = \int_{E_f - \frac{\Delta E}{2}}^{E_f + \frac{\Delta E}{2}} \frac{|V_{in}|^2}{\hbar^2} \frac{\sin^2 \frac{(\omega_0 - \omega)t}{2}}{(\omega_0 - \omega)^2} \rho(E_n) dE_n$$

$$\simeq \frac{2\pi}{\hbar} \left| \frac{V_{if}}{2} \right|^2 \rho(E_f) t$$

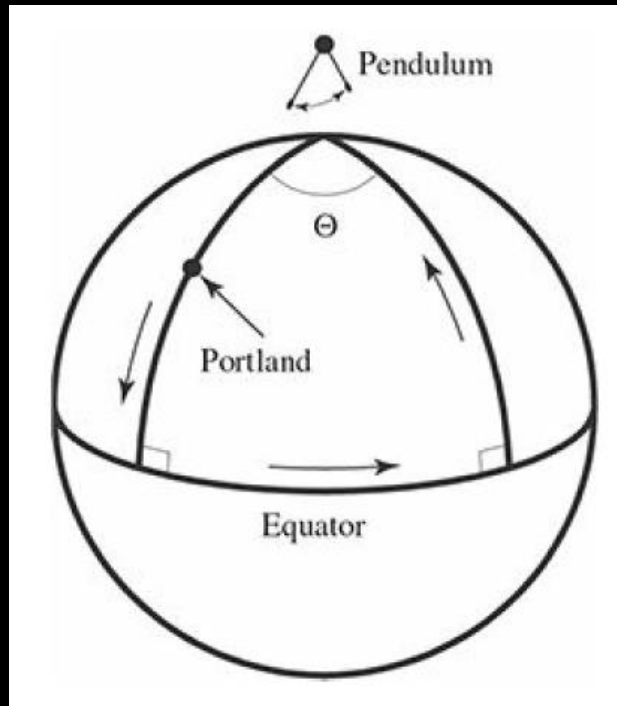
그러나 앞서와 비슷한 근사를 사용해서
위와 같이 단순화할 수 있습니다.



$$\mathcal{R} \simeq \frac{2\pi}{\hbar} \left| \frac{V_{if}}{2} \right|^2 \rho(E_f)$$

이것으로부터 전이율을 다음과 같이 적을 수 있습니다.
이 식은 **페르미의 황금률** Fermi's golden rule이라는 별명으로 불리며
많은 경우에 아주 좋은 근사가 됩니다.

둘째로 서행 근사(adiabatic approximation)에 대해서 살펴봅시다.



푸코 진자는 지구의 자전에 의해 진동의 단면이 변하는
서행 근사의 한 가지 예입니다.

$\hat{H}(0)$ 에서 $\hat{H}(t)$ 로 아주 천천히 변하고
처음에 $\hat{H}(0)$ 의 n 번째 고유 상태에 있었다면,
 $\hat{H}(t)$ 에서도 n 번째 고유 상태로 남는다.

양자 역학에서는 위와 같은
서행 정리adiabatic theorem가 알려져 있습니다.

$\hat{H}(0)$ 에서 $\hat{H}(t)$ 로 아주 천천히 변하고
처음에 $\hat{H}(0)$ 의 n 번째 고유 상태에 있었다면,
 $\hat{H}(t)$ 에서도 n 번째 고유 상태로 남는다.

$$\Psi_n(t) = e^{i\theta_n(t)} e^{i\gamma_n(t)} \psi_n(t)$$

그러나 이 경우 위상은 변할 수 있습니다.
 $\psi_n(t)$ 를 순간적인 t 에서의 n 번째 고유 함수라고 하면,
여기에는 동적 위상 $\theta_n(t) = -\frac{1}{\hbar} \int_0^t E_n(t') dt'$ 과
기하학적 위상 $\gamma_n(t)$ 이 추가될 수 있습니다.

$\hat{H}(0)$ 에서 $\hat{H}(t)$ 로 아주 천천히 변하고
처음에 $\hat{H}(0)$ 의 n 번째 고유 상태에 있었다면,
 $\hat{H}(t)$ 에서도 n 번째 고유 상태로 남는다.

$$\Psi_n(t) = e^{i\theta_n(t)} e^{i\gamma_n(t)} \psi_n(t)$$

$$\gamma_B \equiv \gamma(T) - \gamma(0)$$

여기에서 기하학적 위상은 한 주기 T 를 지나서 제자리에 왔을 때
다른 값으로 주어질 수 있습니다.

이 효과는 실험적으로 측정될 수 있습니다.
이것을 베리의 위상 Berry's phase이라고 합니다.

마지막으로 양자 제논 역설quantum Zeno paradox에 대해서 살펴봅시다.

Zeno's Paradox

Achilles and the tortoise

When Achilles (A) will reach the position where the tortoise (T) started, the tortoise will have moved further ahead.

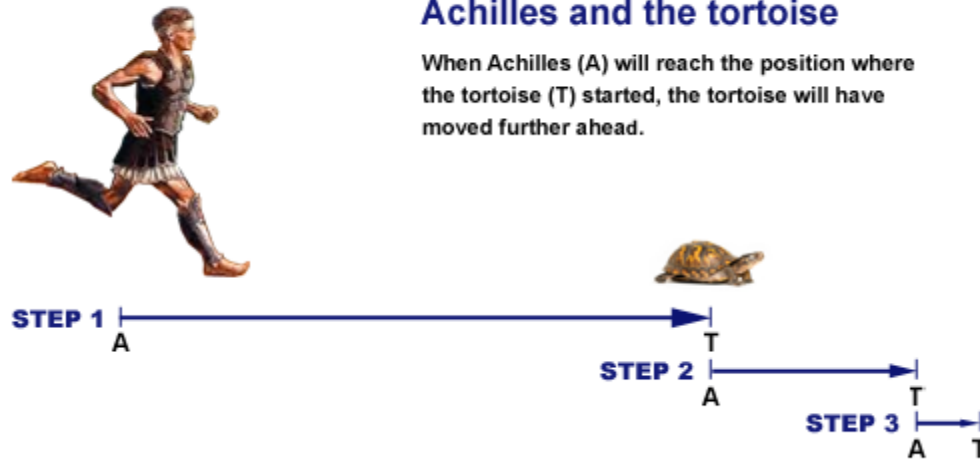


제논이 운동에 대해 제기한 몇 가지 역설은
연속성과 무한에 대한 흥미로운 통찰을 주게 됩니다.

Zeno's Paradox

Achilles and the tortoise

When Achilles (A) will reach the position where the tortoise (T) started, the tortoise will have moved further ahead.



이와 큰 관련은 없을지 모르지만
양자 역학에는 양자 제논 역설로 알려진
흥미로운 현상이 있습니다.

$$P_{b \rightarrow a}(t) = \frac{2|p|^2}{\epsilon_0 \hbar^2} \int_0^\infty \rho(\omega) \frac{\sin^2 \frac{(\omega_0 - \omega)t}{2}}{(\omega_0 - \omega)^2} d\omega$$

$$\simeq \frac{\pi |p|^2}{\epsilon_0 \hbar^2} \rho(\omega_0) t$$

우리는 앞에서 위와 같은 식을 계산했습니다.
 적당히 짧은 시간의 경우 위의 결과는 근사적으로
 시간 t 에 비례한다는 것도 알고 있습니다.

$$\int_0^{\infty} \rho(\omega) \frac{\sin^2 \frac{(\omega_0 - \omega)t}{2}}{(\omega_0 - \omega)^2} d\omega \simeq \int_0^{\infty} \rho(\omega) \frac{\frac{(\omega_0 - \omega)^2 t^2}{4}}{(\omega_0 - \omega)^2} d\omega$$

$$\propto t^2$$

그러나 우리가 측정하는 시간이 극단적으로 짧은 경우는
위와 같이 근사해야 합니다.

그 결과로 **시간의 제공**에 비례하는 결과를 얻습니다.

$$P_b = 1 - \alpha t^2$$

이것은 대체 어떤 의미를 가질까요?
아주 짧은 시간 t 이후 **한 번** 측정한 후
여전히 상태 b 에 있을 확률은 위와 같습니다.
여기에서 α 는 비례 상수입니다.

$$P_b = 1 - \alpha t^2$$

$$P_b^{t,2t} = (1 - \alpha t^2)^2 \simeq 1 - 2\alpha t^2$$

측정을 t 와 $2t$ 에 두 번 했을 때
여전히 상태 b 에 있을 확률은 위와 같습니다.

$$P_b = 1 - \alpha t^2$$

$$P_b^{t,2t} = (1 - \alpha t^2)^2 \simeq 1 - 2\alpha t^2$$

$$P_b^{2t} = 1 - \alpha(2t)^2 = 1 - 4\alpha t^2$$

그러나 측정을 $2t$ 일 때 **한 번**만 하면
여전히 상태 b 에 있을 확률은 위와 같습니다.

$$P_b = 1 - \alpha t^2$$

$$P_b^{t,2t} = (1 - \alpha t^2)^2 \simeq 1 - 2\alpha t^2$$

$$P_b^{2t} = 1 - \alpha(2t)^2 = 1 - 4\alpha t^2$$

$$P_b^{t,2t} - P_b^{2t} = 2\alpha t^2 > 0$$

따라서 놀랍게도 아주 짧은 시간 간격으로 측정을 많이 할 수록 본래 상태에 머물러 있을 확률이 높아지는 것입니다.



이 개념을 확장하면 이렇게 말할 수 있습니다.
“연속적으로 측정하면 상태는 변하지 않는다.”
이러한 흥미롭고 놀라운 이야기는 측정과 파동 함수의 붕괴에 대해
흥미로운 시사점을 남겨줍니다.

감사합니다